



中国科学院
CHINESE ACADEMY OF SCIENCES

复兴路上的科学力量

中国科学院 2023 跨年科学演讲



承办单位：



中国科学院物理研究所
Institute of Physics, Chinese Academy of Sciences



2023 · 跨年科学演讲 ——

电磁学/电动力学：现象、技术与思想

Électromagnétisme/Électrodynamique: Phänomene, Technologie & Ideen

曹 則 賢

2022. 12. 31

中国科学院 · 物理研究所

个人跨年演讲的回顾与安排

量子力学
(2019.12.30)

相对论
(2020.12.30)

规范场论
(2021.12.31)

电磁学/电动力学
(2022.12.31)

热力学
(待定)

经典力学
(待定)

本次跨年演讲的源文件

将由中国科学院物理研究所公众号发布
若内容有可取之处，请随意采用

学物理、研究物理、教物理，物理所是认真的

关于个人物理讲座语言问题

批评意见：为什么在讲座中夹杂那么多的外语？

物理学工作语言变迁：拉丁语→德语 (法语)→英语

额外使用了外语：
避免翻译歧义 (所有人)
方便阅读外文文献 (中学以上)
方便查找原始文献 (大学以上)

如何热爱中华文字？建议了解一下赵元任、梁实秋、钱钟书、王力、王竹溪...，还有老外雷立柏。

热爱我们的**母语**，就请大大方方地用**各种其他语言**去吸收人类文化的精华，进而对人类文化做出自己的突出贡献，让我们的母语成为人类先进文化的载体。语言是毛，文化是皮。**贡献了文化，就捍卫了母语。**

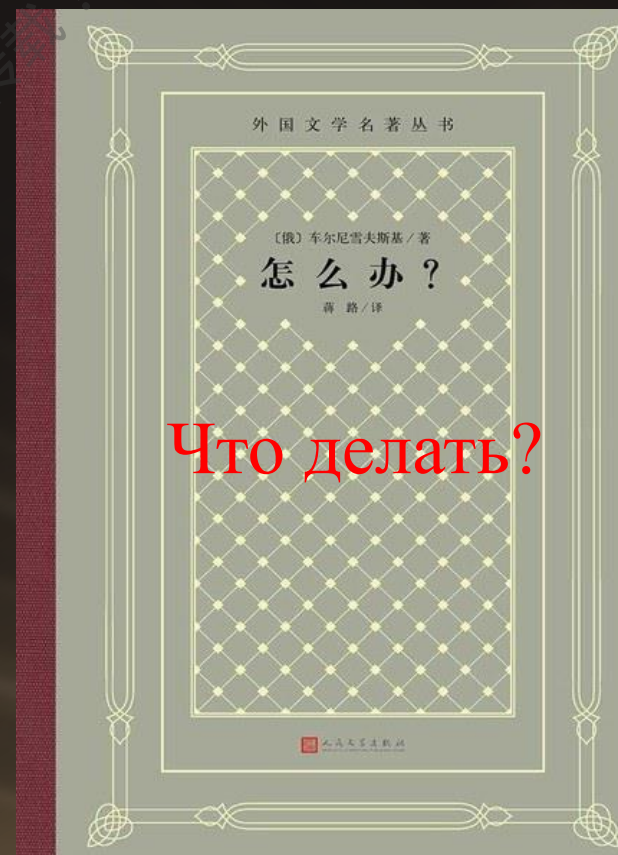
光懂俄语不能在科学上深造。

-车尔尼雪夫斯基《怎么办？》



Николай Гаврилович Чернышевский (1828-1889)

不能读这本书的原文，
算得上是一种遗憾。



- 一切为了人类文明进步所付出过的努力都值得我们敬重和珍惜；
- 对人类的文明结晶要采取拿来主义；
- 我们应该做出我们应有的贡献，也乐意与他人分享我们的成就，这才是新时代中国人的觉悟与气度



新电气时代

一些物理学科的特性

The Nature of some physics branches

热力学：

经典力学：

相对论：

规范场论：

电磁学/电动力学：

量子力学：

原理性学问

摸索→原理性学问

摸索→原理性学问

摸索→原理性学问

构造性学问

构造性学问 {凑量子化条件}

原理性、构造性理论——爱因斯坦 1934

一些物理学科的特性

经典力学原理: the least-action principle

大白话: 最省事原理

热力学原理: 卡诺原理

大白话: 凡是不以做功为目的的传热都是浪费

相对论原理: 相对性原理

大白话: 物理理论与参照框架无关, 形式上不依赖于坐标系的选择

规范场论原理: 规范原理

大白话: 物理理论的对称性要有余量

电磁学、电动力学、{量子力学}、量子电动力学、量子场论??

我为什么对电磁学/电动力学心里发怵？

没哭过长夜，不足以**谈人生**！

—歌德 《威廉·迈斯特的学习时代》

Wer nie sein Brot mit Tränen aß,
Wer nie die kummervollen Nächte
Auf seinem Bette weinend saß,
Der kennt euch nicht, ihr **himmlischen Mächte**.
Ihr führt ins Leben uns hinein,
Ihr lasst den Armen schuldig werden,
Dann überlasst ihr ihn der Pein:
Denn alle Schuld rächt sich auf Erden -Goethe, Wilhelm Meisters Lehrjahre, 1795/6

没泪水泡饭吃的，
没哭过长夜的，
那些人就不知道
马王爷**您**长三只眼！ —歌德

没困惑到挠头，恐不方便跟人说学过电动力学。

某年初秋，武汉大学，一大二学生如是说：

曹老师，我读完了**Jackson**的《经典电动力学》，我觉得它有问题，但我不知道是什么问题，你告诉我到底是什么问题。

Classical
Electrodynamics

Second Edition
J.D.JACKSON

我为什么对电磁学/电动力学心里发怵？

这还是用最
初级的数学
的表示

混乱不堪的单位制、记号、表式形式

Table 2 Definitions of ϵ_0 , μ_0 , $\mathbf{D}$, $\mathbf{H}$, Macroscopic Maxwell Equations, and Lorentz Force Equation in Various Systems of Unit

Where necessary the dimensions of quantities are given in parentheses. The symbol c stands for the velocity of light in vacuum with dimensions (lt^{-1}) .

System	ϵ_0	μ_0	$\mathbf{D}, \mathbf{H}$	Macroscopic Maxwell Equations	Lorentz Force per Unit Charge
Electrostatic (esu)	1	c^{-2} (l^2t^{-2})	$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$ $\mathbf{H} = c^2\mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M}$	$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho$ $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ $\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + 4\pi\mathbf{j}$	$= 0$ $\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}$
Electromagnetic (emu)	c^{-2} (l^2t^{-2})	1	$\mathbf{D} = \frac{1}{c^2}\mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$ $\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M}$	$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho$ $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ $\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + 4\pi\mathbf{j}$	$= 0$ $\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}$
Gaussian	1	1	$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$ $\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M}$	$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho$ $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ $\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + 4\pi\mathbf{j}$	$= 0$ $\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}$
Heaviside-Lorentz	1	1	$\mathbf{D} = \mathbf{E} + \mathbf{P}$ $\mathbf{H} = \mathbf{B} - \mathbf{M}$	$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho$ $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ $\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{j}$	$= 0$ $\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}$
SI	$\frac{10^7}{4\pi c^2}$ ($l^2t^4m^{-1}l^{-3}$)	$4\pi \times 10^{-7}$ ($mlt^{-2}t^{-2}$)	$\mathbf{D} = \epsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}$ $\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{B} - \mathbf{M}$	$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0\mathbf{j} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$	$= 0$ $\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}$



我为什么对电磁学/电-动力学心里发怵？

视感，现将 John David Jackson 著《经典电—动力学》【Classical Electrodynamics, John Wiley & Sons, Inc., third edition (1999). 这本国际上流传甚广的电动力学教科书我给差评！】一书里的所谓 vector formulas 附录照录如下：

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) ;$$

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{c} \cdot \mathbf{a}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) ;$$

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) ;$$

$$\nabla \times \nabla \psi = 0 ;$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) = 0 ;$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{a}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{a}) - \nabla^2 \mathbf{a} ;$$

$$\nabla \cdot (\psi \mathbf{a}) = \mathbf{a} \cdot \nabla \psi + \psi \nabla \cdot \mathbf{a} ;$$

$$\nabla \times (\psi \mathbf{a}) = \nabla \psi \times \mathbf{a} + \psi \nabla \times \mathbf{a} ;$$

$$\nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{b} + (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{a} + \mathbf{a} \times (\nabla \times \mathbf{b}) + \mathbf{b} \times (\nabla \times \mathbf{a}) ;$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) - \mathbf{a} \cdot (\nabla \times \mathbf{b}) ;$$

$$\nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{a}(\nabla \cdot \mathbf{b}) - \mathbf{b}(\nabla \cdot \mathbf{a}) + (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{b} .$$

对于三维位置矢量 $\mathbf{x}$, 有 $\nabla \cdot \mathbf{x} = 3$; $\nabla \times \mathbf{x} = 0$ 。

这是
数学？

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k & i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

- - - + + +

哪一个学电-动力学的中国学生没被这些不知所云的矢量公式 **vector formulae** 虐过好几遍？

有几个上电-动力学课的青教们知道这是在干嘛的？

为什么书后有公式附录列表呢？
是为了你需要时查询？不，是因为写这书的作者本来就不指望能让人理解、学会、记住。

我为什么对电磁学/电动力学心里发怵？

电磁学的主角 $\{\mathbf{D}, \mathbf{E}, \mathbf{P}\}$ vs. $\{\mathbf{B}, \mathbf{H}, \mathbf{M}\}$

1. 它们各自的名称、定义是什么？
2. 谁是自由空间的量，谁是物质里的量？ {物理学家投过票的}
3. 谁和谁一拨儿？谁和谁能组合到一起进入高层次表示？
4. 历史上谁出现在先、谁在后？
5. 写本构方程时谁在左、谁在右，谁该和谁在一边？

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f / \epsilon_0$$

Here we are going to show that subdivision (of free and bound charges) is not so rigid, and unfortunately those two kinds of charge are usually defined in many different, non-equivalent ways, depending on the context.

“自由电荷、束缚电荷就是瞎扯！” 我天！原来不是我一个人困惑。 Shortly, the concepts of free and bound charges sound quite fuzzy and arbitrary, and trying to impose a rigid definition of them seems useless. 哈哈

如果人类即将毁灭，只能给后来的文明留一句话，你想说什么？

费曼说过，他选：All things are made of atoms.

事物都是原子(ατομ)构成的！

如果咱们普通人也能插上嘴
我会选这么一句，“要学会用电！”，并且加上电火花的符号。

人类再也回不到没有电的时代了。

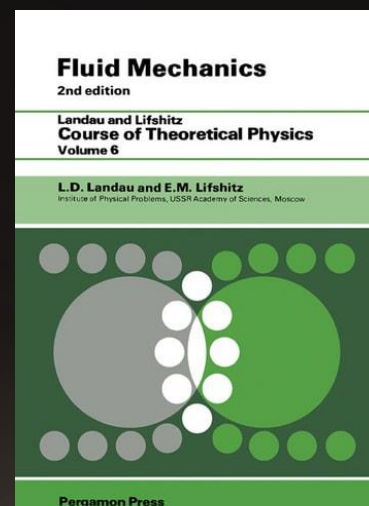
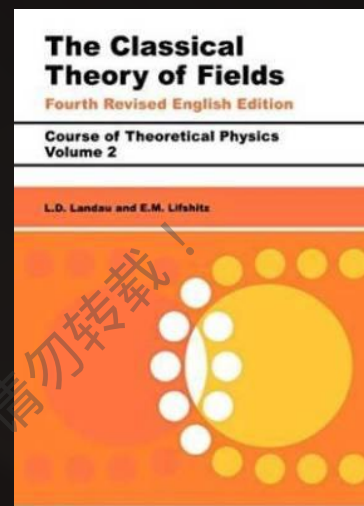


内容提要

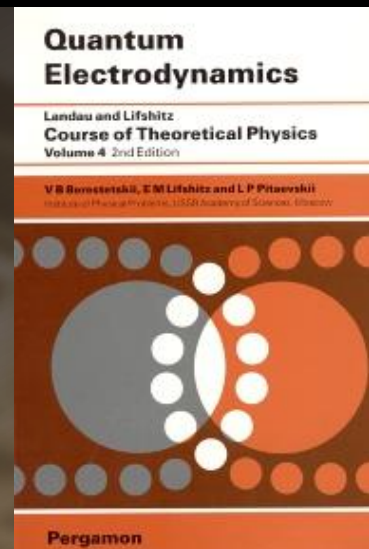
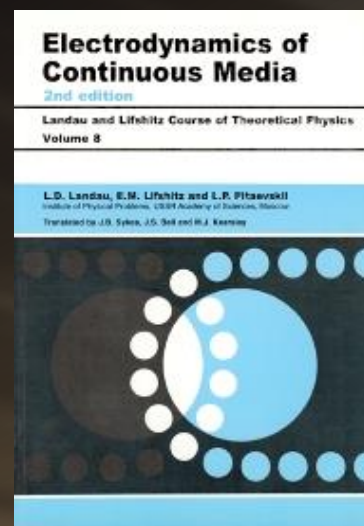
- 电现象与磁现象
- 静电学与静磁学
- 电磁学
- 电磁学的数学
- 电动力学 (狭义相对论, 2020跨年)
- 量子电动力学

电学问博大精深
本讲座挂一漏万

经典电磁学
是流体力学



朗道理论物理教程 4/10



几个“电”概念的关键年份

电在磁后，
磁好把握

Electricity (电). 英国物理学家 William Gilbert (1605-1682) **1600**年在著作 De Magnete (论磁) 中基于拉丁语 electrum (amber, 树脂, 琥珀) 创造了现代拉丁语词 electricus (resembling electrum).

Electric (电的). **1640**年代, 生理学家 Thomas Browne (1605-1682) 使用了 electric 这个英语形式, 意为‘如同琥珀的’。

Electrodynamics (电-动力学). **1826**年, 法国物理学家 安培 (André-Marie Ampère, 1775–1836) 创造了法语词 électrodynamique.

Electron (电子). **1891**年 爱尔兰物理学家 George J. Stoney (1826-1911) 基于 electric 造了这个词, electric+on; **1897**年发现.

Quantum Electrodynamics (量子电-动力学). **1927**年, 英国狄拉克 (P.A.M. Dirac)

电磁学/电动力学人物

1. 牧羊人Magnes, Thales
2. Gilbert, Franklin, McCullagh?
3. Oersted
4. Coulomb, **Ampère**, Biot-Savoir
5. **Gauss**, Weber, Kirchhoff
6. Henry, Mossetti, Volta
7. Faraday; Ohm, Joule, Lord Kelvin
8. **Poisson, Hamilton, Grassmann, Maxwell, Clifford, Tait, Heaviside, Green, Neumann, Riemann, Voigt**
9. Lorentz, Lorenz, Lenz
10. Hertz (Emil Cohn?)
11. J. J. Thomson, **Poincaré**, Einstein
12. Pauli, **Dirac**, Jordan
13. Schwinger, Feynman, Tomonaga, Dyson

电磁学
的数学

人名作为电磁学单位

1. Coulomb
2. Ampère,
3. Oersted
4. Volta
5. Gauss, Tesla
6. Weber
7. Henry
8. Faraday
9. Ohm
10. Joule
11. Hertz
12. Siemens



The most incomprehensible thing about the universe is that it is comprehensible.

—Albert Einstein, *Physics and Reality*, 1936

大自然为人类提供了认识自然的自然路径！

自然界有现成的 电现象、磁现象和光，有现成的良导体金银铜
地有磁，日有光，云上有电

如果发展不出电磁学，那人类才对不起造物呢！



Electricity is a Physical Phenomenon

Physical phenomenon: 自然现象

注: Physis, 自然; Nature, 生产

雷电 (thunder/lightning): 短时、猛烈,
我们不知道它是什么。

2750 BCE 埃及, 尼罗雷神 “Thunderer of the Nile”
and described them as the "protectors" of all other fish.



Electric Ray, 电射线?

No, we are 电鳐, 一种 fish.
Torpedo, 不是鱼雷, 那是电鳐.



Marbled electric ray.

~1773年, 卡文迪许(1731-1810) 认为
electric ray 使用了电 (electricity).

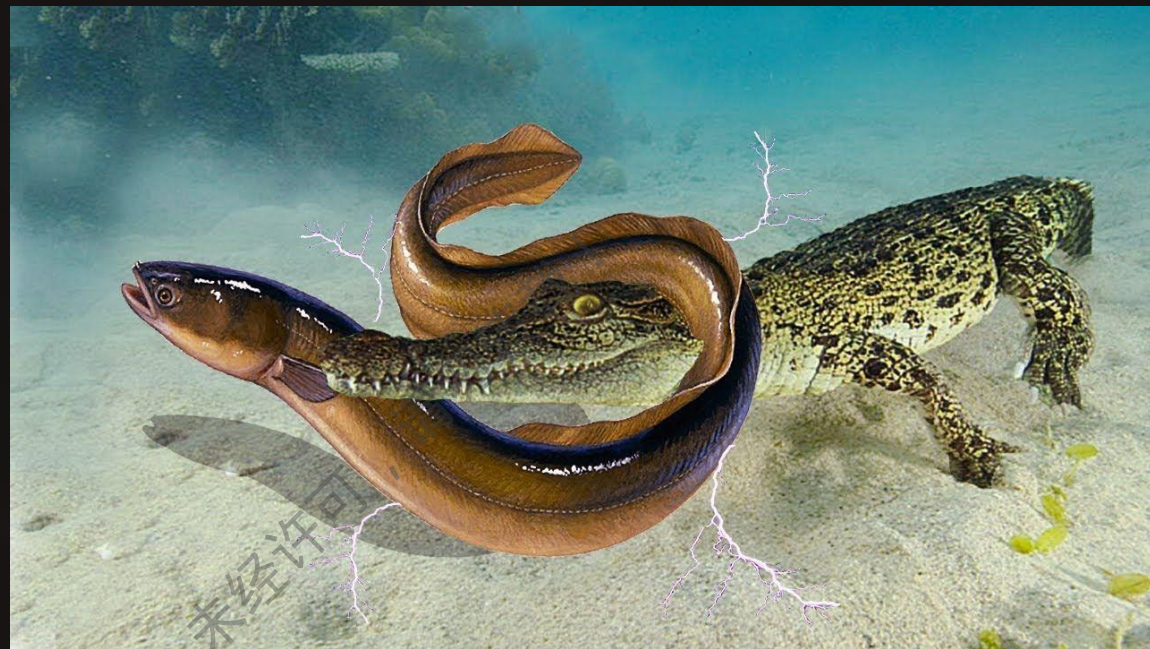


产于墨西哥湾的 Lesser electric ray

Electricity is a Physical Phenomenon

Electric fish are reported by Arabic naturalists

电鳗能干翻鳄鱼



电鳗的名称是后来的，不知道当年叫啥

电压： $0\sim 600\text{ V}$

电流密度： 0.5 A/m^2

中国科学院已经能够模拟电鳗，并试图回答

“电鳗咋不自动变成烤鱼呢？”

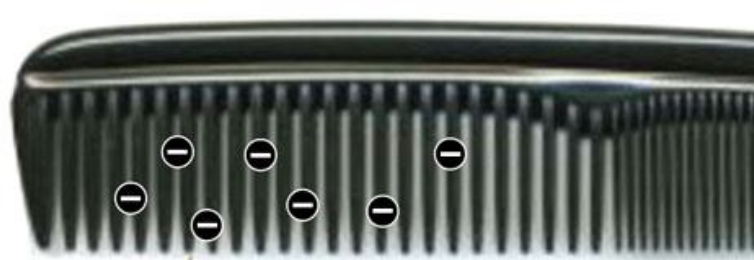


电有极!

Stargazer, 仰望星空者?

你才仰望星空呢，你们一宿舍都仰望星空。

这是电鳐，是电瓶的祖先。



牛角梳？

电是一种自然现象



当琥珀 (electron) 遇到了毛皮、绸缎

Charged with electricity, with electric charge

琥珀仿佛带上了 (charged with) 什么



琥珀 ~ ἤλεκτρον (electron)

树脂 (resin),
琥珀 (amber) is fossil resin
松香 (rosin)



时时勤拂拭
容易惹尘埃



Electra and Orestes

Electra (**shining**, the beaming sun, amber), 其兄为 Orestes (Mountaineer), 他们是 Agamemnon 和 Clytaemnestra 的儿女, 他们合伙谋杀了母亲 Clytaemnestra

Electra 后来被演化出了“电”一词

一个姓 Oersted 的人发现电的磁效应。

而 Electra 本身就意味着光

1862 年左右, 麦克斯韦猜测**光是电磁波**。
冥冥中有天意否?

ἤλεκτρον (electron)



Electra and Orestes

Electrum (ἤλεκτρον)

Electrum, 金银合金

可能是和Amber 一样软乎



Electrotype of electrum coin from Ephesus, 625–600 BC. ΦΑΝΕΟΣ ΕΜΙ ΣΕΜΑ (retrograde, “I am the badge of Phanes”).

别在西文里见着Electro 就说是电.

也别汉语里见着電就以为是electricity.

Electrotype, 电铸版 (板)? 模压版!

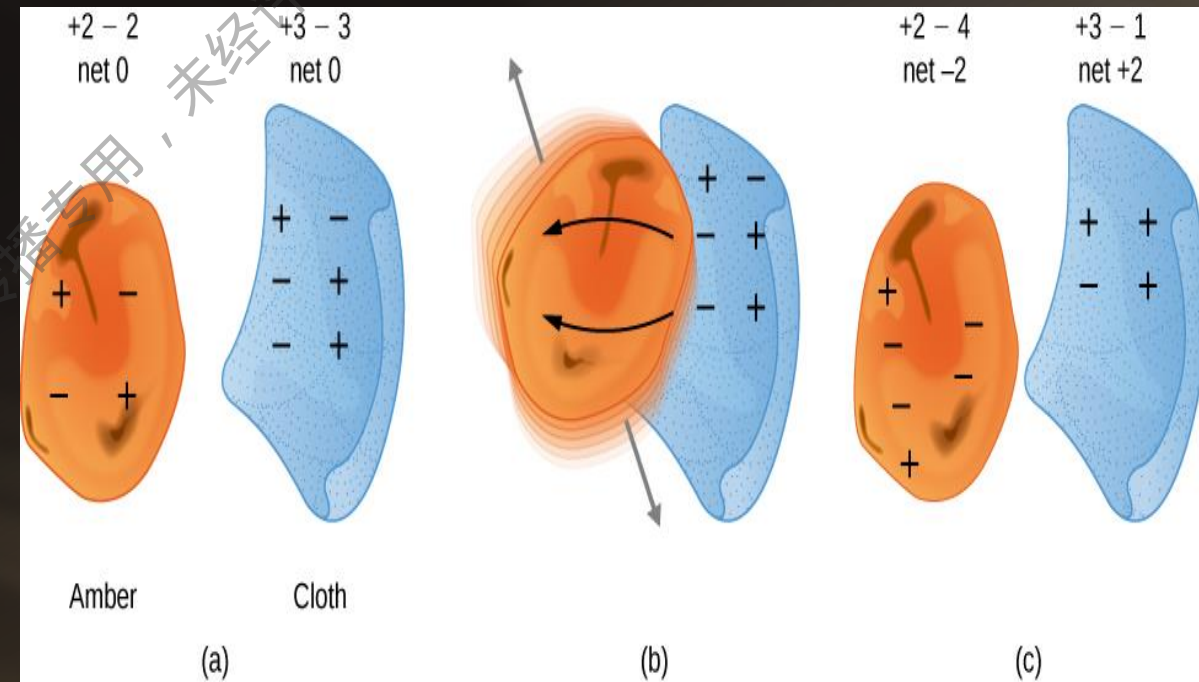
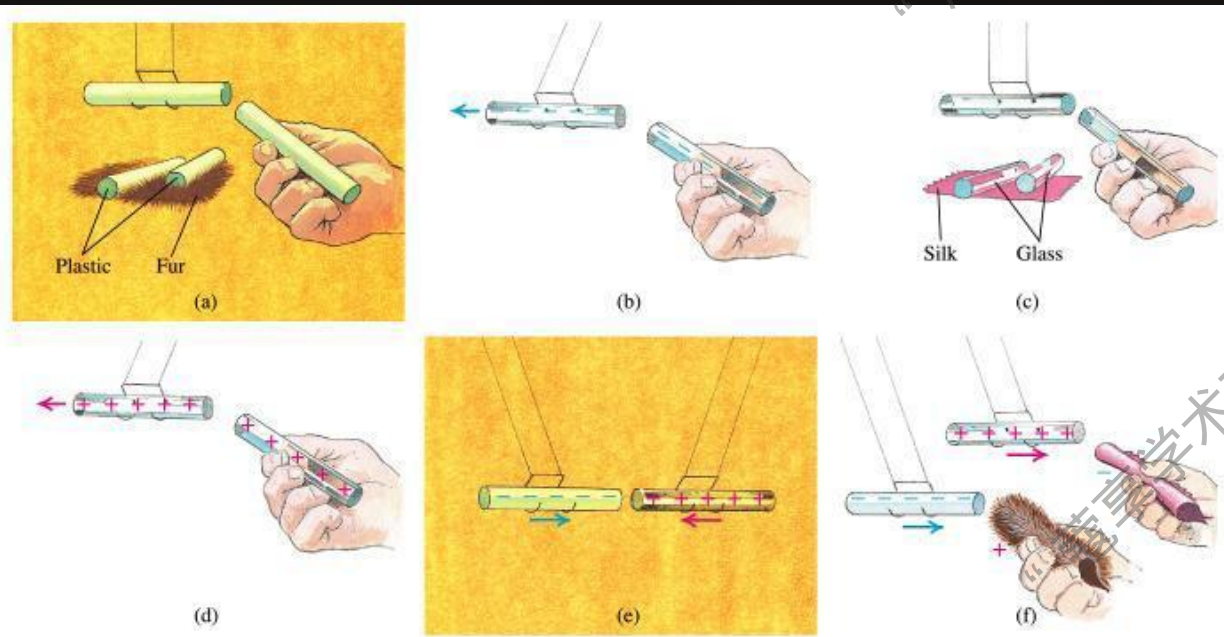
Electric Charge (荷上电)

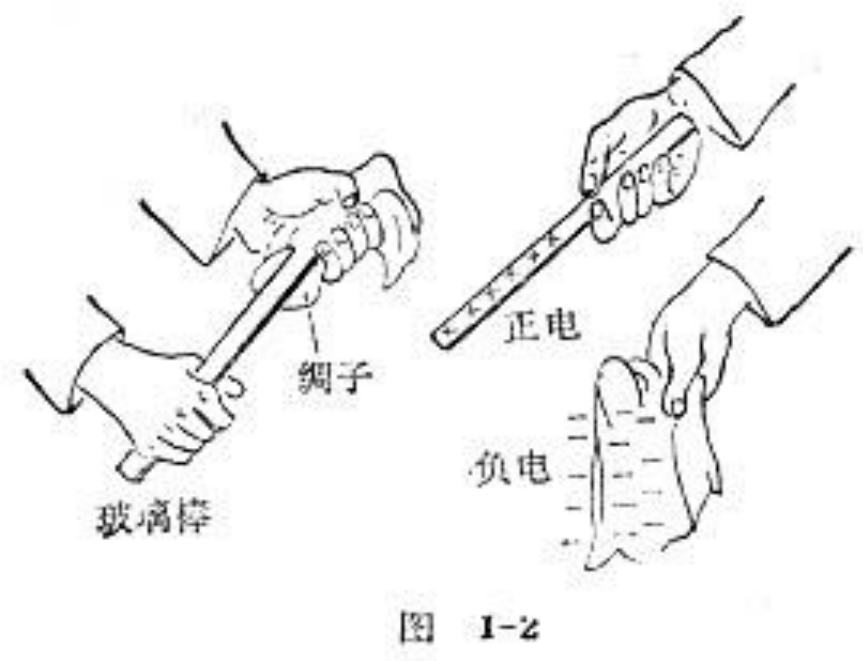
Charged with electricity, with **electric charge**.

如同, electron(琥珀) 那样带上了什么东西。
什么东西呢? 不知道哇!

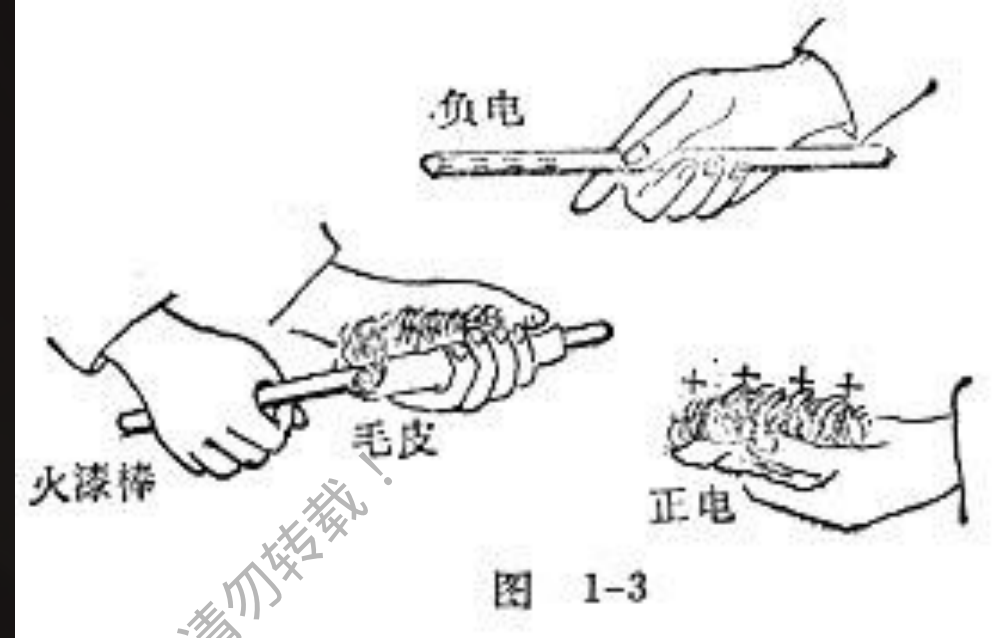
Vitreous electricity: positive 正的
玻璃电

Resinous electricity: negative 负的
松香电





摩擦从前是带电的唯一方式，很有效的方式



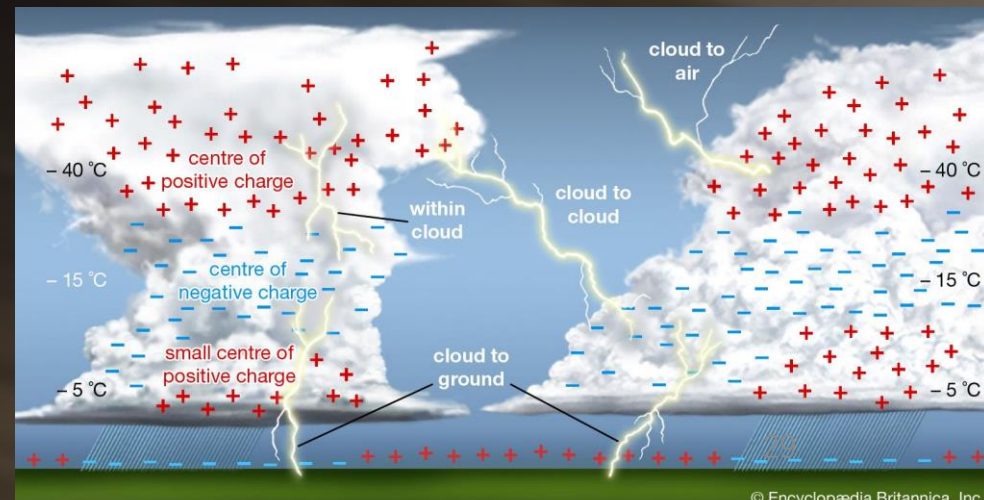
问：给你一种物质，你知道用什么物质摩擦能让它带上电？怎么带正电、怎么带负电？

问物理学家去？

答：你把物理学家当什么人了！

摩擦起电比你想象的更复杂。

再来个栗子：云彩是怎么带电的？上升的蒸汽同下落的软雹摩擦带电的？同一种物质，气液态呃。





Thales of Miletus (624BC—548/545 BC):
Friction renders amber magnetic—
electricity.

磁吸引无需摩擦。
电啥都吸引，磁可不是，但磁自然。

Magnes—Magnetite—磁石

1st century BC — Pliny in his Natural History records the story of a shepherd **Magnes** discovering the magnetic properties of some iron stones, “upon taking his herds to pasture, he found that the nails of his shoes and the iron ferrel of his staff adhered to the ground.”

The name **magnet** may come from lodestones found in **Magnesia**, Anatolia (今属土耳其).

Magnes 衍生词: Magnet (磁铁), Magnesium (镁), magnesia, Manganese (锰), manganate



牧羊人**Magnes** 包铁的杖头
会被一些石头莫名地吸引

Magnes—Magnetite—磁石

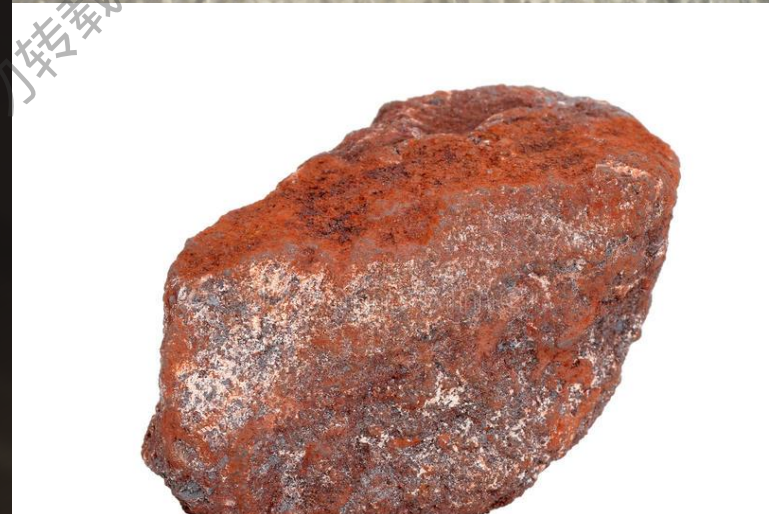
Lodestone (指路石), 磁化了的Magnetite,
天然磁石 (Μαγνήτις λίθος)

Lodestone: Magnetite Fe_3O_4 , inclusion of
Maghetite cubic Fe_2O_3 , 还有杂质。

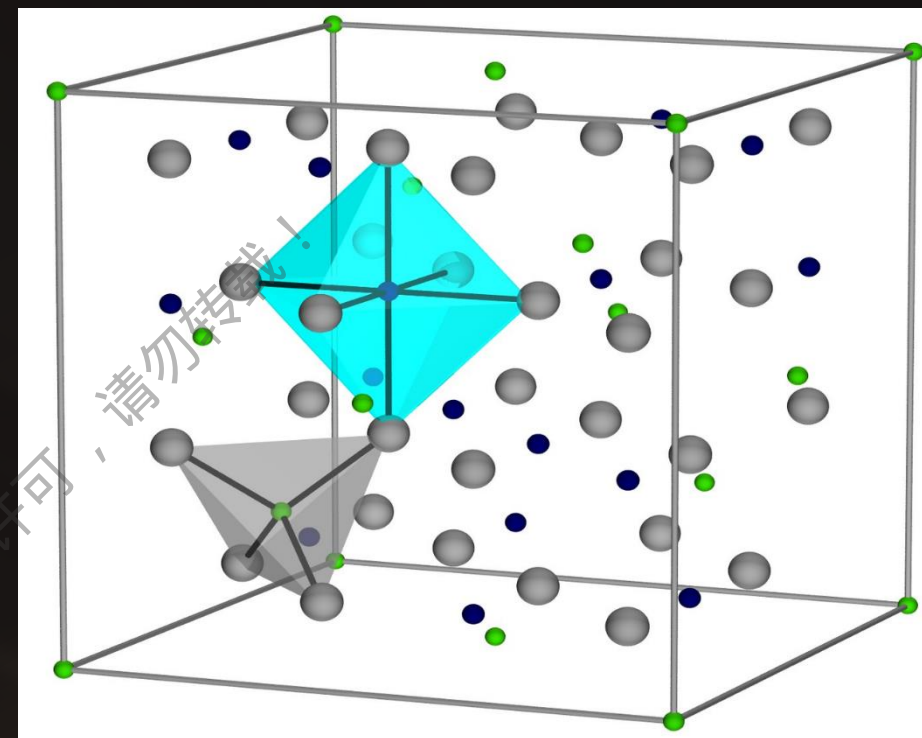
Magnetite Fe_3O_4 : 黑色 磁体

Maghetite cubic Fe_2O_3 : 红色 呈粉末状

另有FeO, 黑色方铁矿 (wüstite)
黄铁矿 FeS_2 , 愚人金, 也有磁性



磁石, Magnetite, 神奇之石



Spinel Magnetite, 磁石, Fe_3O_4
Space group: $Fd\bar{3}m$

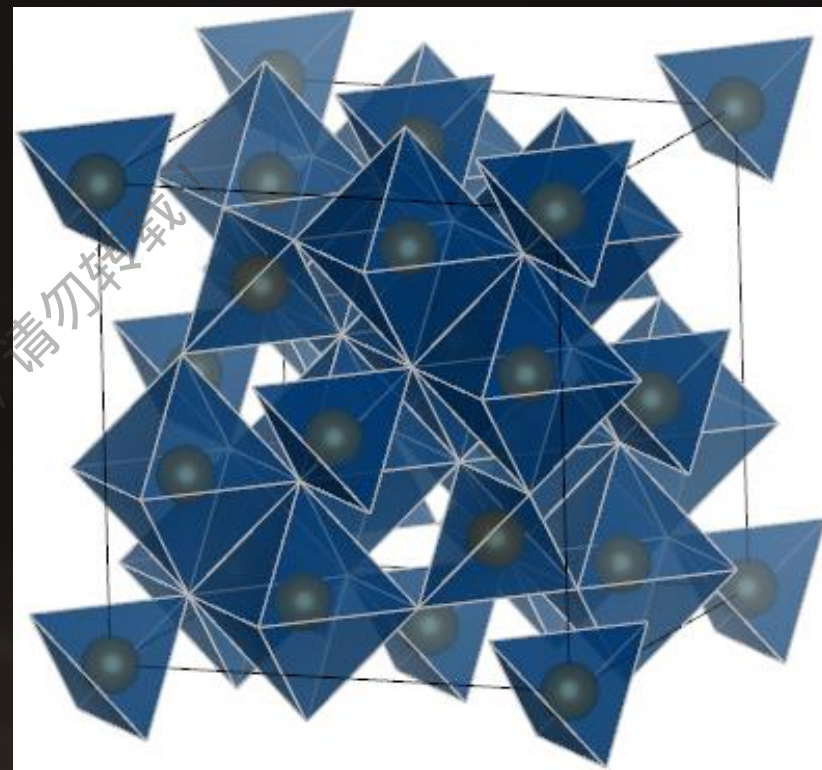
Magnes—Magnetite—磁石

Magnetite Fe_3O_4 , 每单胞48个原子

FeFe_2O_4 exhibits an inverse spinel crystal structure with cubic close-packed (fcc, face-centered cubic) oxide ions in its unit cell.

由晶格结构，计算该晶体的电子结构。

由原子实和共有电子能带结构出发理解磁性



Magnetite

慈—礞—磁—瓷

河北省 磁县

明《格古要论》中记载：“古磁器出河南彰德府磁州。”

磁县地处太行山东麓，多山地丘陵，富含煤、铁、锰、铅、石英、铝矾土。

《淮南子·览冥训》：若以慈石之能连铁也，而求其瓦（瓷，瓦器），则难矣。

京津冀都市圈区域图

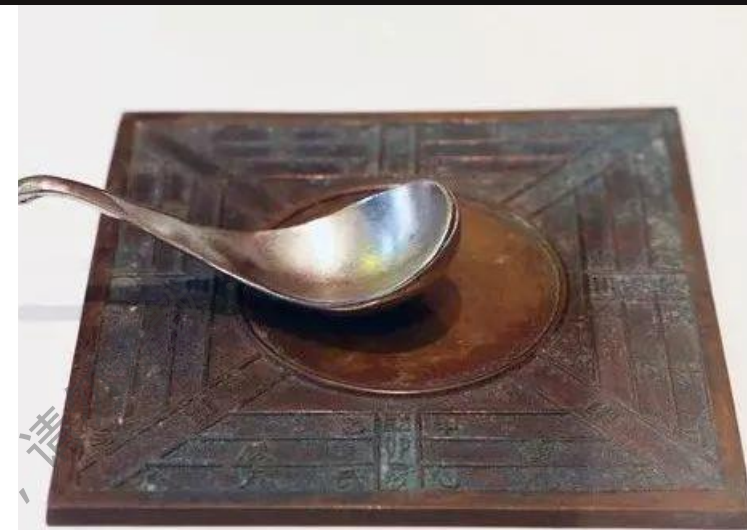
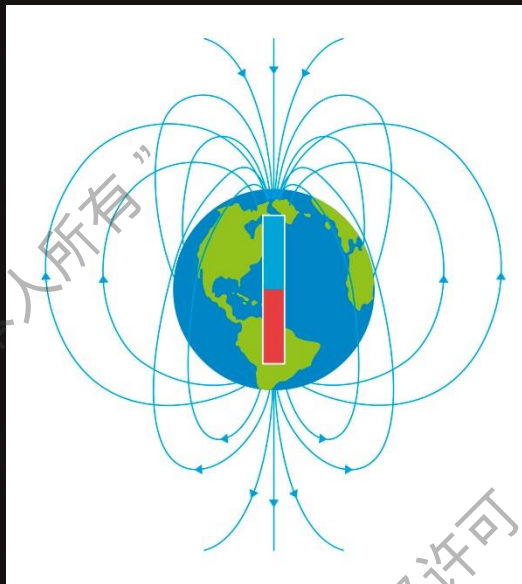


审图号：GS(2016)1610号

自然资源部 监制

Magnetite Magnus—大磁石

仪器： 原理，灵敏度，分辨率，动态范围，响应时间.....



汉代司南，磁勺？

方家以**磁石**摩针锋，则能指南。

其法取新纊中独**茧缕**，以芥子许**蜡**，缀于针腰，无风处**悬**之，则针常指南。

—沈括《梦溪笔谈》

不忍卒读！
后世西人的
torsion balance

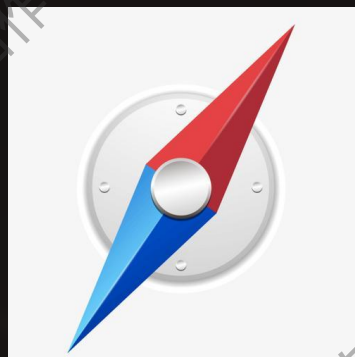
Lodestone, 指南针

吸引-转动

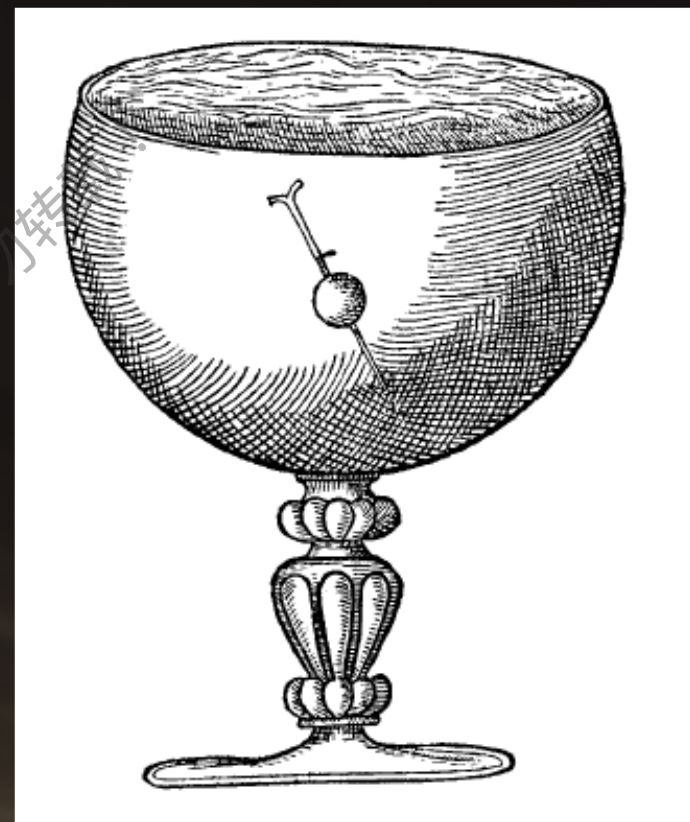
Lodestone, leading stone, 指路石

指南针

做成针形，悬挂(浮)，可指向



《梦溪笔谈》有悬浮、放在碗沿的做法，西方有把磁针塞在麦草里悬浮的记录。
用现代的说法，就是提高仪器灵敏度。**Michaelson-Morrey** 实验整个设备选在水银上



浮在液体里的磁针指示地磁场的指向

慈现象- 吸引

经典力学也始于
吸引现象



Analogous



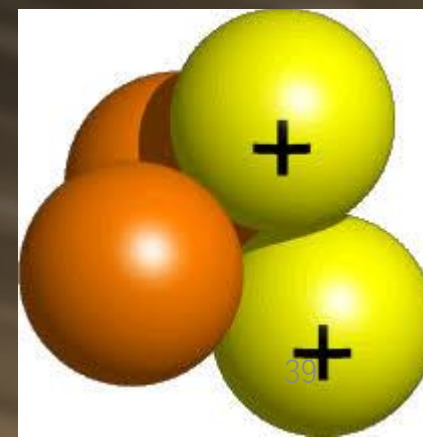
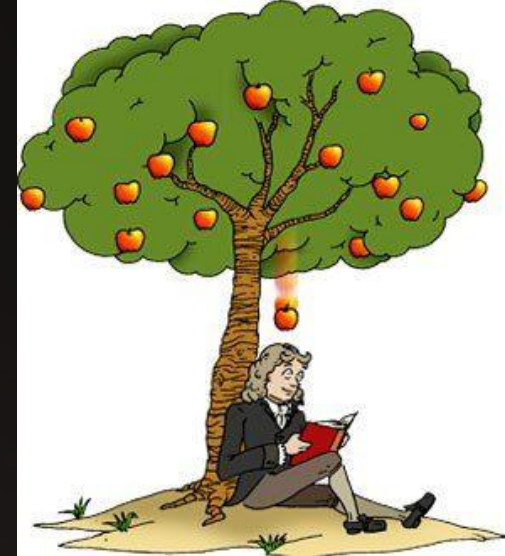
慈母更能表现吸引力

磁体吸引非磁的铁，带电体吸引非带电的物体，不是磁-磁，电-电作用。不是吗？

为什么(被)吸引容易注意到?

1. 距离变近, 局促感 $r \in \{0 \leftarrow a, \infty\}$
2. 作用强烈, 效果明显 $f \propto 1/r^n$
3. 运动包括平动与转动(磁), 转动在近处明显,
虽然转动终究是平动.

越不理解就越好奇. 一定要找出一个能说服自己的说法来, 那就是 Science

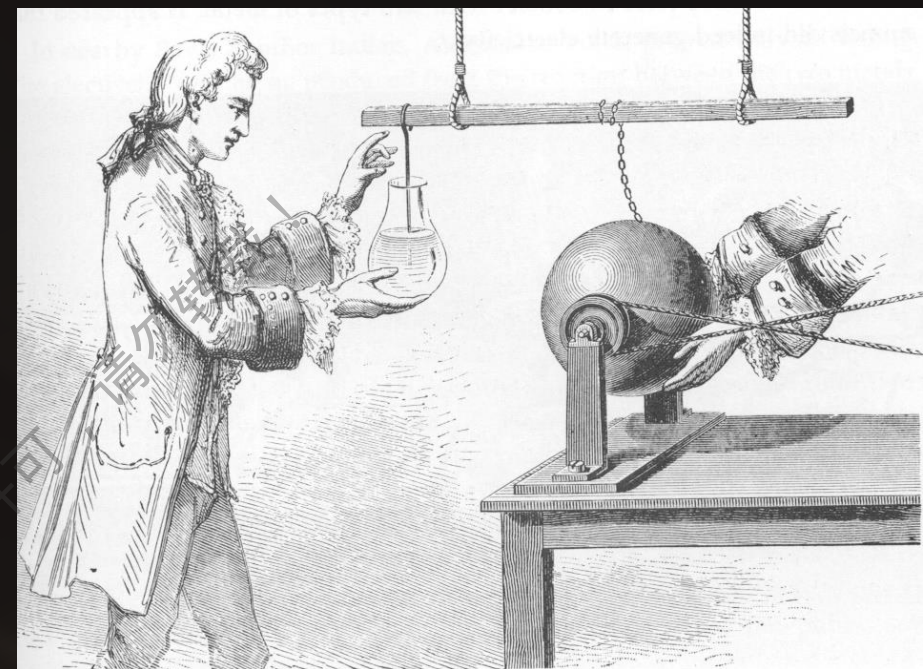
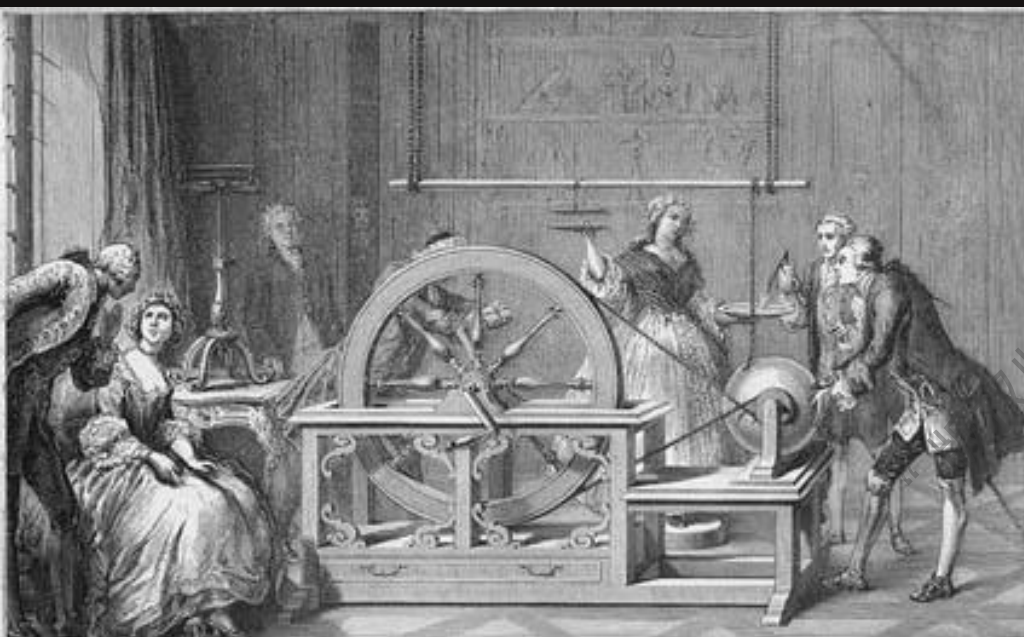


Otto von Guericke 1602-1686



Around 1650, Otto von Guericke built a crude electrostatic generator (1672): a **sulphur ball (硫磺球)** that rotated on a shaft. When Guericke held his **hand** against the ball and turned the shaft quickly, a static electric charge built up. This experiment inspired the development of several forms of "friction machines", that greatly helped in the study of electricity.

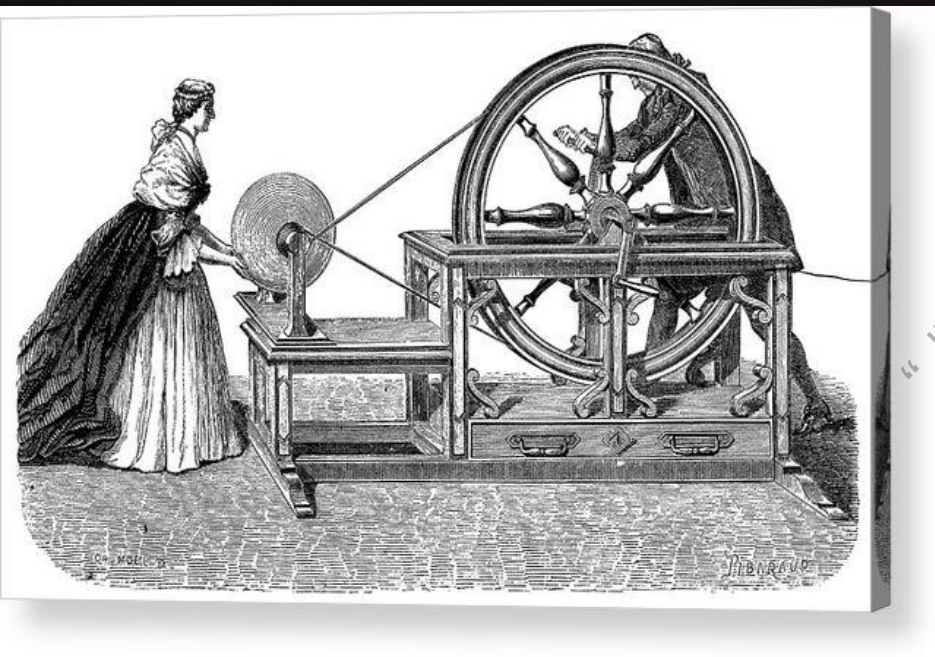
弄点儿电玩玩



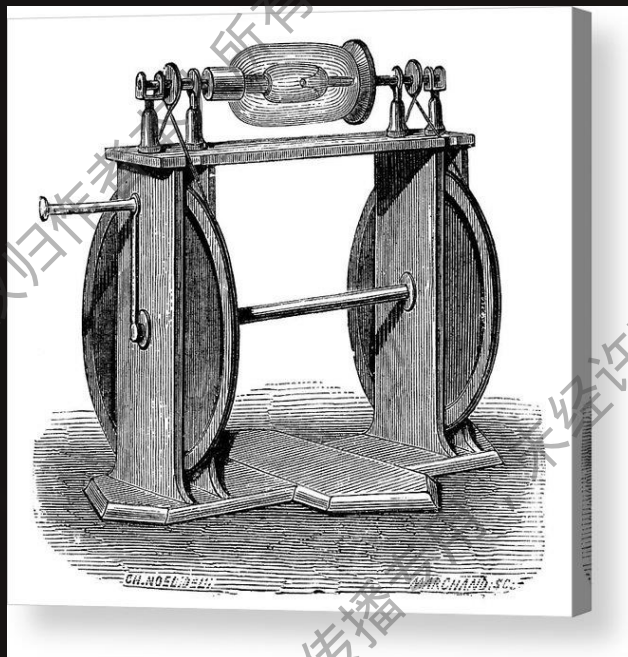
“Nollet” glass-globe style electrical machine (玻璃球起电)

In 1740 **von Bose**, a professor of physics at Wittemberg, substituted glass for the sulfur, and improved the rotating mechanism. He also suspended a metal cylinder above the globe by silk strings, with **a metallic chain to conduct the electricity** (电顺着金属链子跑了) from the globe to the cylinder. This form of machine is credited to the Abbe Nollet in the middle of the 18th century, but is simply a modification of the Bose machine.

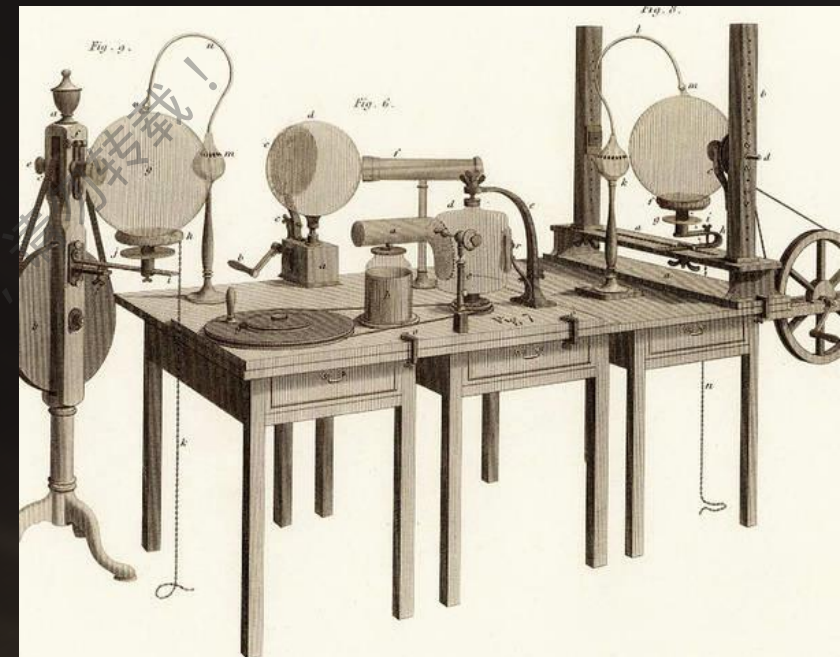
弄点儿电玩玩



Nollet Electrostatic Generator

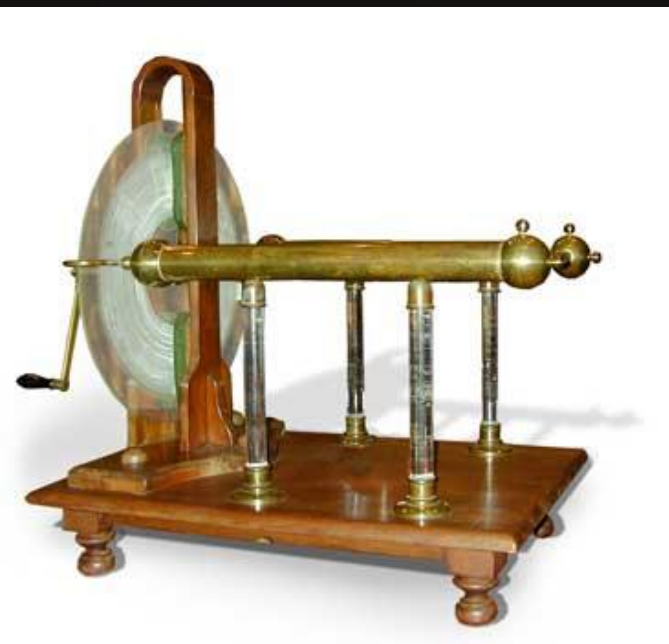


Hauksbee Electrostatic Generator

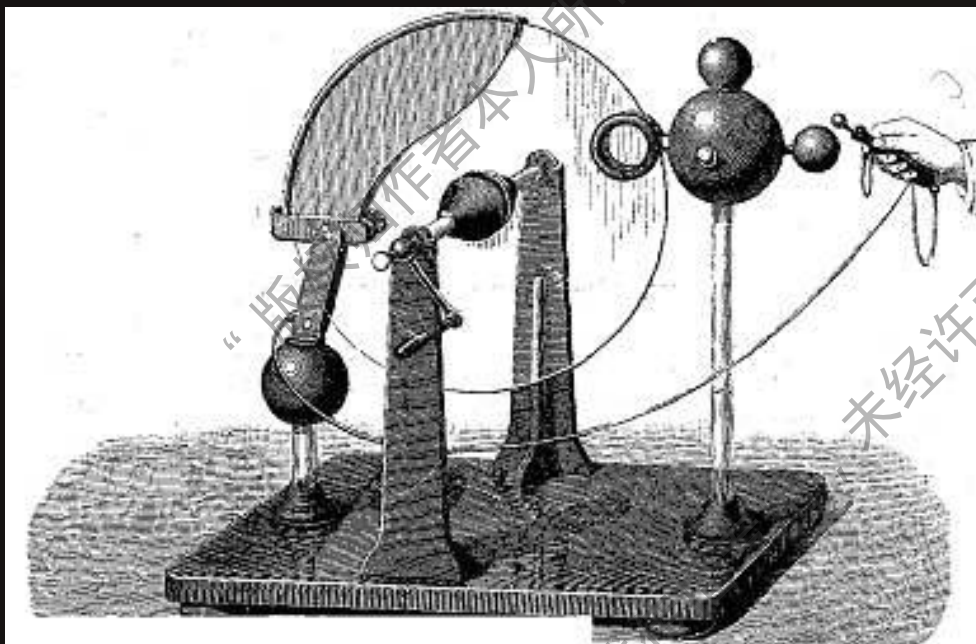


弄点儿电玩玩

In 1772 Le Roy, a French, constructed a glass plate machine with only one pair of pads; he had, however, two insulated cylindrical conductors placed horizontally at opposite ends of a diameter, one attached to the pads and the other to the metallic comb, thus he collected both kinds of charge (两种电都要). Winter, an Austrian, slightly modified Le Roy's machine.



Ramsden Friction
Machine, circa 1786

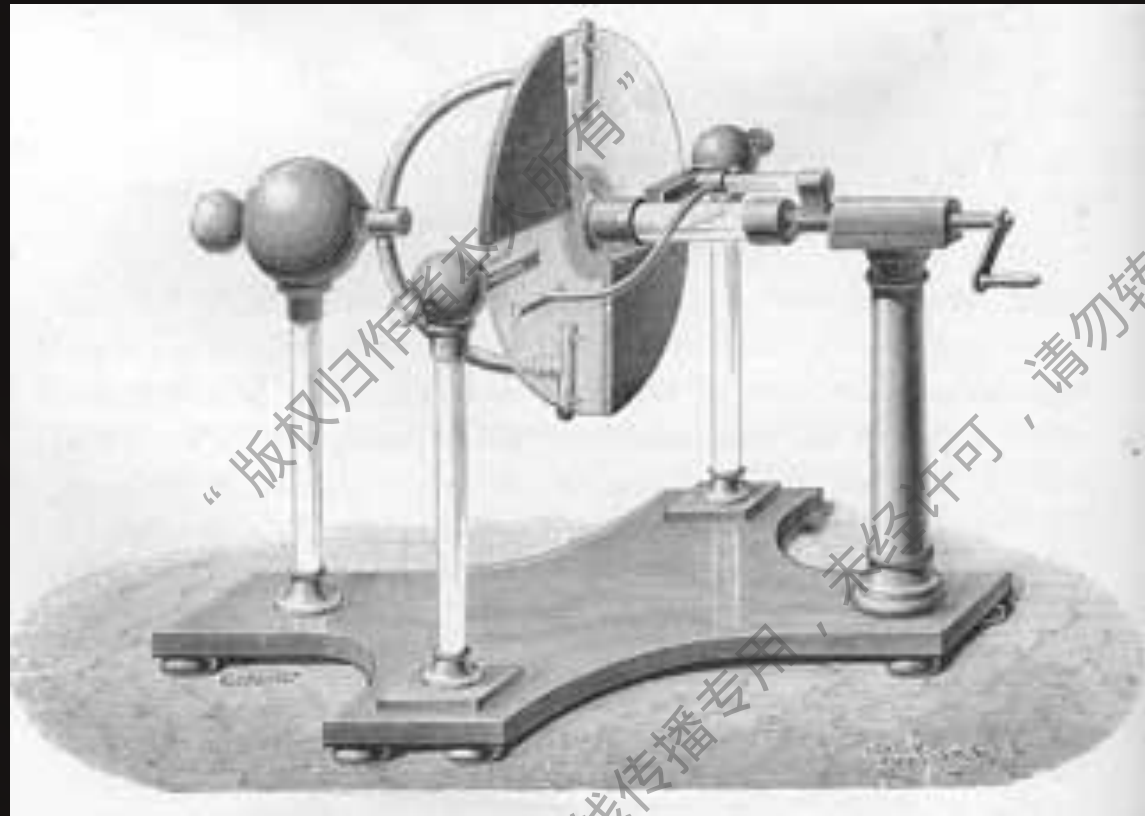


Winter's electric machine



Nairne's Electrical
Machine

弄点儿电玩玩

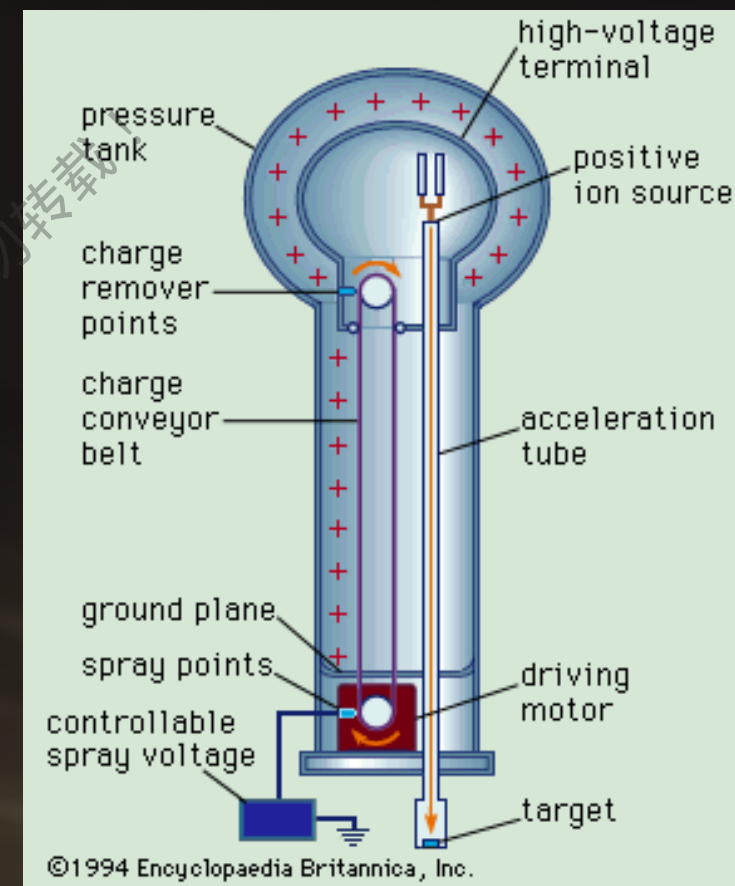
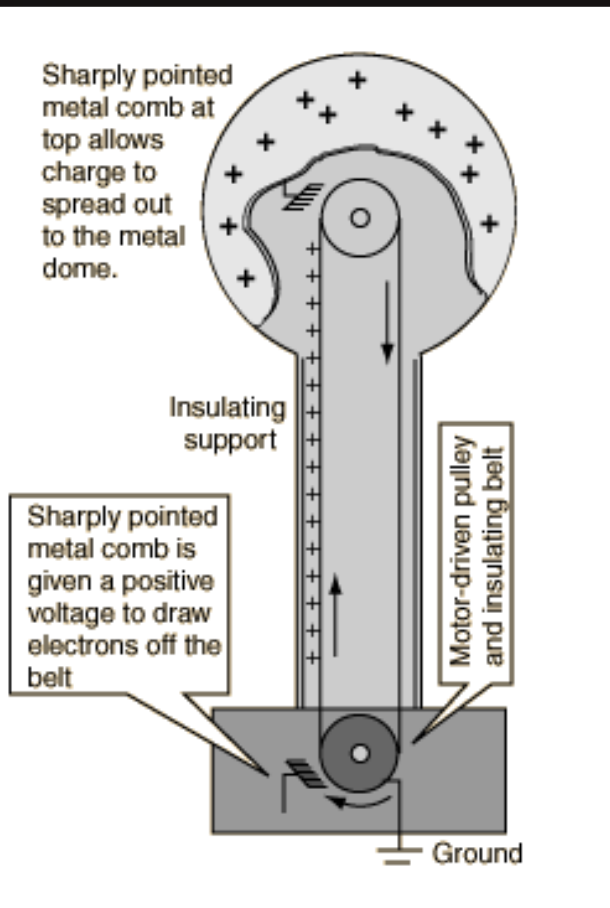


Van Marum Electrical Machine

可以收集正电荷或负电荷，或者两者兼收并蓄

多弄点儿电玩玩

Van der Graaf 静电发生器，
二分哲学：热机、飞机、CCD

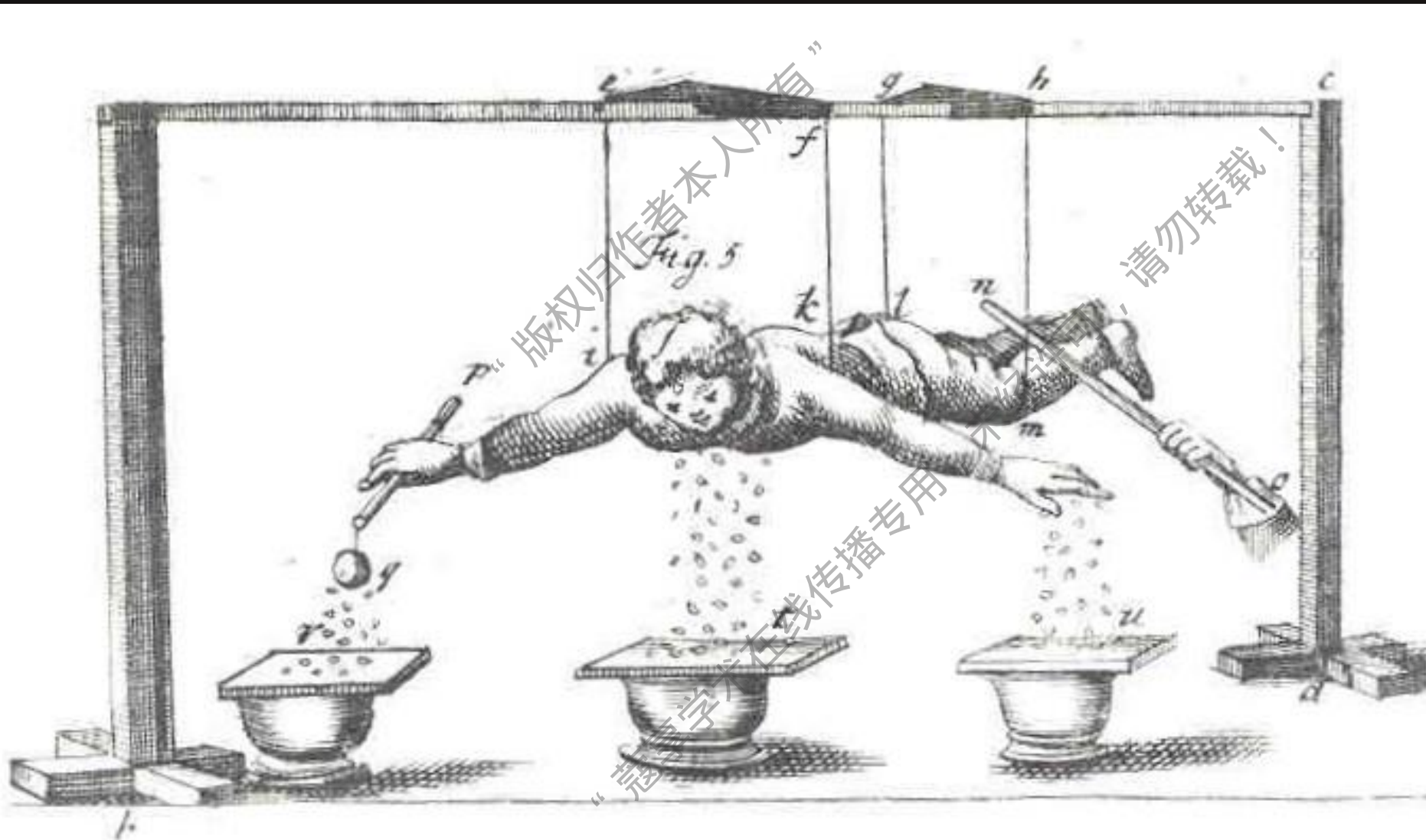


Robert J. Van der Graaf (美) in 1929, **5 MV**

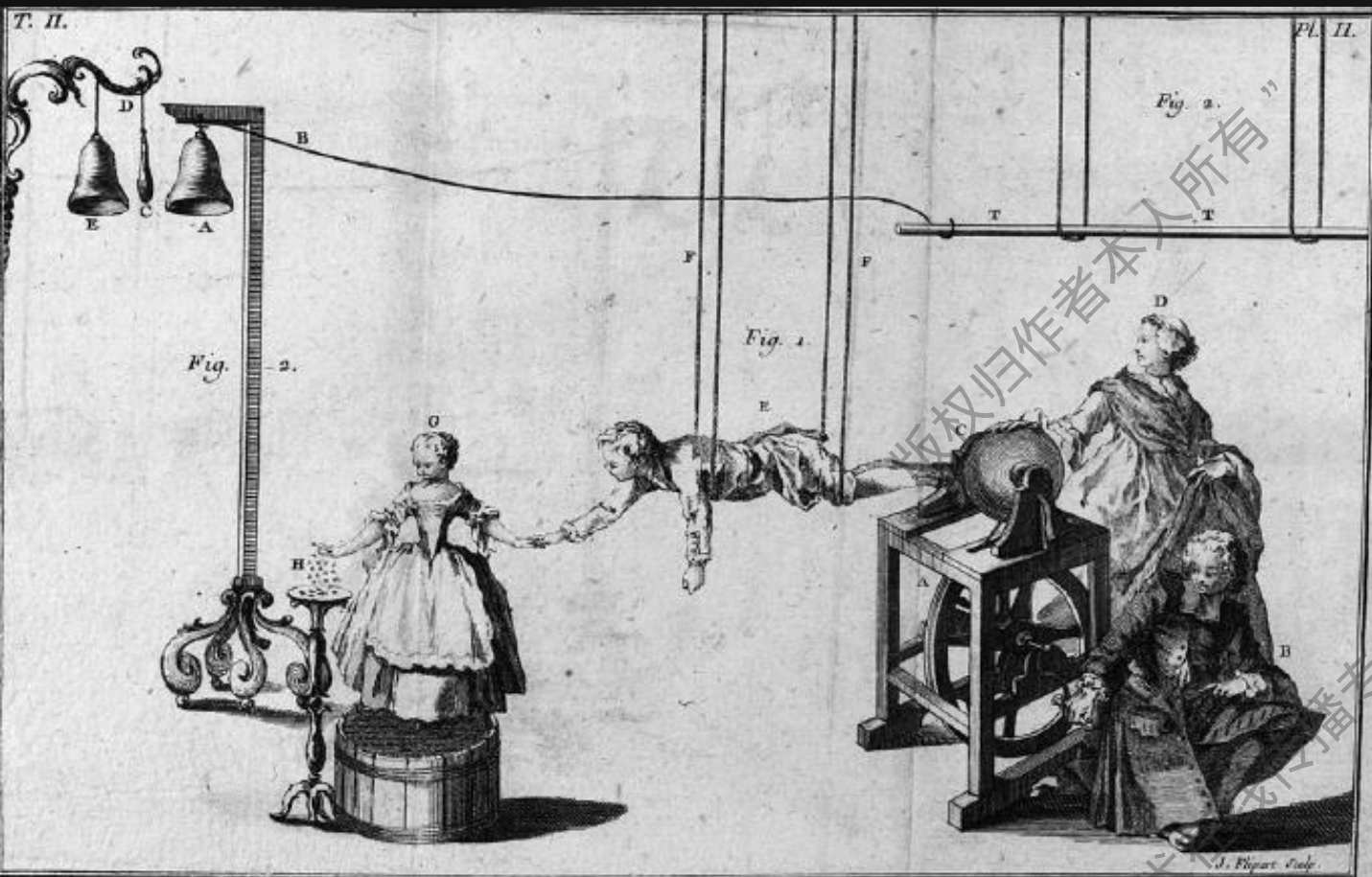
Van der Graaf 静电加速器

弄点儿电玩玩

玩魔术



弄点儿电玩玩



科学的社会传播

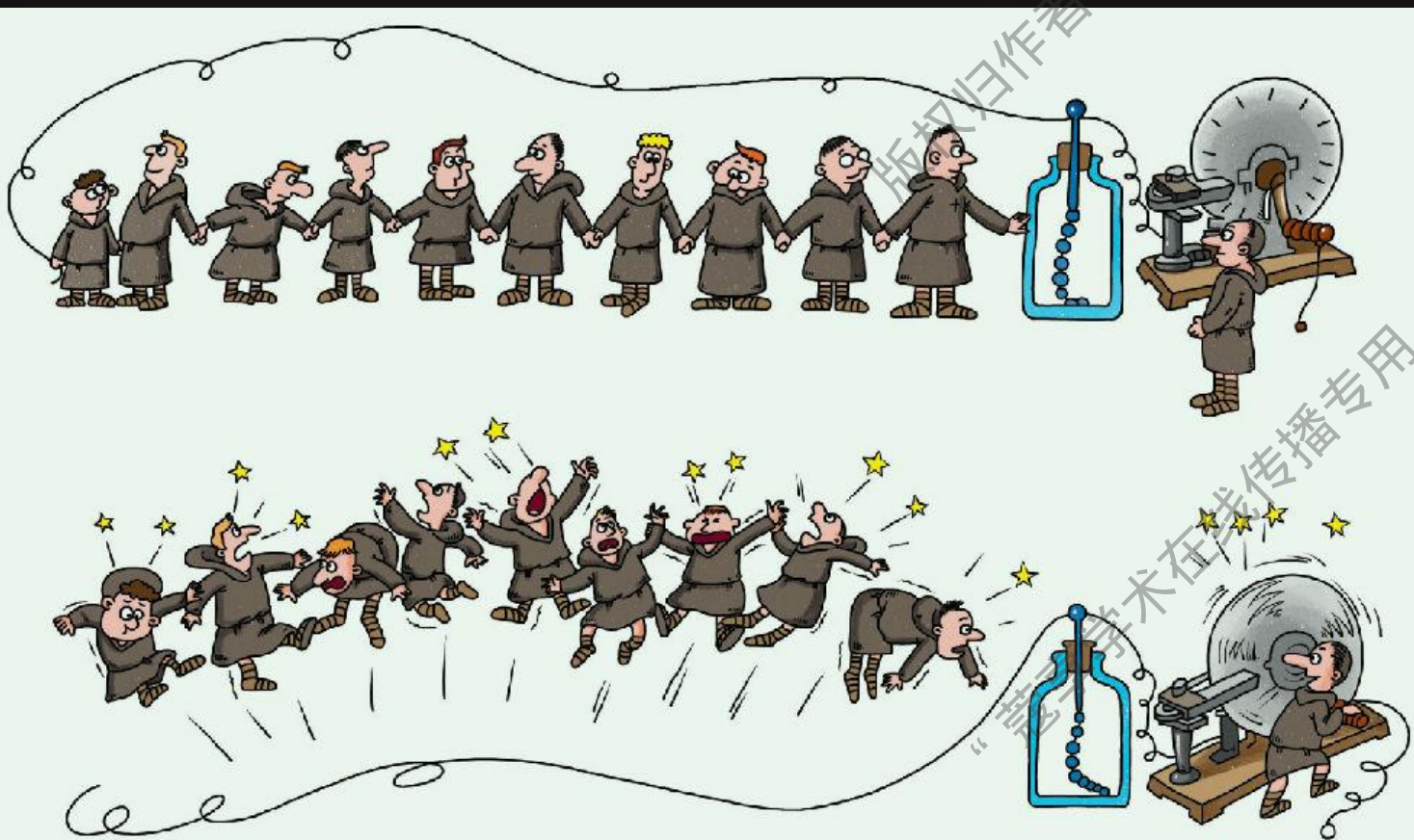
发现“电的人传人！”

电是能跑动的？电流

跑，courier, courir, current

法国，飞人传电。The flying boy experiment. On the right, a globe electrical machine: the lady electrifies the glass as the gentleman turns the wheel connected to the globe.

弄点儿电玩玩



电能乱跑，形成电流(electric current)

难道电是一种流体，flowing fluid?

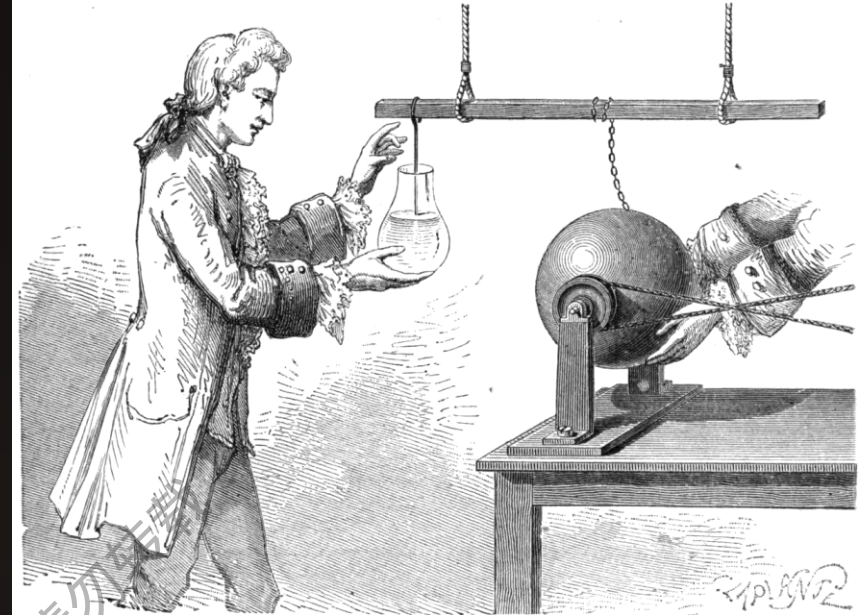
热不是流嘛，Calorique (热质说)

电估计也是流，Electrical effluvia

咋**逮**住点儿电 研究研究呢？

弄点儿电玩玩

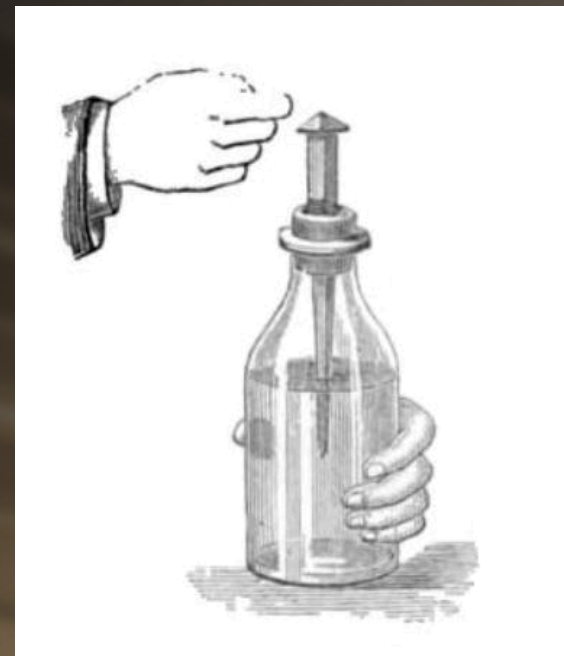
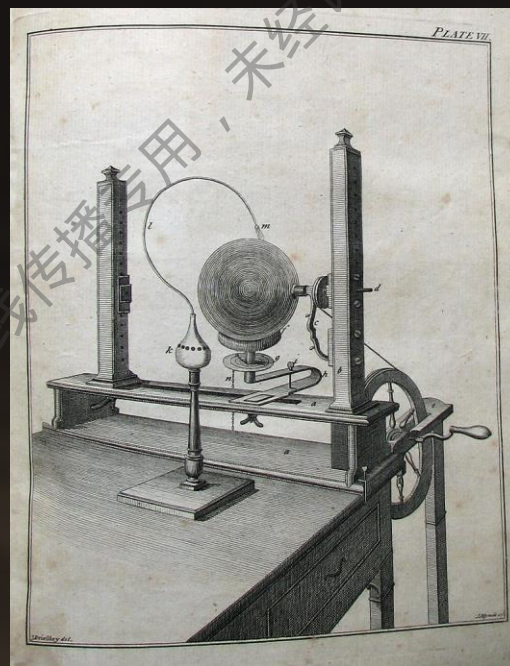
水是宇宙基本元素之一，水是流体。
水要有东西盛，所以文明的第一步是陶器时代。
电也是一种流体，a flowing fluid，那得弄个瓶子盛。



Early water-filled **Leyden jar**, consisting of a bottle with a metal spike through its stopper to make contact with the water.



观世音菩萨法器
净瓶+柳枝



弄点儿电玩玩

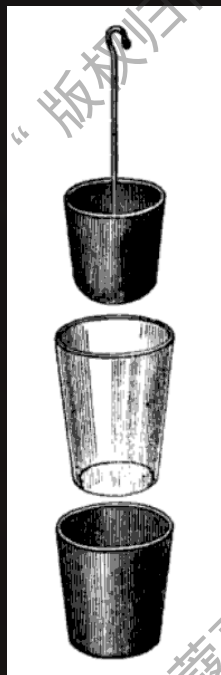
Leyden/Leiden, 荷兰一个小镇
莱顿大学**1575年建立**, 科学名家 Stevin,
Huygens, Van der Waals, Lorentz, Zeeman,
Onnes...皆出自该校

莱顿瓶 (Leyden Jar)

It was the original form of the capacitor, its discovery was of fundamental importance in the study of electrostatics



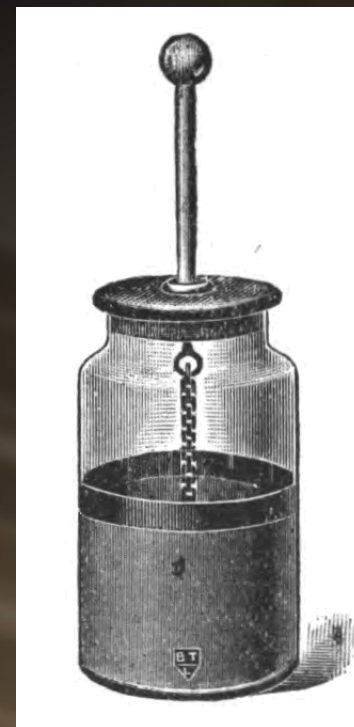
Early water-filled Leyden jar



Franklin, 1876

探索的问题:

电到底是储存在哪儿的?



using metal foil, 1919

弄点儿电玩玩

除了不让摸电门，我们还有什么电知识普及？

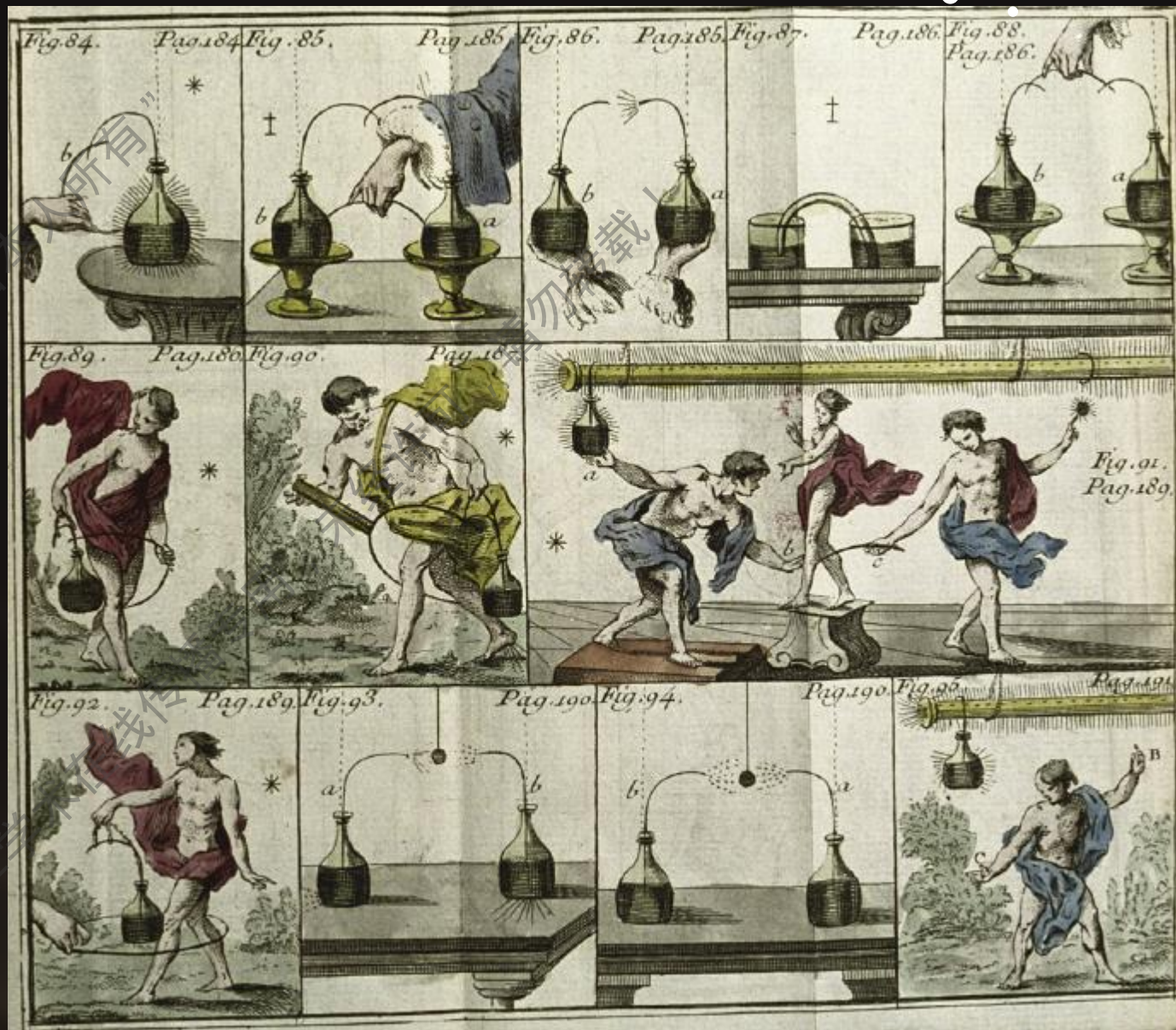
Experiments with the Leyden jar

弯曲板电容器

平行板电容器

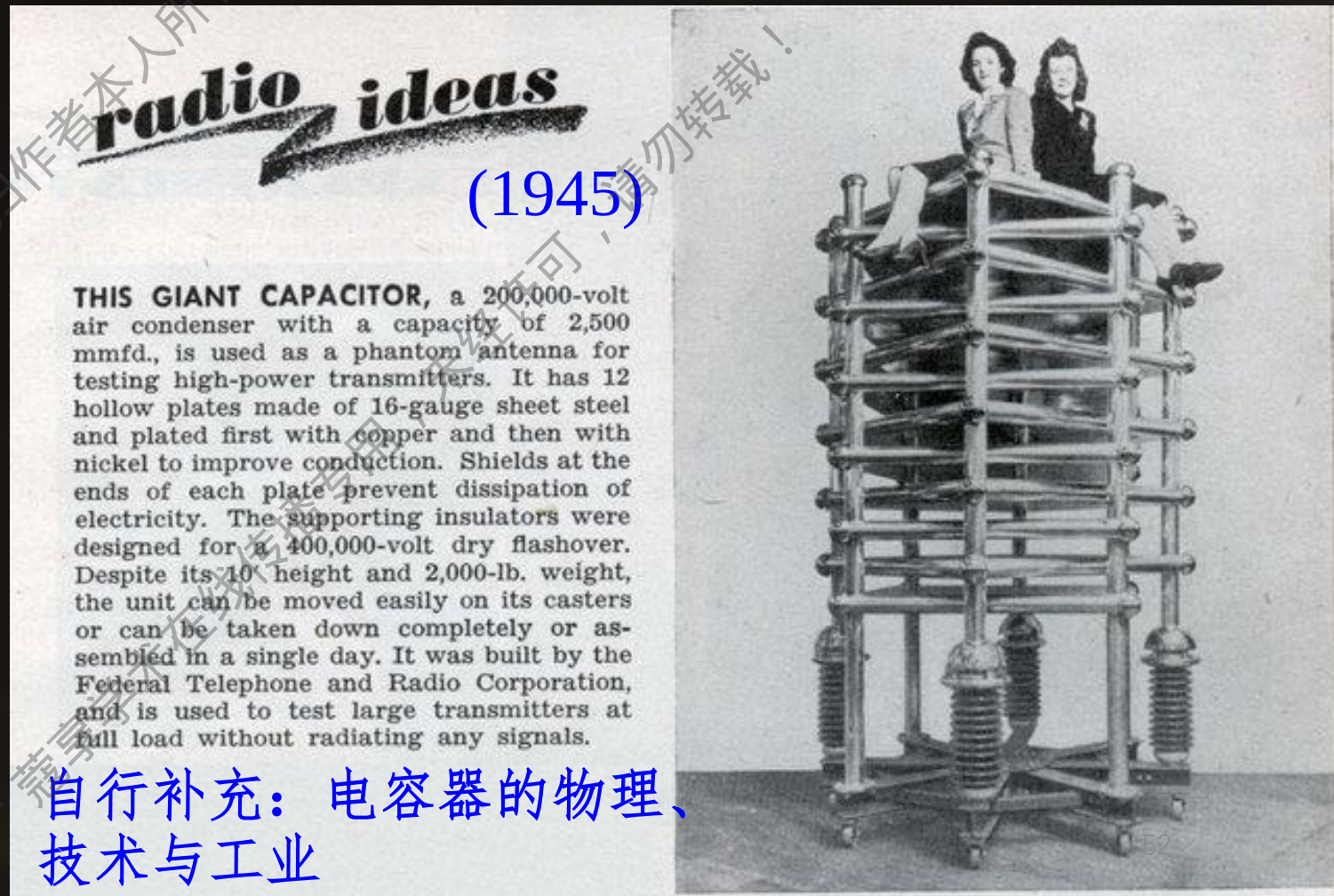
电 人见人爱

1767, Joseph Priestley termed electricity
'the youngest daughter of the sciences
(电是 科学的老闺女)'



弄点儿电玩玩

Making Giant Capacitor 制作超级电容



Electric Charge 是什么？

电荷 (electric charge), 荷电 (charging electricity)

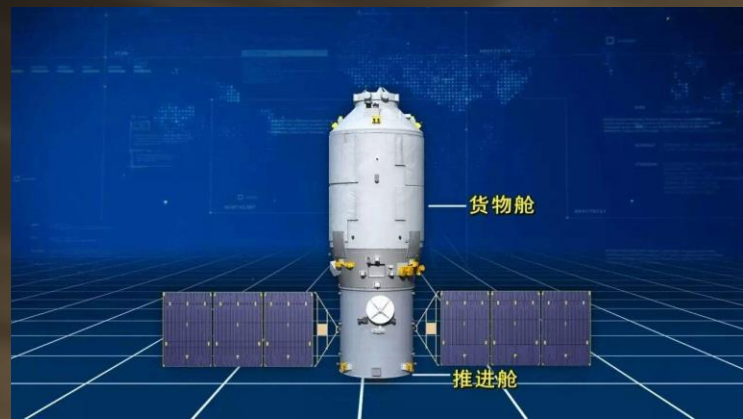
荷锄戴月归

小荷才露尖尖角

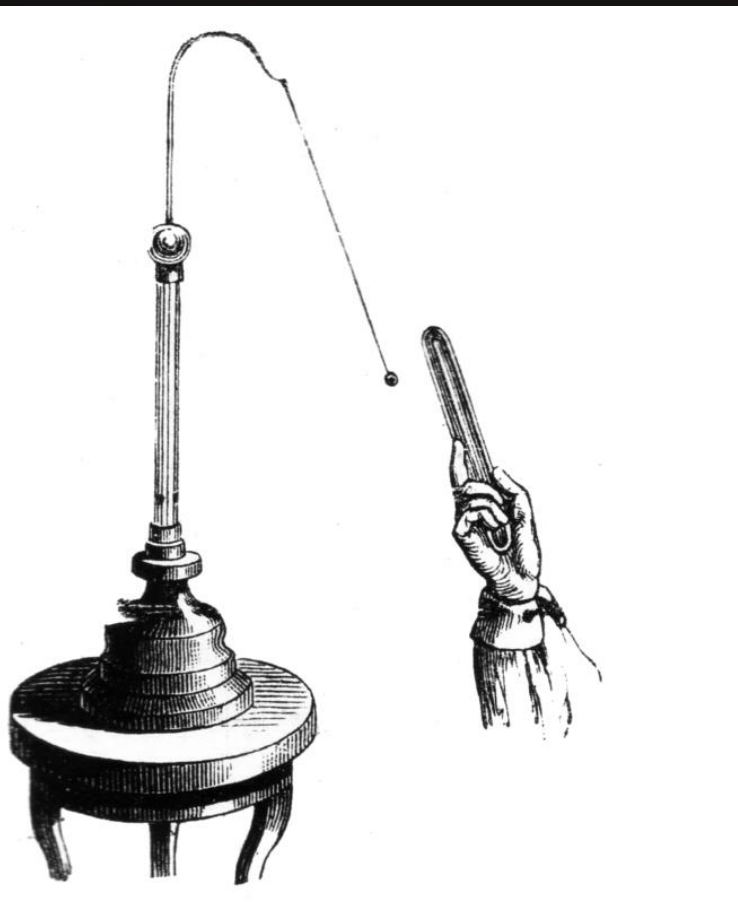
货运飞船的载荷

电荷，就是琥珀上被加载的那什么玩意儿。

荷电，类似中医的“上火”，是个具有普遍意义的解释。
啥是火？咋上的？不清楚。



你带电了吗？

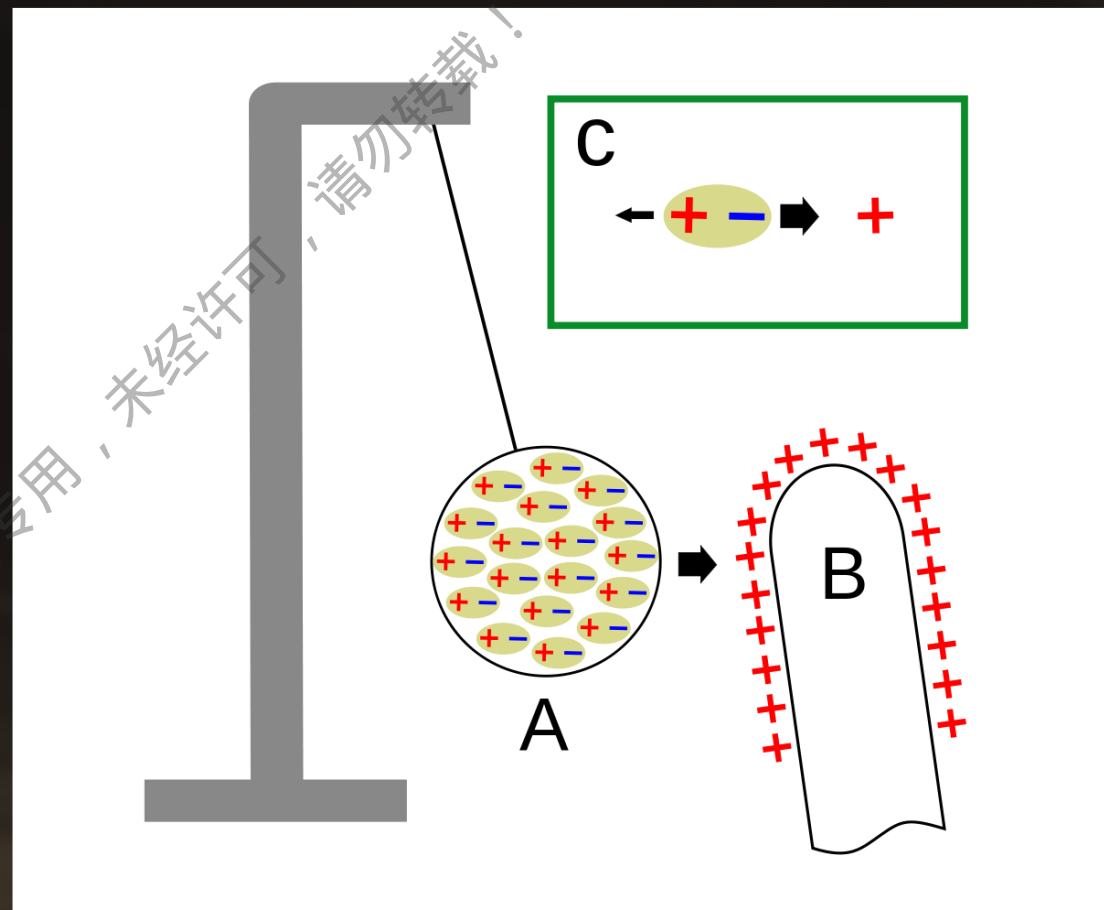


Pith Ball electroscope; Yes or no.

Electroscope & electrometer 验电器 & 验电计 Thermoscope & thermometer

如何计量？

才是物理课要教的



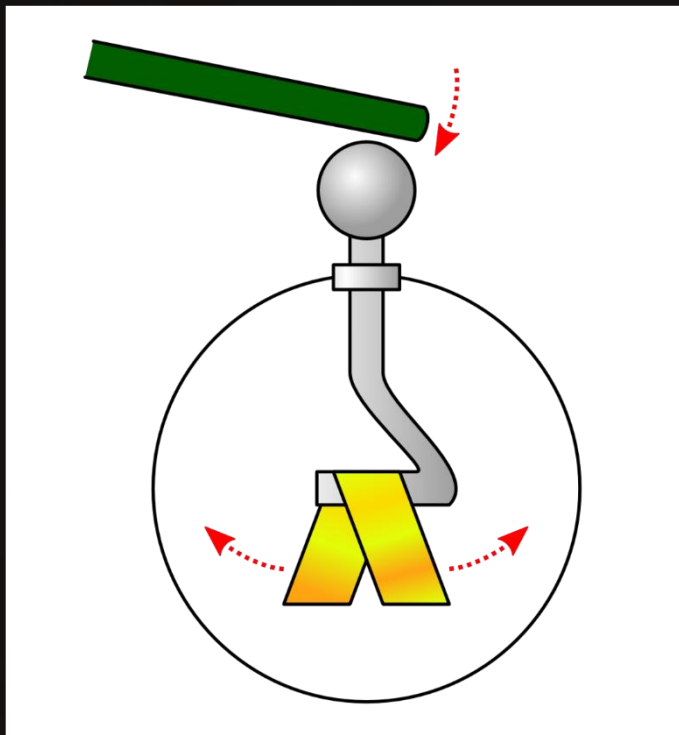
你带电了吗？

Electroscope & electrometer
Thermoscope & thermometer

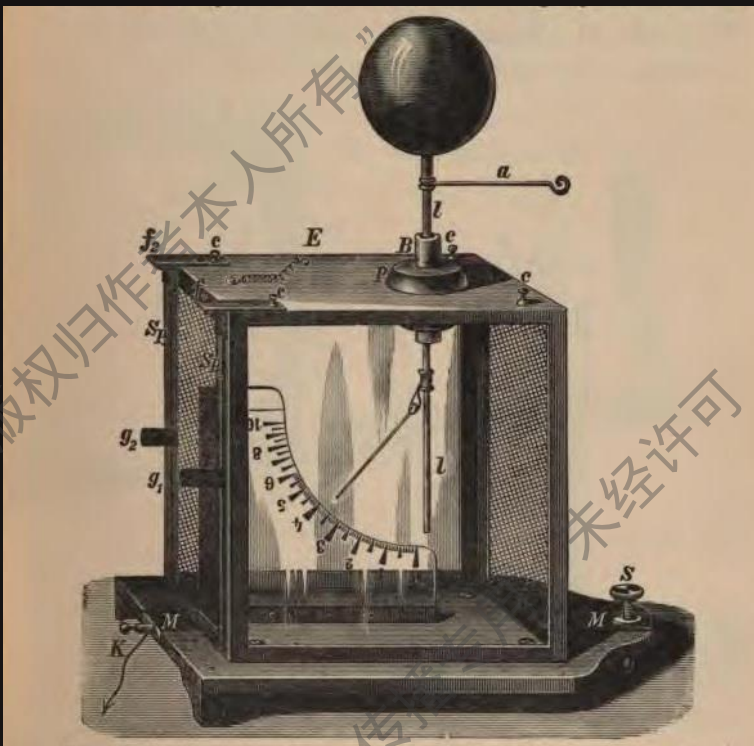


Coulomb Torsion Balance
库伦的扭称-卡文迪许加镜子
沈括的悬丝法

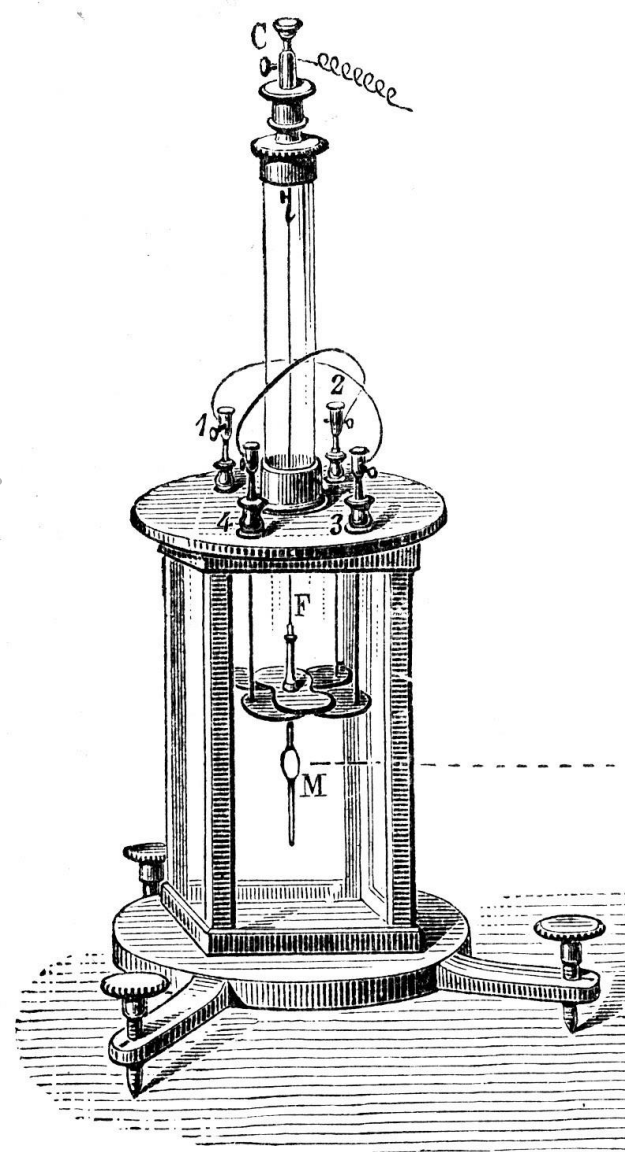
你带电了吗？



金子不轻，但 1.大自然有金子，是良导体； 2.金子有延展性，可以被捶打到纳米厚度； 3.熔点低，可以镀膜。



Kolbe electrometer



Lord Kelvin electrometer

悬挂带电金属薄片(Al),下面是四个对角相连的segments, 一对相吸、一对相斥(?), 故而会旋转, 由上面所粘贴的镜子给展现出来。

开尔文爵士之于精确电测量

开尔文男爵 (William Thomson, 1824-1907)

1842年把傅里叶处理热流的数学搬到电学领域。

1907年去世，葬于威斯敏斯特教堂。

Divided ring electrometer (1857);

Quadrant electrometer (居里夫妇采用);

发明电流称，确立电流单位 Ampere;

认为直流电传输比交流电优越

(爱因斯坦父亲企业选择直流电)



镜子电流表 (Spiegel galvanometer, 1858)

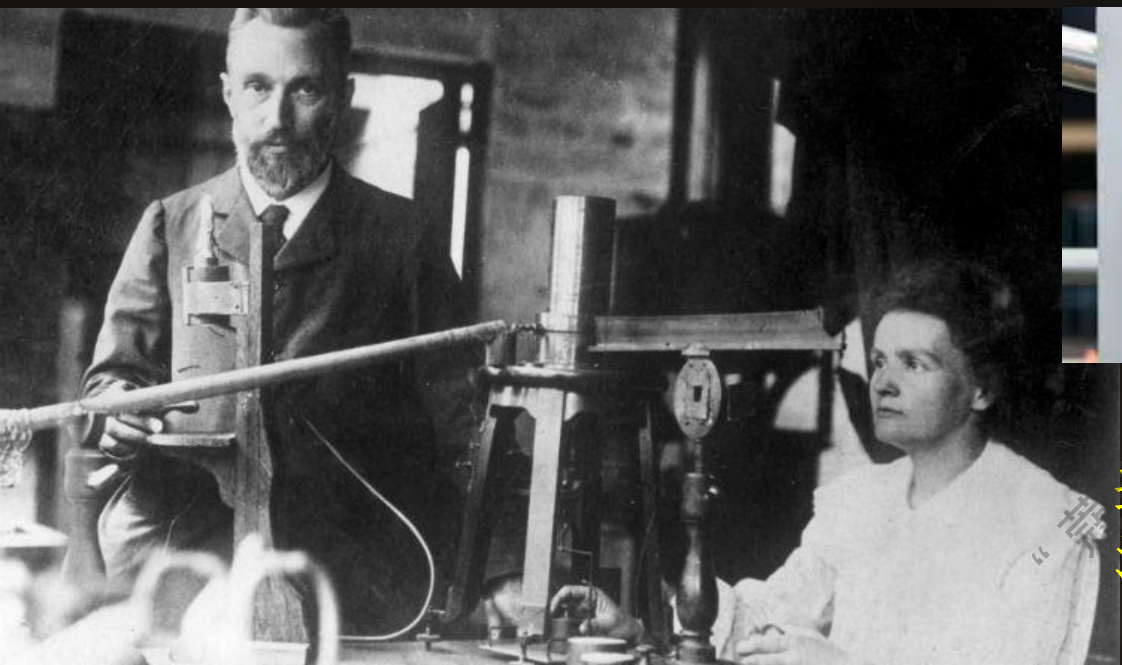
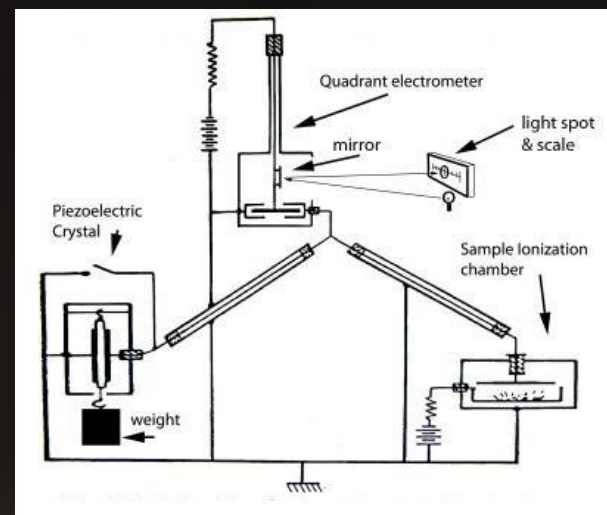
你带电了吗？

居里兄弟(Jacques & Pierre) 于1880年发现了压电性

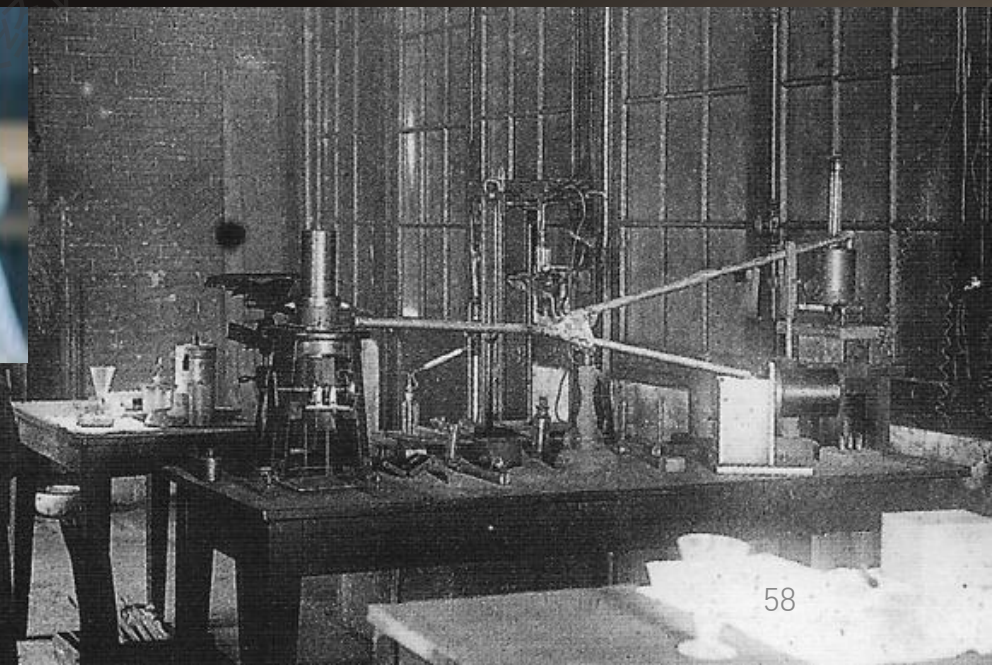
1898年制作了压电石英验电器 (Piezoelectric quartz electrometer)

原理： 石英带电与放射性物质离化空气产生的电进行补偿比较

居里夫妇用该设备(a miracle machine)成功实现放射性物质分离



这个实验设备/方法，可以写本书



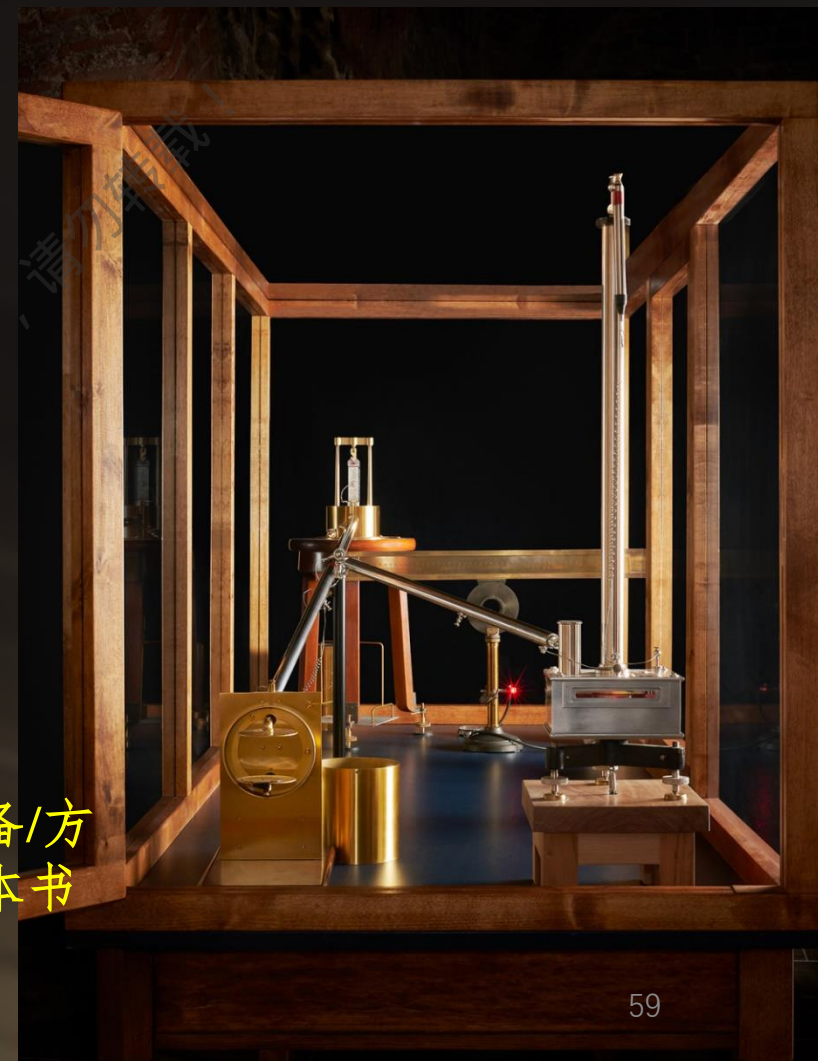
你带电了吗？

做实验的居里夫人

这张图里才有她做出成就的秘密



这个实验设备/方法，可以写本书



闪电是电？



The Electric Spark (电火花)
Louis-Léopold Boilly

Lightning is electricity.

闪电是电？



Benjamin Franklin 1850 建议
Thomas-François Dalibard 1852⁶ 尝试

闪电是电？



神话是 pre-
science



电母的放电装置：平行板

尖端还是镜面？
关于放电的学问



弄点儿电玩玩



《電经》一卷，哪儿去啦？

電(光)来自弦振动？

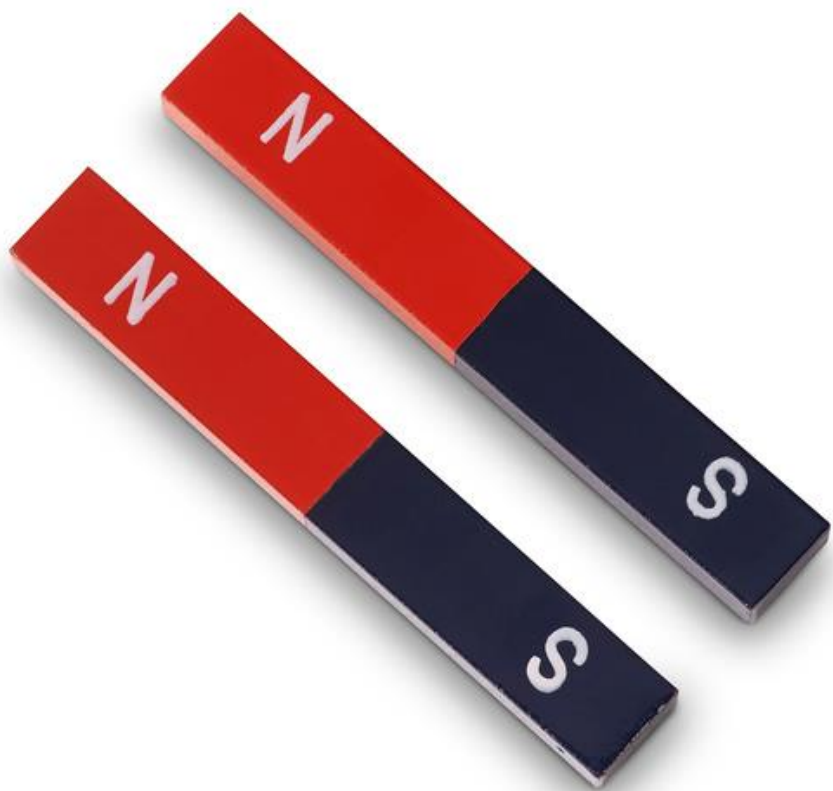
祖宗欸，你不是后来去启发
麦克斯韦了吧？

敦煌壁画

弄点儿磁玩玩

关于磁，很长时间里，除了把磁铁弄成马蹄铁的样子以增强吸引能力外，似乎没有什么进展

地磁测量是大事儿。



静电学 (electrostatics)

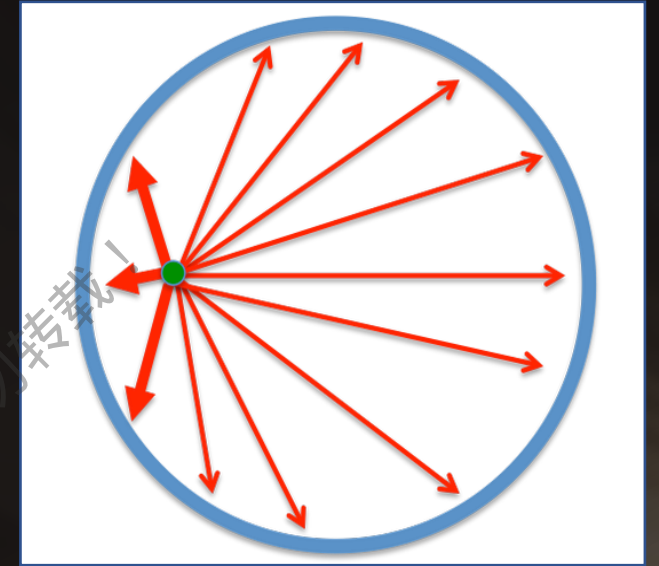


球壳与平方反比律

观察：空腔内侧无电荷

数学：质量球壳内无引力

类比：静电力、引力
都是平方反比的？



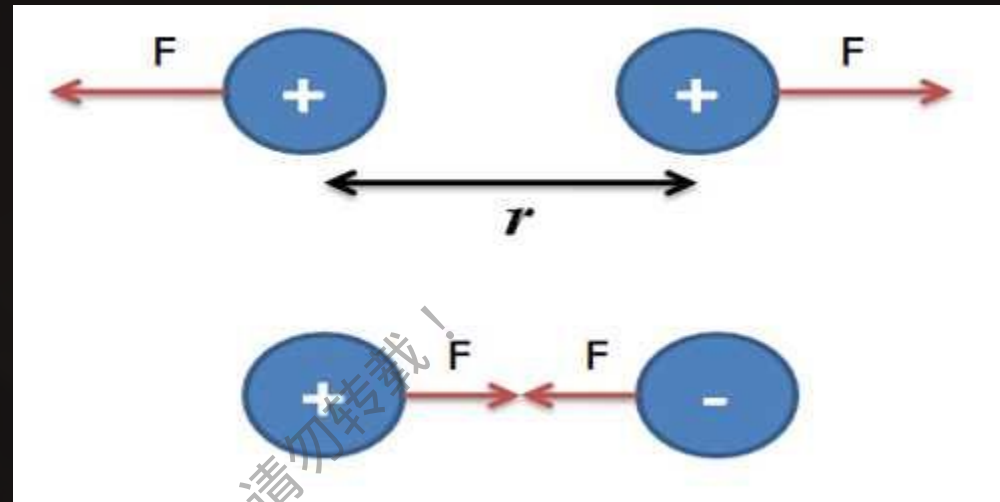
质量球壳内无引力

1766- **Joseph Priestly** (1733-1804), acting on a suggestion in a letter from Benjamin Franklin, shows that hollow charged vessels contain no charge on the inside and based on his knowledge that hollow shells of mass have no gravity inside correctly deduces that the electric force law is inverse square.

静电学 (electrostatics)

库伦定律~ 平方反比律, **1785**

Charles Coulomb (1736-1806)



$$F_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{r}_0$$

$$F_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^3} \vec{r}$$

2 是整数,
不是实数

1767 — Joseph Priestley proposes an electrical inverse-square law

1785 — Charles Coulomb introduces the inverse-square law of electrostatics.

$f = f(q_1, q_2, r)$ 该长什么样?

$$f(q_1, q_2, r) = f(q_2, q_1, r)$$

1. 关于 q_1, q_2 对称, 相互作用

$$q_1 + q_2? ; \quad q_1 q_2?$$

$$f(0, q_2, r) = f(q_1, 0, r) = 0$$

2. 三维空间中的随距离衰减

$$f(q_1, q_2, r \rightarrow \infty) = 0, \quad f \propto \frac{q_1 q_2}{r^n}$$

三维空间选 $n=2$, $\vec{f} \propto \frac{q_1 q_2}{4\pi r^2} \vec{r}_0$

3. 加个比例因子配量纲

两侧配好量纲, $\vec{f} = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{4\pi r^2}$, This is Coulomb force.

为啥势能 $\varphi = -\frac{1}{\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{4\pi r^1}$, $n=1$. 它是标量。

库伦定律分析

$$F_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{r}_0$$

1. 相互作用

$$F_{12} \propto q_1 q_2$$

$$f \propto \frac{q_1 q_2}{r^{2+\delta}}$$

这个世界可以没有物理，
但不会有这种物理

2. 随距离衰减

随球面积衰减 (流)

$$F_{12} \propto \frac{1}{4\pi r^2}$$

3. 加个比例因子配量纲

$$F_{12} = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{4\pi r^2} \vec{r}_0$$

不过是牛顿万有引力旧事

$$F_{12} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{r}_0$$

库伦定律分析

电荷对其他电荷的影响，仿佛是一种魅力的散发。

关注自身可否？

引入电场(矢量)的概念，一种向外radiate的流体似的。又可名为电通量密度。

与 q/S 成正比， $S = 4\pi r^2$ 是球壳面积

$$F_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{r}_0$$

$$F_{13} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_3}{r^2} \vec{r}_0$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{q}{4\pi r^2} \vec{r}_0$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{q}{S} \vec{r}_0$$

电的通量密度—库伦公式—高斯定理

设想电荷往外辐射什么，如同灯罩 (完全透明)罩住了灯

则两层灯罩上该通量的总和为0, $\mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{q}{4\pi r^2} \vec{r}_0$

$$\int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = q/\epsilon_0$$

进而若是一个电荷分布，有 **高斯定理**

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$$

还反映了两层灯罩之间是单纯存在的事实

$$\int_{S_1, S_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_{Shell} \nabla \cdot \mathbf{E} dV = 0$$

这些知识的源头是**物理学第零定律** (物理空间是3维的),
守恒定律以及认定通量密度是个有方向的量



灯罩只要闭合罩住光源
就好，是什么形状、是
凸是凹不重要
这里的积分都成立



物理学第零定律：

物理学，为你讲述三维空间里的故事！

物理学第零定律修订版：

物理学，为你讲述 $(3, 1)$ -时空里的故事！

请学会关于球的数学：球(面)空间，球安装函数，球坐标系，球波，球变换.....

三维世界-球-球壳

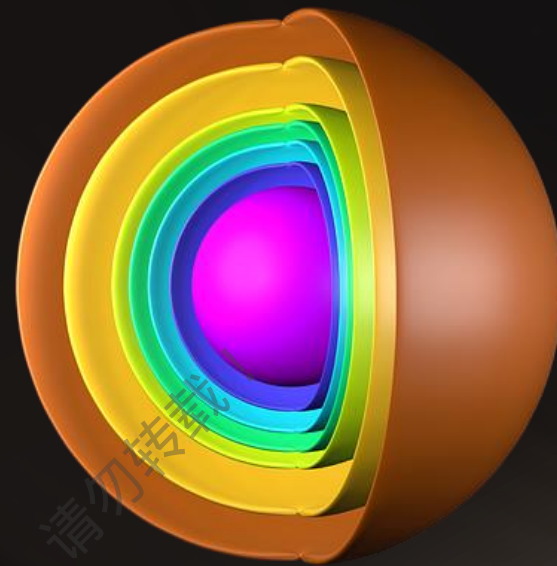
三维世界 + 各项同性 (各项同性)
平方反比律是一种必然。

球壳面积 $S = 4\pi r^2$

球壳微分 $dS = r^2 \sin\theta d\theta d\varphi$

点状物发射的流

通量密度 $E \propto \frac{1}{4\pi r^2}$



球(壳)模型

热力学: Dulong-Petit's law $\rho = \sigma T^4$

原子模型: Thomson model- 铺排问题

狭义相对论: 球波 (spheric wave) 变换
i.e., Lorentz Transformation

势理论 Potential theory

Aristotles 当年即用act和potency 描述物理过程

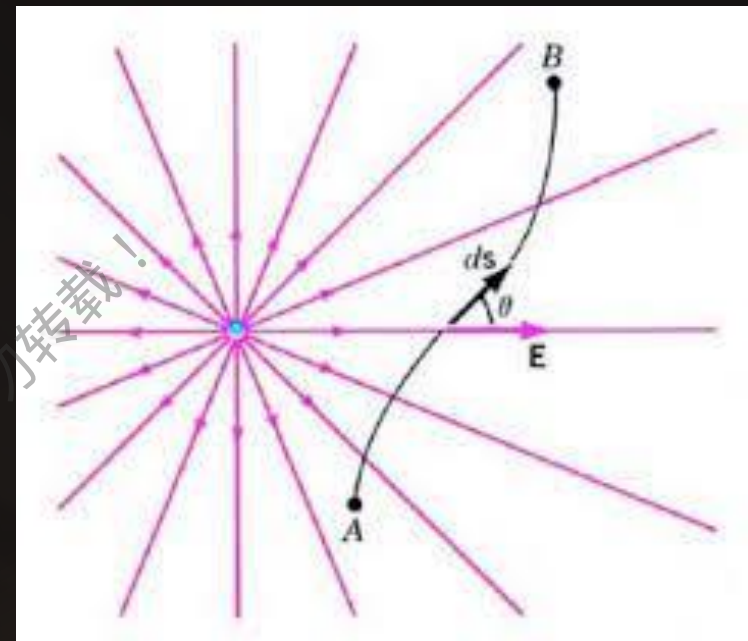
Ενέργεια (energia), act, 动, 乾(自强不息)

Δύναμις (dynamis), potency, 潜、势, 坤(厚德载物)

势：引而不发，跃如也。

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{q}{4\pi r^2} \vec{r}_0 \rightarrow \varphi(r) = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{q}{4\pi} \frac{1}{r}$$

可算术相加



$$\int_{x_1}^{x_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{x} = \varphi(x_1) - \varphi(x_2)$$

$$\mathbf{E} = -\nabla \varphi$$

静电学 (electrostatics)

视角与物理

一个电荷在它者眼中散发着魅力

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{q}{4\pi r^2} \vec{r}_0$$

一个电荷眼中的世界处处都是诱惑

$$\mathbf{f} = q \{E(q_1, r_1) + E(q_2, r_2) + \dots\}$$

上帝视角下 一团乱哄哄的电荷

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i q_i \sum_{j \neq i} q_j / r_{ij} = \frac{1}{2} \sum_i q_i \varphi_i$$

势理论 Potential theory

势理论 是为引力发展起来的

引力和静电都是平方反比律，但后者因为**电荷的极性**而复杂



Laplace equation: $\nabla^2 \varphi = 0;$

Poisson equation: $\nabla^2 \varphi = -\rho$

拉普拉斯曾跟皇帝拿破仑说：我不需要那个假设！
Je n'avais pas besoin de cette hypothèse-là.

Pierre-Simon Laplace (1749-1827)

关于经典力学：Newton, Euler, Laplace, Lagrange, Hamilton, Jacobi, Hertz...

势理论 Potential theory



Siméon Denis Poisson (1781-1840)

拉普拉斯拿泊松当亲儿子似的

Laplace equation: $\nabla^2 \varphi = 0$;

Poisson equation: $\nabla^2 \varphi = -\rho$

传承!

泊松方程的解 $\varphi = \iiint_{\Omega} \frac{\rho}{4\pi r} dV$

写成严肃正确的表示: $\varphi(r) = \iiint_{\Omega} \frac{\rho(r')}{4\pi |r-r'|} d^3 r'$

看出卷积、格林
函数方法没?

老师, 请学着教学生怎么看公式

关于静电的 Naïvité

$$F_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{r}_0$$

1. 异性相吸，平方反比，越密越亲？

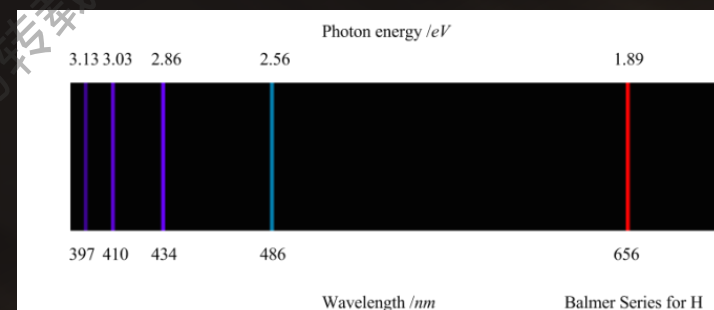
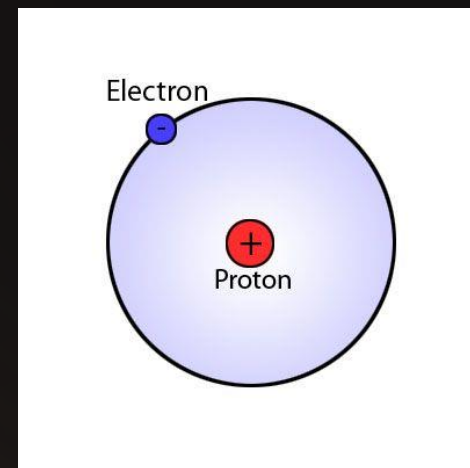
氢原子中电子如何存在. 最低 -13.6 eV, 台阶状

2. 同性相斥，平方反比，不能亲密无间？

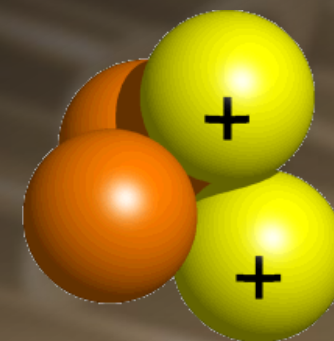
原子核里的电磁作用

3. 一团电荷的静电势计算该没啥么蛾子了吧？

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i q_i \sum_{j \neq i} q_j / r_{ij} = \frac{1}{2} \sum_i q_i \varphi_i$$



氢原子(光谱), α 粒子



关于静电的 Naïvité

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i q_i \sum_{j \neq i} q_j / r_{ij} = \frac{1}{2} \sum_i q_i \varphi_i$$

电中性是天意，是一个未被理解的问题。

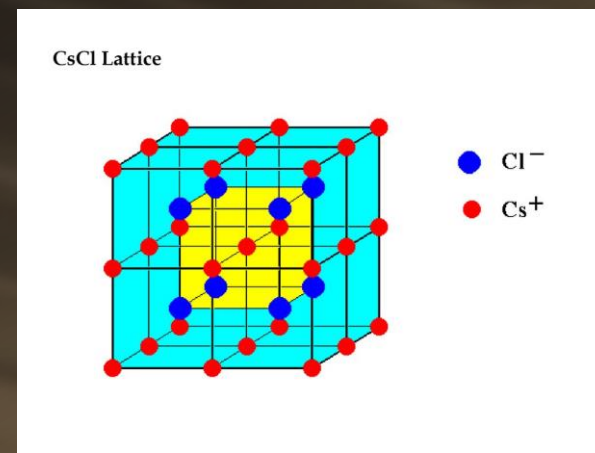
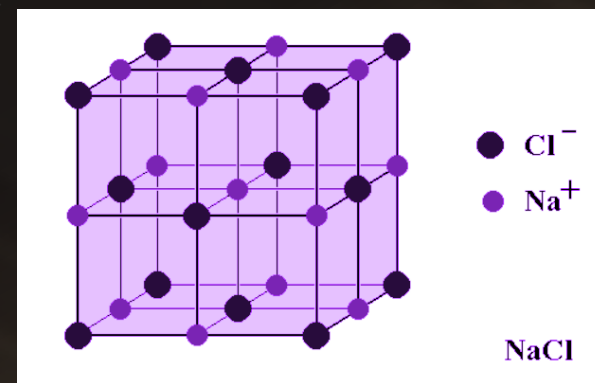
1. 基本电荷的正、负数值相等， $q, -q$;
2. 电中性是全局的， $N_q = N_{-q}$;
3. 电中性也是局部的， $n_q = n_{-q}$

计算某离子在其它离子下的静电势 (Madelung potential), 会遇到诡异的 $\varphi = -\frac{N_1}{r_1} + \frac{N_2}{r_2} - \frac{N_3}{r_3} + \frac{N_4}{r_4} - \dots$

NaCl 的 Madelung constant 为 1.75

重整化

你得习惯 $\zeta(-1) = 1 + 2 + 3 + \dots = -\frac{1}{12}$



静电势计算

因为**有用**，所以会千方百计求解。
科学的最大用处是人对自然的礼赞
不理解，则赞美无实质

微分方程的边界值问题

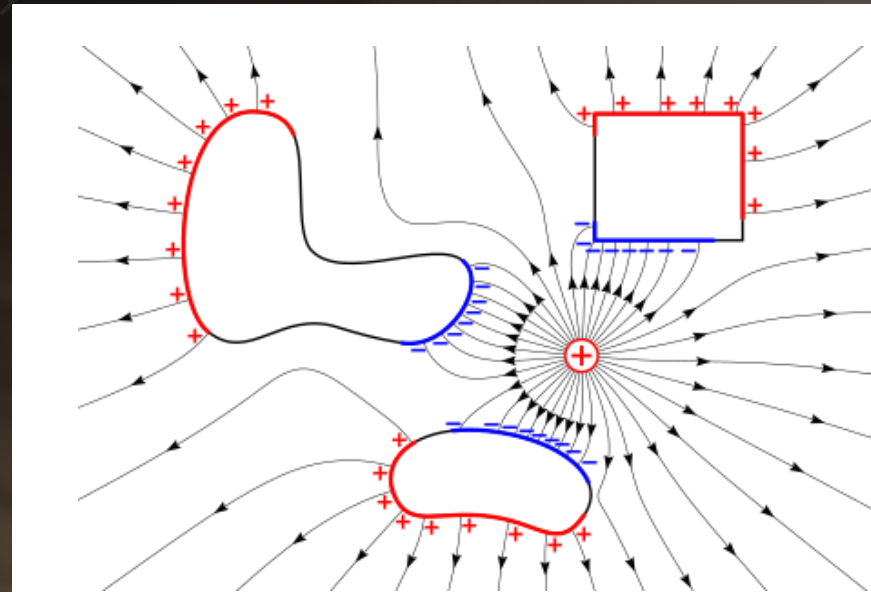
- 格林函数方法
- 镜像法
- 正交函数展开
- 保角变换 (二维, 复数)
- 有限元方法

自由空间 $\varphi(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(x')}{|x-x'|} d^3x'$

Poisson 方程

$$\nabla^2 \varphi = -\rho/\epsilon_0$$

在某些边界上， φ 或者 $\partial\varphi/\partial n$ 是确定的。
很难求解



静电势计算

φ 确定, 狄里拆利条件
 $\partial\varphi/\partial n$ 确定, 纽曼条件

Lejeune Dirichlet (1805-1859)

第一个给出近代意义上函数的定义
黎曼在柏林大学时的导师

$$2 + 1 = 3$$

Franz Neumann (1798-1895)

磁矢势 A 的概念

晶体的Neumann 原理: 晶体性质的对称性不低于晶体对称性
猜测影响了居里兄弟



静电势计算

针对泊松方程 $\nabla^2 \varphi = -\rho/\epsilon_0$

一劳永逸

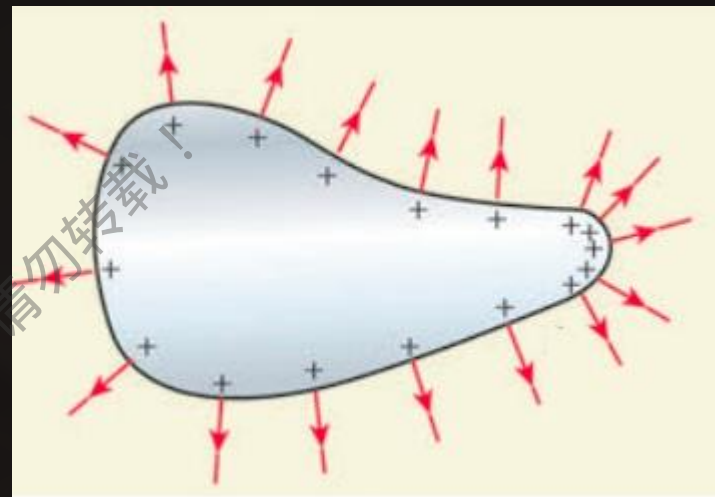
考察方程 $\nabla'^2 G(x, x') = -4\pi \delta(x - x')$

得格林函数 $G(x, x') = \frac{1}{|x - x'|} + F(x, x')$

其中 $F(x, x')$ 满足 $\nabla^2 \varphi = 0$.

则原方程的解为

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho(x') G(x, x') d^3 x' + \frac{1}{4\pi} \oint_S \left(G(x, x') \frac{\partial \varphi}{\partial n'} - \varphi(x') \frac{\partial G(x, x')}{\partial n'} \right) da'$$



静电势计算

格林函数方法

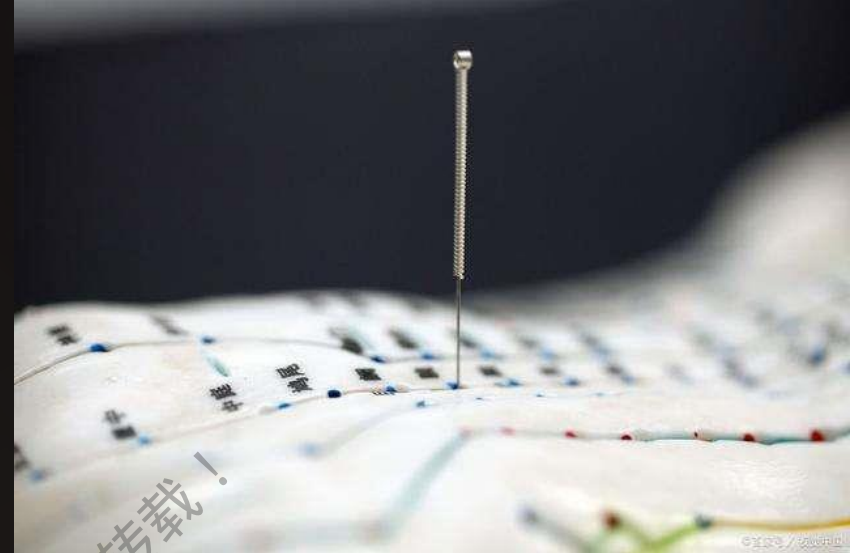
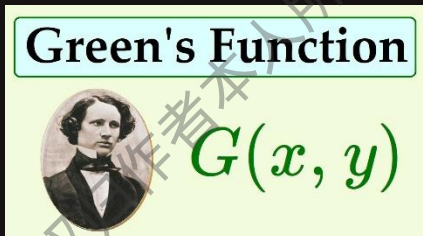
对于 方程 $\hat{O}\varphi = f(x)$

总可以考察方程 $\hat{O}G(x, x') = \delta(x - x')$
{相对于一根无限细的针}

得格林函数 $G(x, x')$
则原方程的解为

$$\varphi = \int f(x')G(x, x')d^3x' + \oint_S \left(G(x, x') \frac{\partial \varphi}{\partial n'} - \varphi(x') \frac{\partial G}{\partial n'} \right) da'$$

关键概念： $\hat{O}$ 是线性算符，叠加，卷积



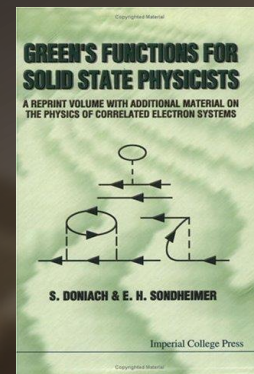
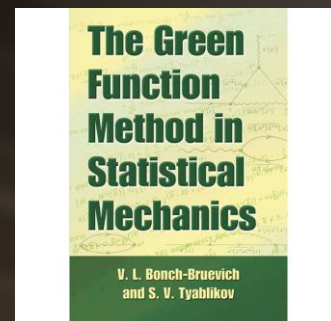
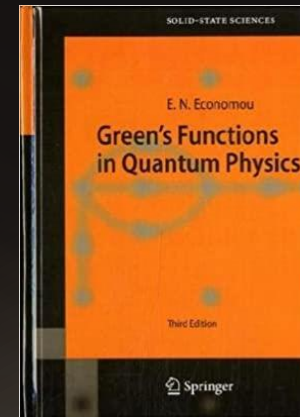
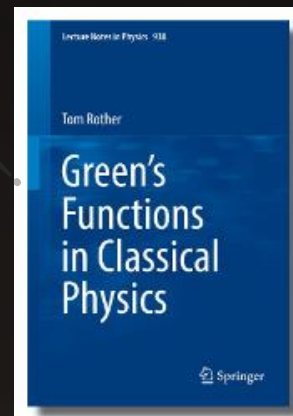
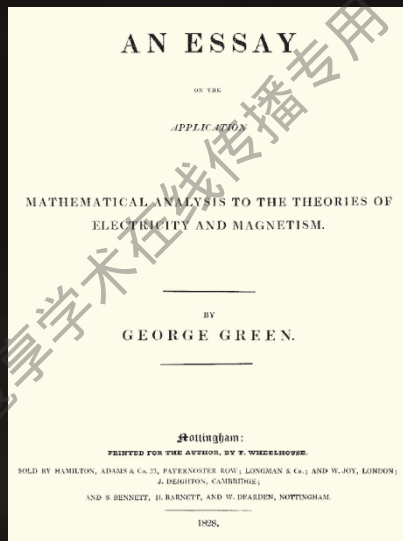
格林函数方法思想：知道了一根无限细的针扎下去是怎么疼的，你就知道任意根任意形状的针扎下去该怎么疼了。



静电势计算

格林 (George Green, 1793- 1841), 一位要养活7个孩子的磨坊主

An Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism (1828). 英文范文



思想性成果最伟大

静电势计算

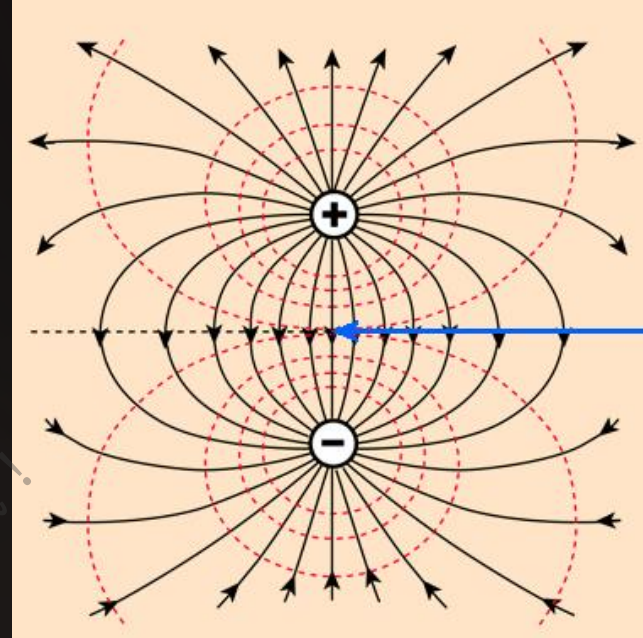
镜像法 (method of image)

思想：感兴趣空间外额外加电荷，凑边界条件

例一、平面等势面 $(q, z) \rightarrow (-q, -z)$

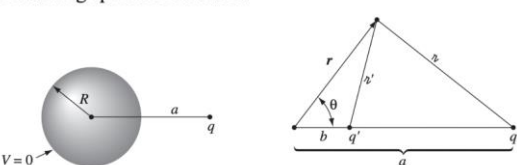
例二、球面等势面 $(q, z) \rightarrow (-qR/a, R^2/a)$

可以推广到多电荷体系。这算小聪明



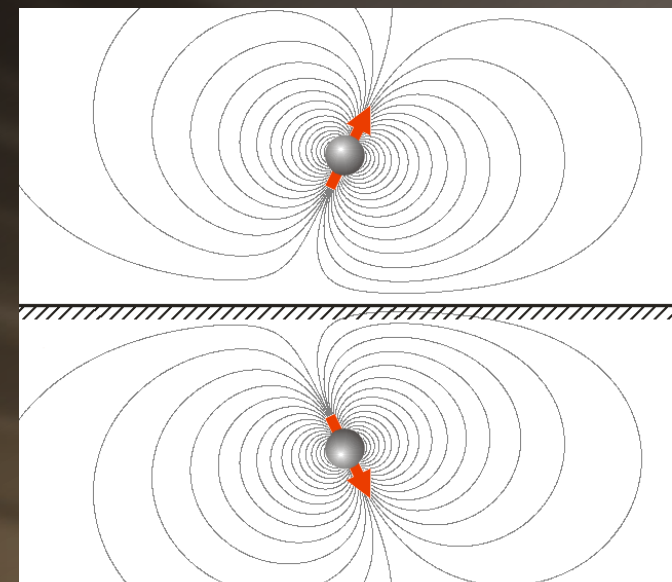
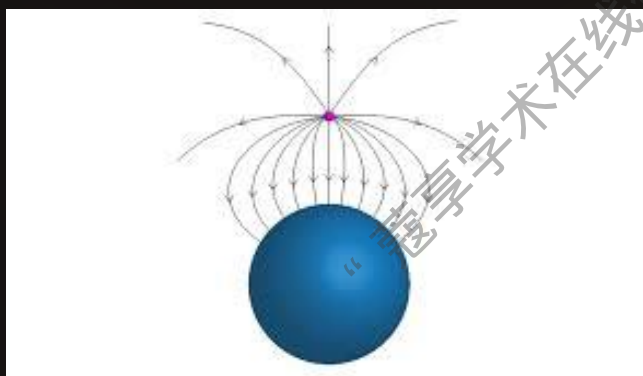
平面等势 electric dipole

A point charge q is situated a distance a from the center of a grounded conducting sphere of radius R .



with $q' = -\frac{R}{a}q$ and $b = \frac{R^2}{a}$

Show that the total induced surface charge must be the same as image charge by using Gauss's law.

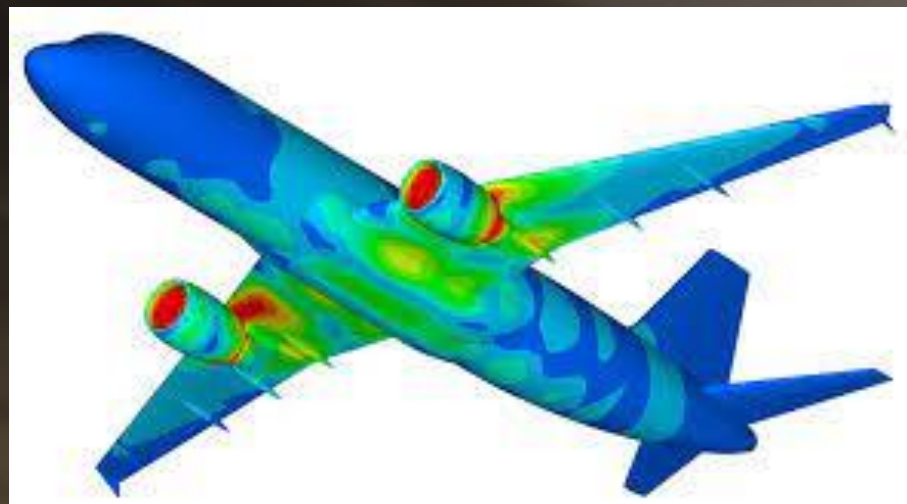
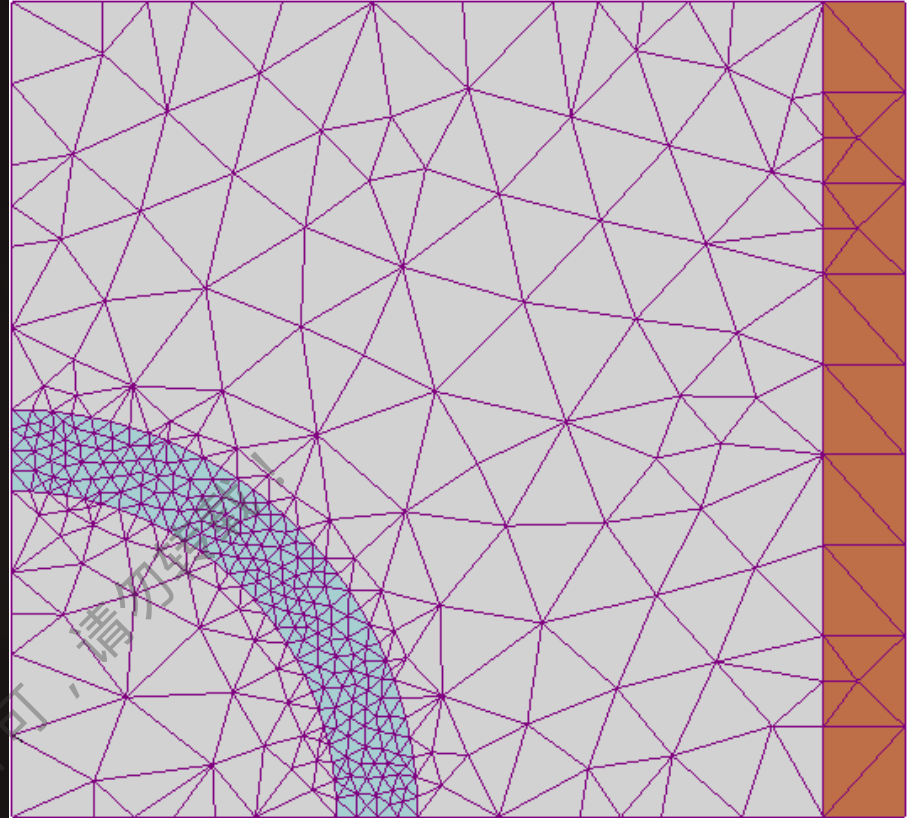


静电势计算

Finite element method (有限元法)~1940

把问题涉及的范围分成小区域，对偏微分方程近似（稳态用代数方程，暂态用常微分方程），拼起全局解，让误差最小。

It is introduced as a special case of Galerkin method. The process is to construct an integral of the inner product of the residual and the weight functions and set the integral to zero. In simple terms, it is a procedure that minimizes the error of approximation by fitting trial functions into the PDE (a set of algebraic equations for steady state problems, a set of ordinary differential equations for transient problems).



静电势计算

有限元法 (Finite element method)~1940

It was also independently rediscovered in China by Feng Kang in the later 1950s and early 1960s, based on the computations of dam constructions, where it was called the finite difference method based on variation principle.

此方法在中国由**冯康**于1950-1960年代重新独立发现，缘由是计算大坝构造，当时称为“基于变分原理的有限差分法”。

微分、变分、差分，此中有深意



静电势计算

勿以恶小而为之，勿以善小而不为。

——《三国志·蜀志传》

人之为学有难易乎？学之，则难者亦易矣；
不学，则易者亦难矣。——彭端淑《为学》

学问的每一点深入进去，都是一个广阔深邃的世界。电磁学可资为证。

学问一事有大小乎？勿以事小而不为，勿以事大而不敢为。恒为之，则小事可大矣，大事可成矣。

外电场中的势能

在外电势场中电荷分布的势能

$$W = \int \rho(x) \varphi(x) d^3x$$

Taylor 展开 $\varphi(x) = \varphi(0) + x \cdot \nabla \varphi(0) + \frac{1}{2} \sum_i \sum_j x_i x_j \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j}(0) + \dots$

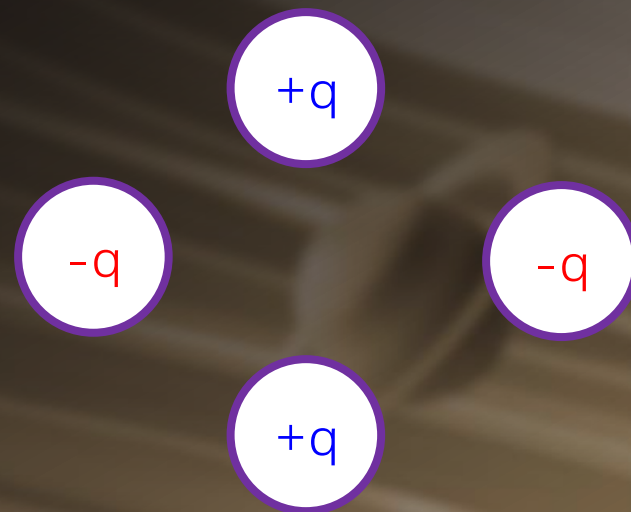
加入 null term $\frac{1}{6} r^2 \nabla \cdot E(0)$, 得

$$W = q\varphi(0) - p \cdot E(0) - \frac{1}{6} \sum_i \sum_j Q_{ij} \frac{\partial E_j}{\partial x_i}(0) + \dots$$

总电荷项

偶极矩项

四极矩项...



电势与电场

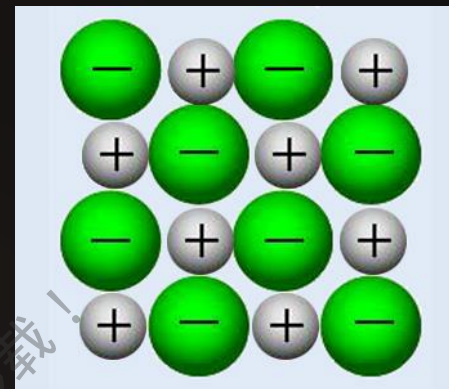
1. 总电荷 $q = \int \rho(x) d^3x$ 大自然喜欢 $q = 0$

2. 电偶极矩 $p = \int x \rho(x) d^3x$
如果 $q = 0$, p 与坐标原点无关

3. 电四极矩 $Q_{ij} = \int (3x_i x_j - r^2 \delta_{ij}) \rho(x) d^3x$

此处的3 根源在于3维空间, 与associated Legendre function Y_{2m} 有关

近似: 当作点电荷; 当作偶极子; 当作四极矩



且看一团电荷

电势与电场

偶极子势能

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3}$$

偶极子电场

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} - \mathbf{p}}{r^3}$$

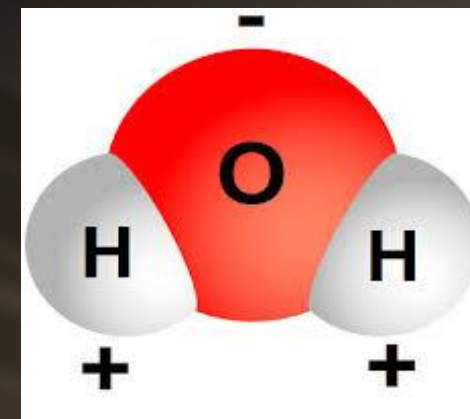
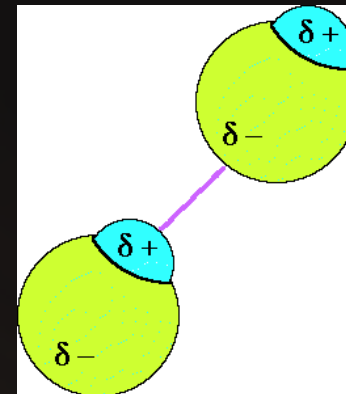
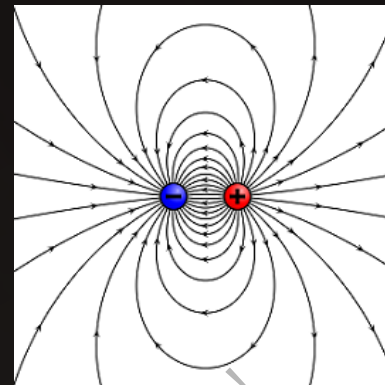
两电偶极子间相互作用能

$$W_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 - 3(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{n})(\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{n})}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|^3}$$

三维空间里电势的表示

$$\psi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{m=l} \frac{4\pi}{2l+1} q_{lm} \frac{Y_{lm}(\theta, \phi)}{r^{l+1}}$$

看似吓人的数学物理方程，实际上就是3D空间动能算符的本征值问题，请学会特殊函数和“线的代数”。完备基展开，散射问题



水分子的电偶极矩就灵活那么一点，都足以让人怀疑有神。

Ponderable media & Constitutive equation

Ponderable media (有重量的介质), 其中的电荷在其分布外区域的电势

$$\varphi(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left(\frac{\rho(x')}{|x - x'|} + P(x') \cdot \nabla' \frac{1}{|x - x'|} \right) d^3 x' + \dots$$

分步积分, 得

$$\varphi(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int (\rho(x') - \nabla' \cdot P(x')) \frac{1}{|x - x'|} d^3 x' + \dots$$

$$\nabla \cdot E = (\rho - \nabla \cdot P) / \epsilon_0$$

引入电位移 (electric displacement) D ,

$$D = \epsilon_0 E + P$$

这给你个感觉,
 D 来自近似

$$\nabla \cdot D = \rho$$

$$\nabla \cdot D = \rho_f$$

Electric displacement ? 电位移?

Electric Displacement 这个概念困扰了很多学电磁学的

中文：“电位移”，直译，根本不管物理是什么。

德语：dielektrische Verschiebung; elektrische Erregung;
elektrische Flussdichte; Verschiebungsdichte, Verschiebungsflussdichte

Electric Displacement 是麦克斯韦仿照固体力学引入的类比。固体受力每个点都会有 displacement; 电介质在电场下也应该处于某种紧张状态，有 electric displacement. 一般教科书望文生义的描绘会同 polarization (极化) 图像混淆

D 是什么意思，待会儿再说。描述介质电行为需要 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{D}$ 。对于真空 $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$

外电场中的势能 看 D, E 的角色

一堆电荷，分布 $\rho(x)$
在**外**电势场中的势能

$$W = \int \rho(x) \varphi(x) d^3x$$

在自家电势场中的势能 (自建)

$$W = \frac{1}{2} \int \rho(x) \varphi(x) d^3x$$

考察一般情形, 设有个宏观的电荷变动

$$\begin{aligned} \delta W &= \int \delta \rho(x) \varphi(x) d^3x \\ &= \int \nabla \cdot \delta \mathbf{D} \varphi(x) d^3x \\ &= \int \mathbf{E} \cdot \delta \mathbf{D} d^3x \end{aligned}$$

和热力学方程 $dU = TdS - pdV$ 类比
E, D 分别是场论版的**强度量 (T)** 和**广延量 (S)**

$$\delta W = \int \mathbf{E} \cdot \delta \mathbf{D} d^3x$$

对D积分、线性介质, 得

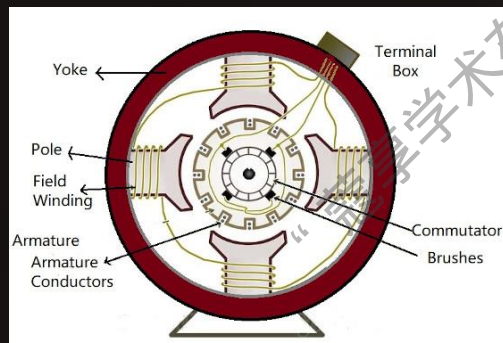
$$W = \frac{1}{2} \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} d^3x$$

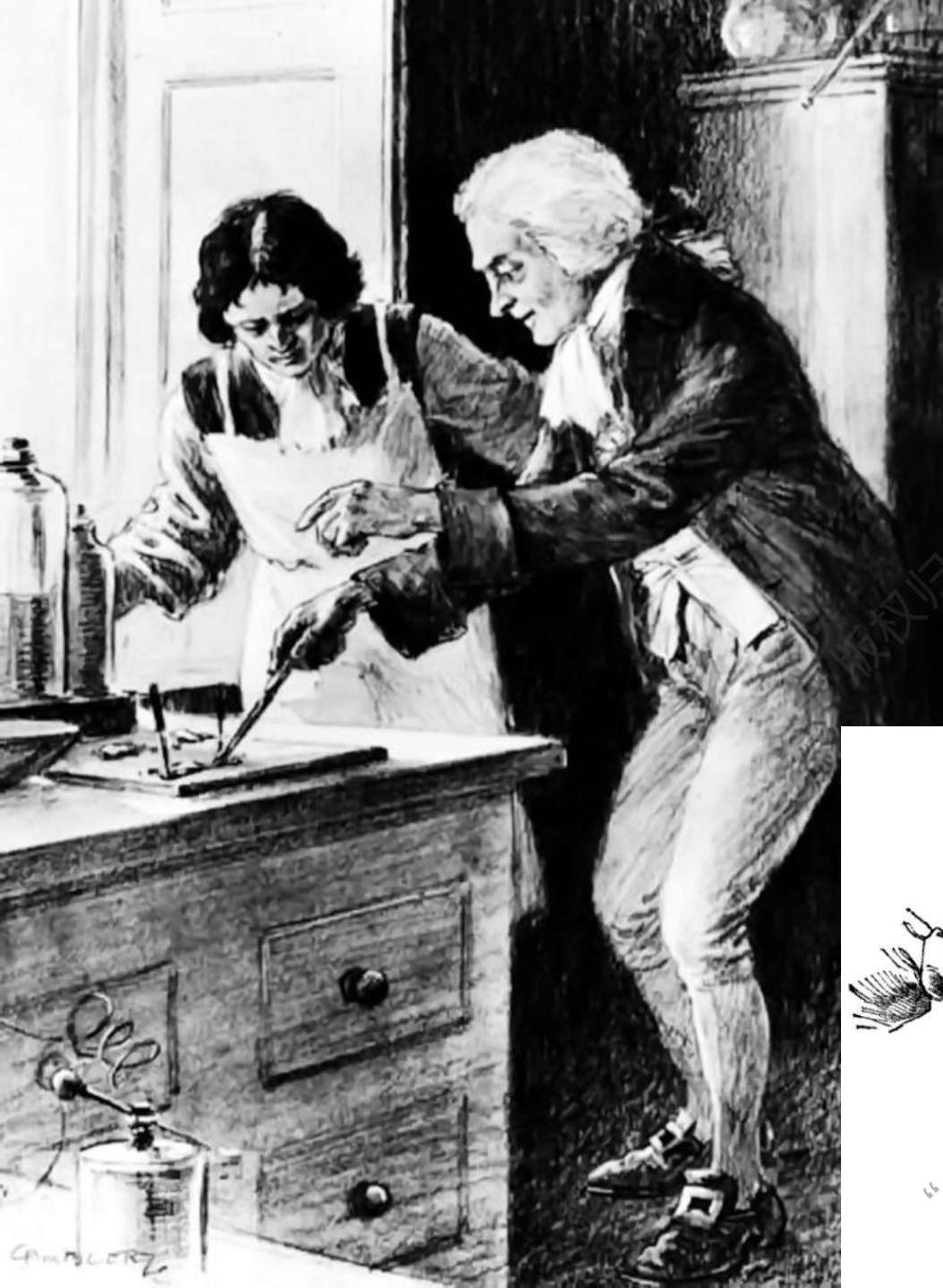
静磁学 Magnetostatics

如果磁场里某一点，放置一足够小、足够弱的磁极 (magnetic dipole)，磁极的方向就是该处磁通量密度 B 的方向，它在磁极上施加一扭矩 (torque)，**转** 起来

$$\mathbf{N} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}$$

磁极 安排是一门学问, $B(x, y, z)$

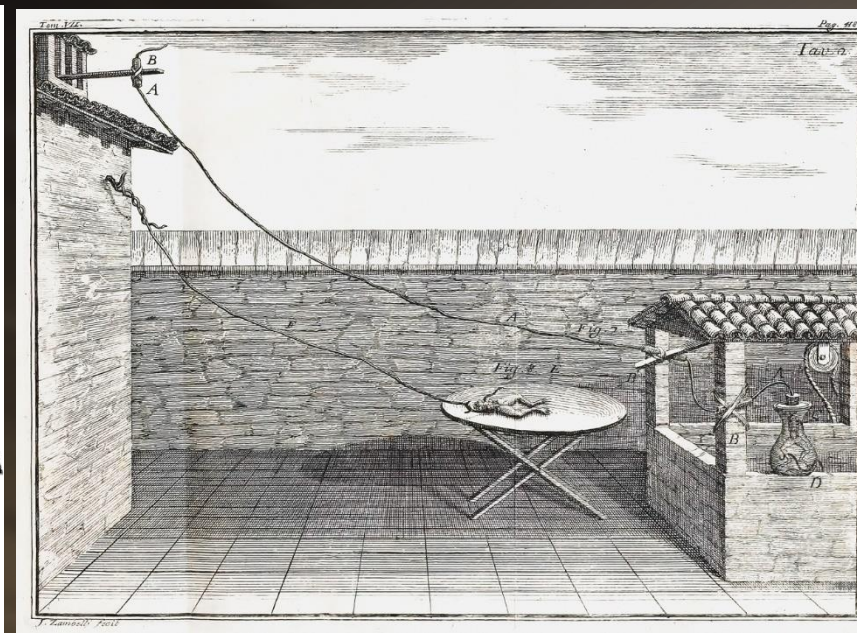
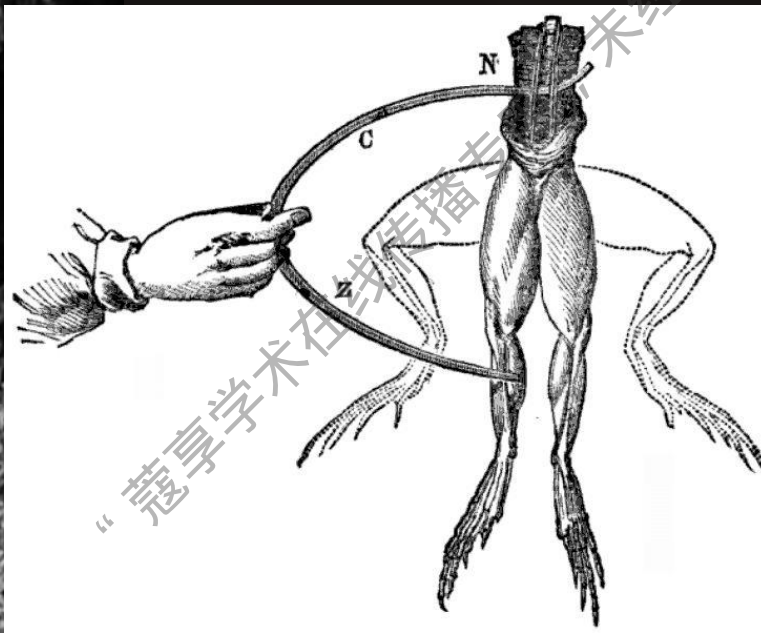




弄点儿电(流)玩玩

1746年，菱锌矿+炭，大量获得金属**锌** (Zinc)

Luigi Galvani (1737-1798) 1780发现青蛙肌肉对电的反应，后来用**铜-锌**连接引发了青蛙肌肉收缩。**生物电** 概念。



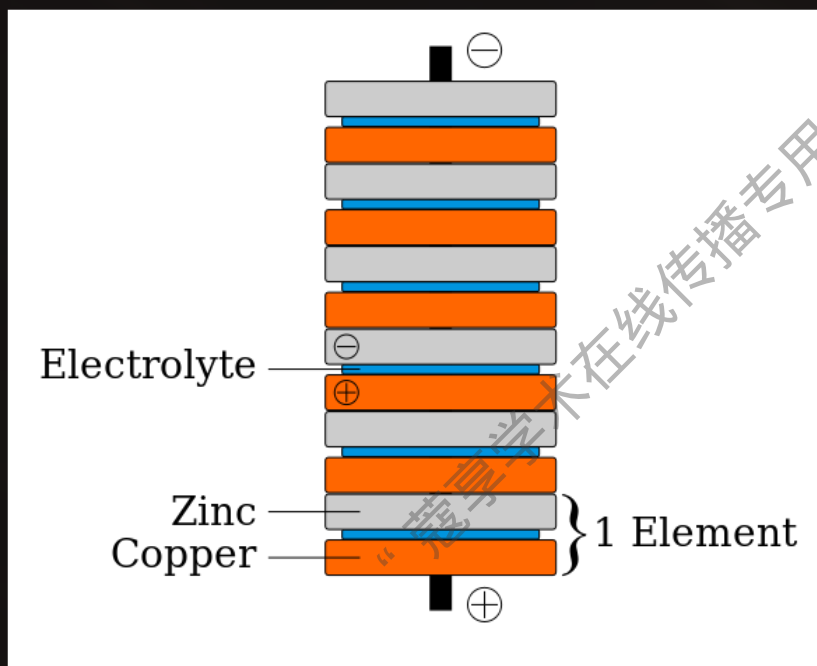
弄点儿电(流)玩玩

Alessandro Volta (1745-1827) 在1799-1800 年间发明了**电堆** (voltaic pile), 或曰**电池** (battery), 反驳 animal electricity theory.

电压单位: V, Volt.



Volta 给Napoleon 演示battery



Battery, 烤串的串



弄点儿电(流)玩玩

伏打电堆的电压并不是特别稳定，这会直接影响电流的测量结果，不如采用更加稳定的温差电池。

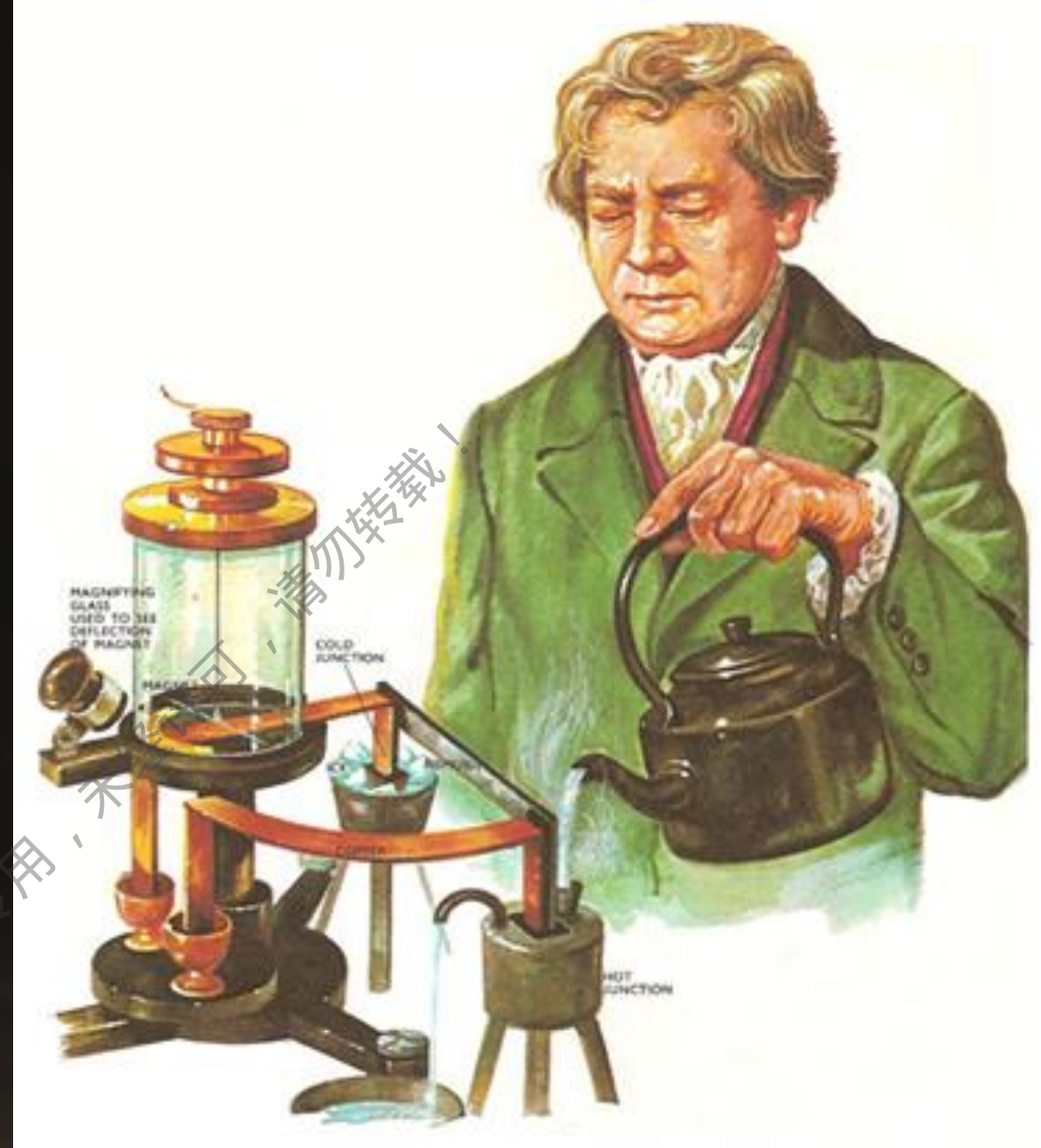
热电也是铜-锌。

热电-电热，热力学和电磁学的主题

欧姆定律

$$I = \frac{1}{R} V \dots$$

不是
 $I=V/R$



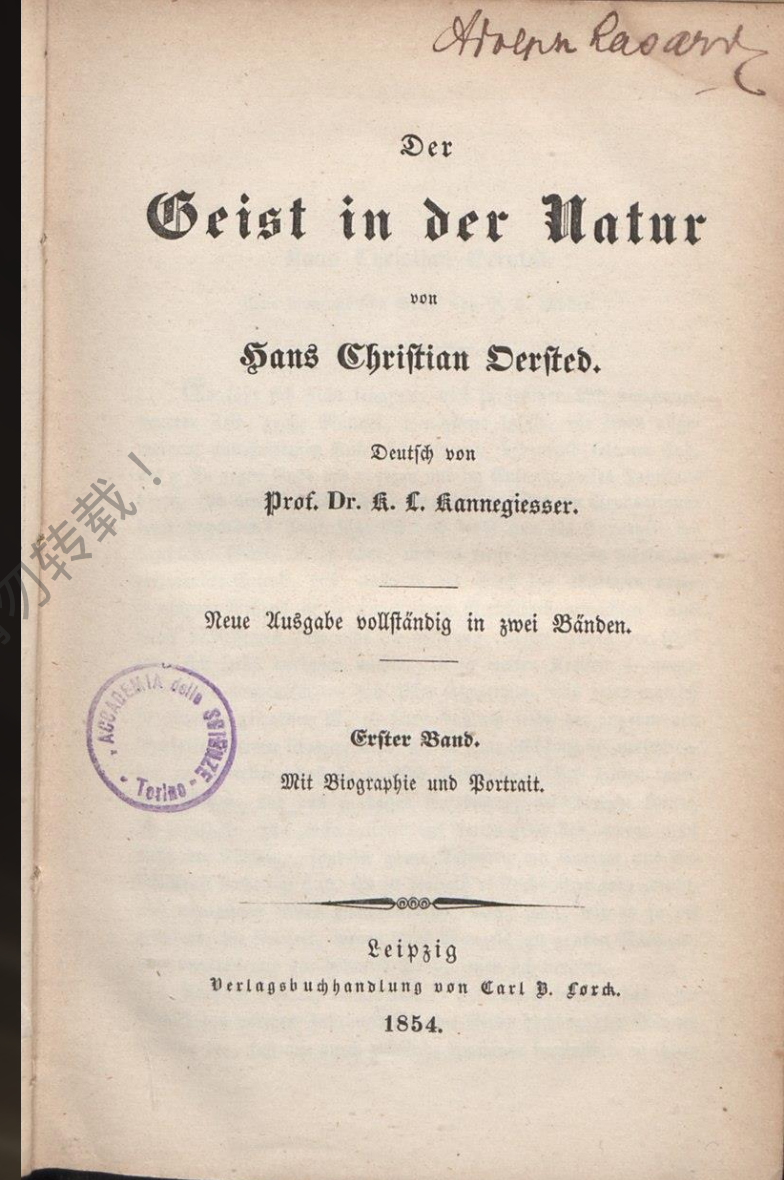
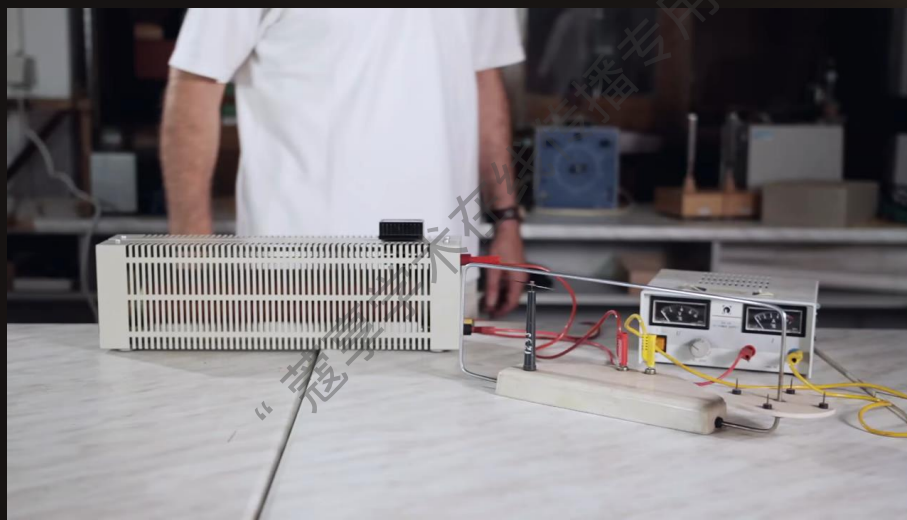
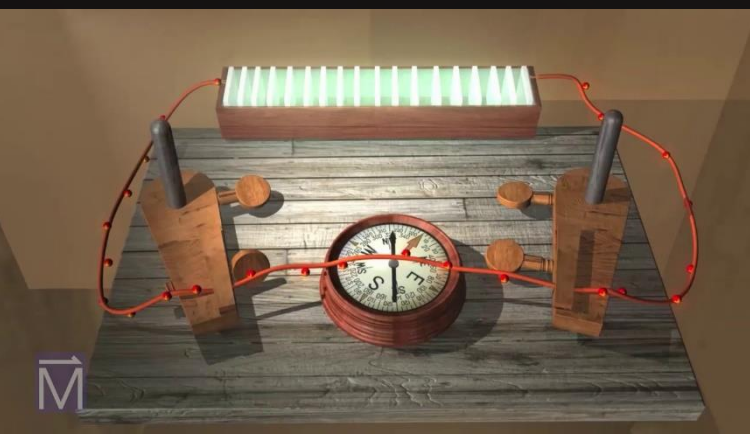
Georg Ohm (1789-1854) was busy with experiment

电流的磁效应

Hans Christian Ørsted (1777-1851), 登山者
1820年发现电流产生磁效应；1825年发现铝。

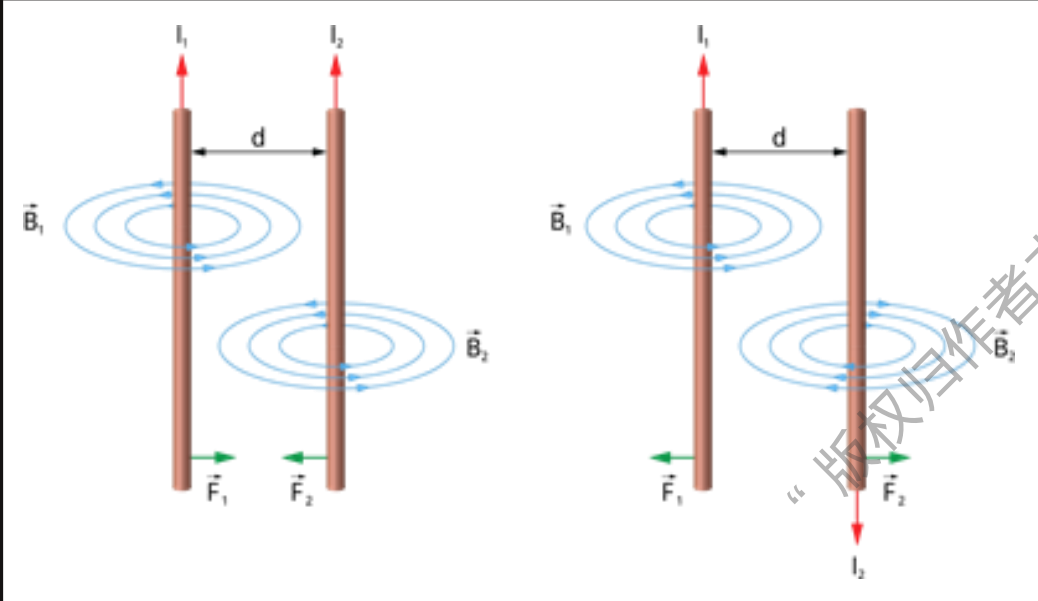
奥斯特自1818年就一直寻找电与磁的关系。发现的结果令人困惑。从水平放置的磁针想发现电的磁绕圈子，很难。跳不出有心力的窠臼。

Johannis Christianis Ørsted, (1820). Experimenta circa effectum conflictus electrici in acum magneticam

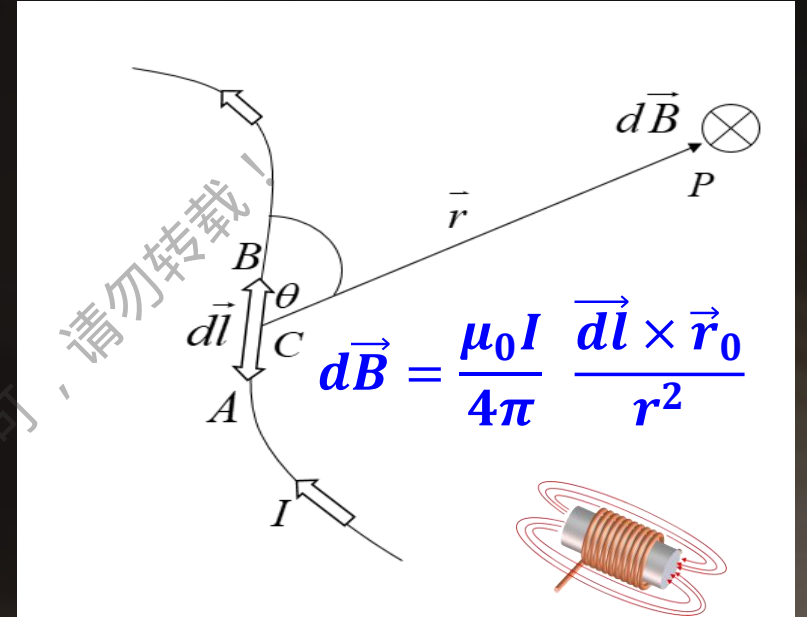


参阅 Der Geist in der Natur, 1854

电流的磁效应



安培：同向相吸，异向相斥



Biot-Savart law / 线段

1820 - Andre Marie Ampere, **one week** after hearing of Oersted's discovery, shows that parallel currents attract each other and that opposite currents repel.

1820 - Jean-Baptiste Biot and Felix Savart show that the magnetic force exerted on a magnetic pole by a wire falls off like **1/r** and is oriented perpendicular to the wire.

安培，经典电磁学的奠基人之一，

James Clerk Maxwell 在其名著“Treatise on Electricity and Magnetism”中称安培为“the Newton of electricity”。

安培提出了electrodynamique (电动力学)的说法
安培造了solénoïde (solenoid, 管状物) 这个词儿
这个管子状，就应该想起“ $\nabla \times$ ”这个算法，就想起安培模型

还有**电动分子** (electrodynamic molecule, served as the component element of both electricity and magnetism). 也许就是后来的基本电荷、磁矩。



André-Marie Ampère, 1775 –1836

纯由**经验**得来的电动力学现象之**数学**理论，1826

Mémoire sur la théorie mathématique des phénomènes électrodynamiques uniquement déduite de l'expérience, 1826

环路矢量场 (Circuital vector field)



Solenoid $\nabla \times$

Vortex Dynamics

涡旋动力学
此为一般性学问

涡旋模型用于各种流体包括以太 (aether).



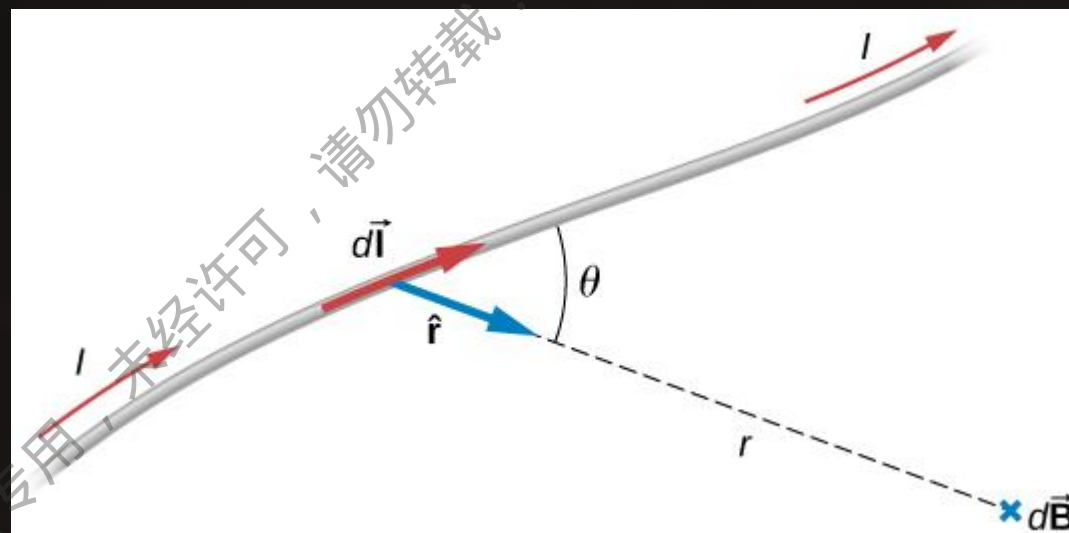
电动力学初步

1819-1820, Oersted, 电流生磁
1820, Biot-Savart 定理

如何看这个公式呢？

- 难处是Oersted认识到 $\mathbf{B}$ 是转圈圈的；
- 1820年 还没有叉乘 $\times$ ；
- 这里的 4π * 平方反比啥道理呢？
- 这里的比例系数放在分子上，而Coulomb 定律那里是放在分母上的。

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3}$$



$$d\mathbf{B} = \mu_0 I \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}_0}{4\pi r^2}$$

电动力学初步

Reciprocally, 磁场中的电流 ($j(x)$ 不是电流体密度),

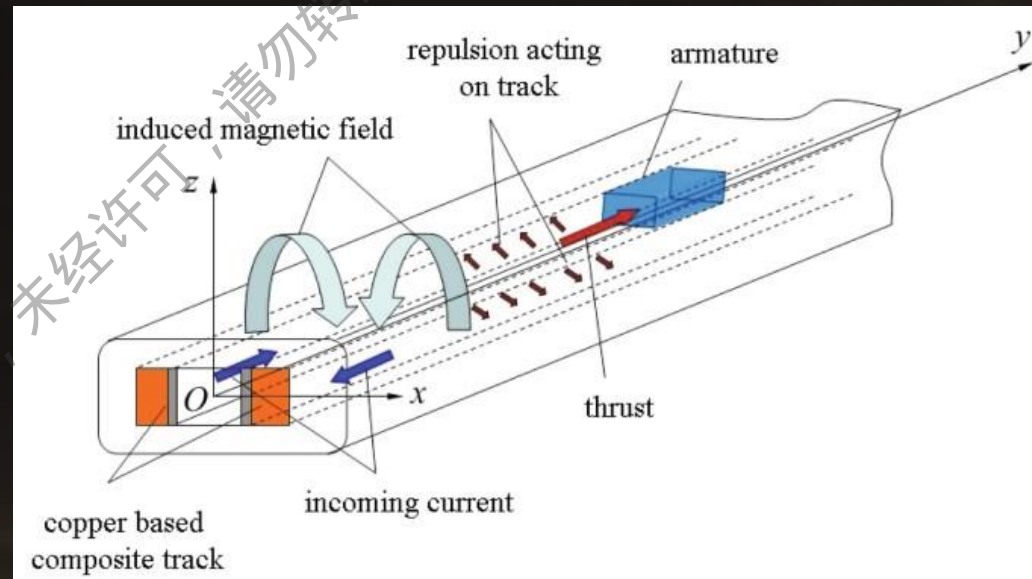
$$\text{受力 } F = \int j(x) \times B(x) d^3x$$

$$\text{力矩 } N = \int \mathbf{x} \times (j \times B) d^3x$$

$$\text{两条电流的作用力 } F_{12} = -\frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint \oint \frac{dl_1 \times (dl_2 \times x_{12})}{|x_{12}|^3}$$

两条平行电流的作用力 $\frac{dF}{dl} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{d}$
同向相吸，反向相斥。

和电流平方成正比，电磁轨道推进的难度就在于此。



电磁轨道 Electromagnetic Track

电动力学初步

Biot-Savart law

一而二

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathbf{j}(\mathbf{x}') \times \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} d^3x'$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x'$$

故而有 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$; $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$

电动力学初步

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0; \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$$

$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \Rightarrow \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \nabla \times (\mathbf{A} + \nabla \psi)$, gauge freedom, 就不该丢掉

$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} \Rightarrow \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = -\nabla^2 \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{j}$; 因为可以选 $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$

矢量版泊松方程

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{j}$$

解得磁矢势 $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3 x'$$

记住，静电势为 $\varphi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3 x'$ ，凑成4-vectors $(\rho c; \mathbf{j})$, $(\varphi c; \mathbf{A})$; 进入相对论

电动力学初步

介质的磁矢势中加入磁偶极的贡献

$$A(x) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left[\frac{\mathbf{j}(x')}{|x - x'|} + \frac{\mathbf{M}(x') \times (x - x')}{|x - x'|^3} \right] d^3x'$$

$$A(x) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(x') + \nabla' \times \mathbf{M}(x')}{|x - x'|} d^3x'$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{j} + \nabla \times \mathbf{M})$$

Whence comes the H?
磁场强度H打哪儿来?

引入磁场强度 $\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}$

磁场的 governing equations

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

(静)电、磁场的 governing equations

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

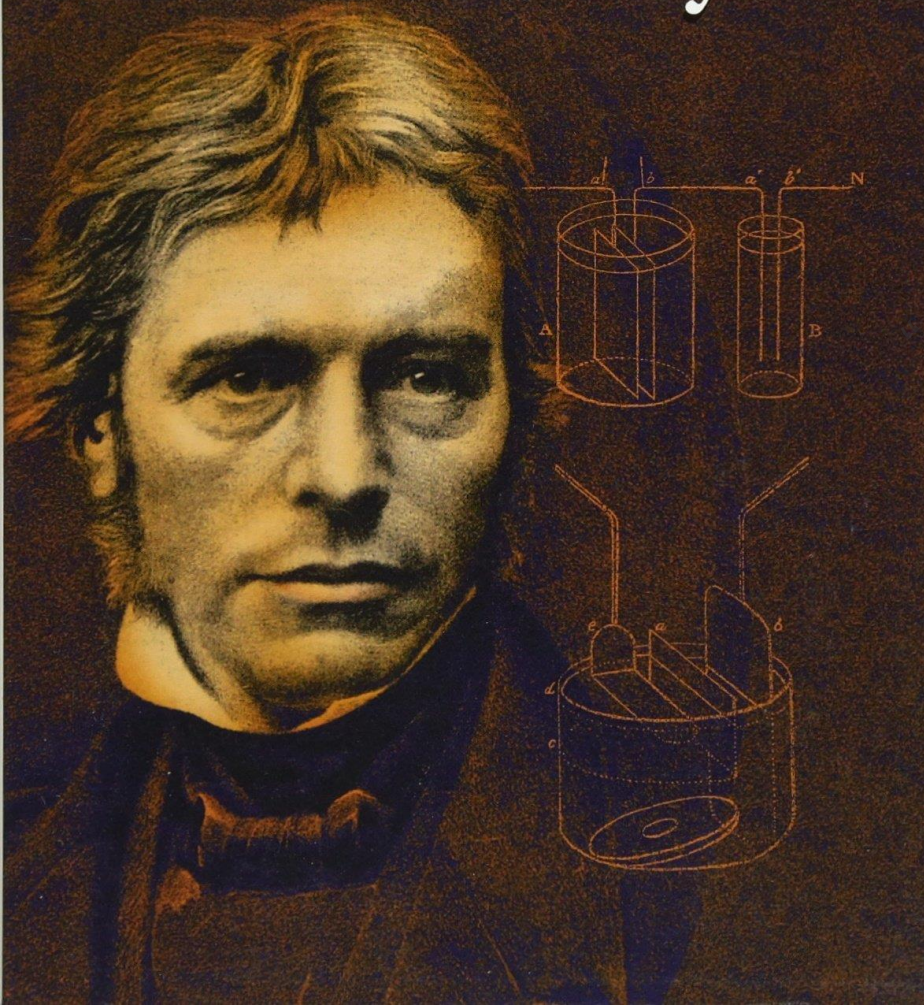
$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

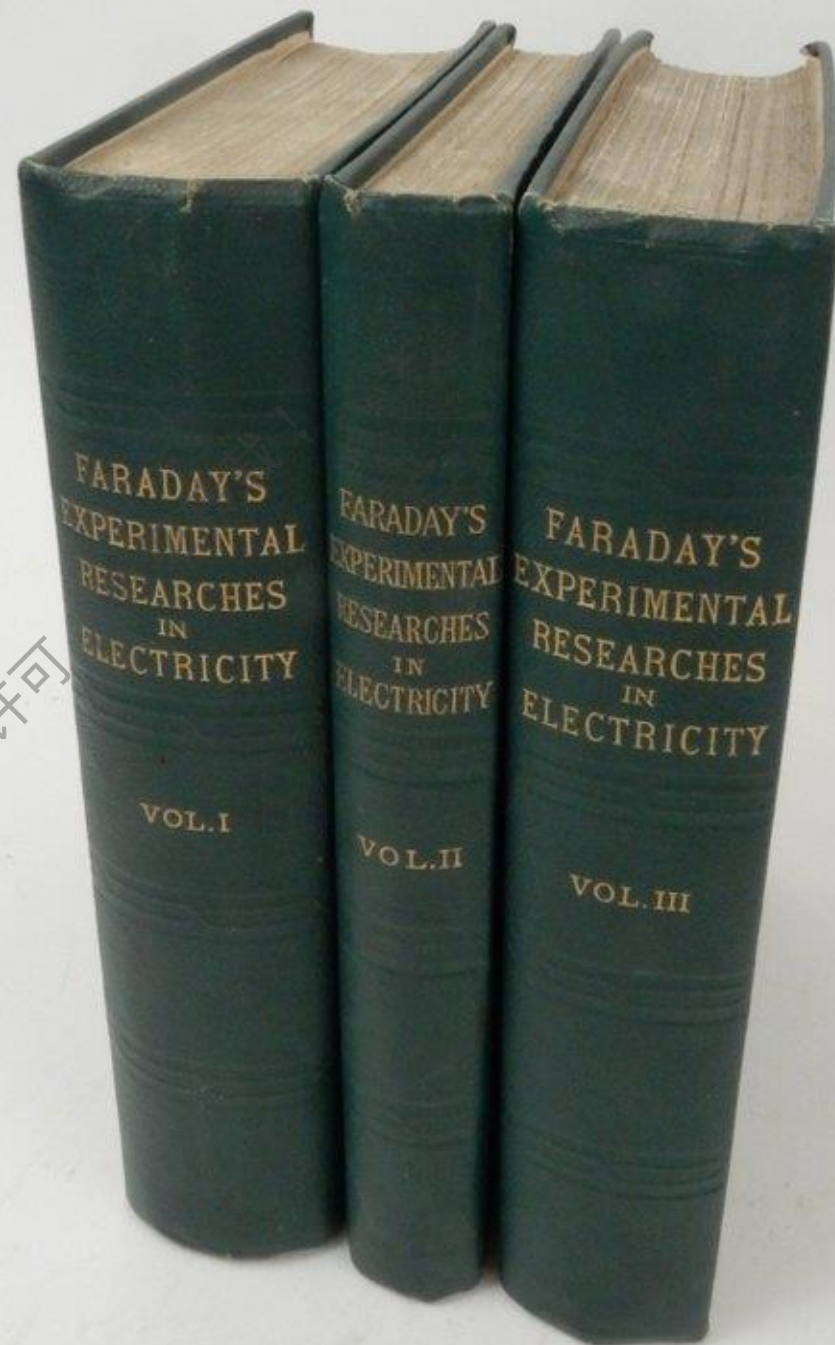
多矢量的grade的角度能理解这四者的层次或对应关系
动力学要求更多

MICHAEL FARADAY
Experimental
Researches in
Electricity



法拉第 (1791-1867)

装订店的学徒
电磁学划时代人物



法拉第 (1791-1867)

天才的实验物理学家
化学家
思想者

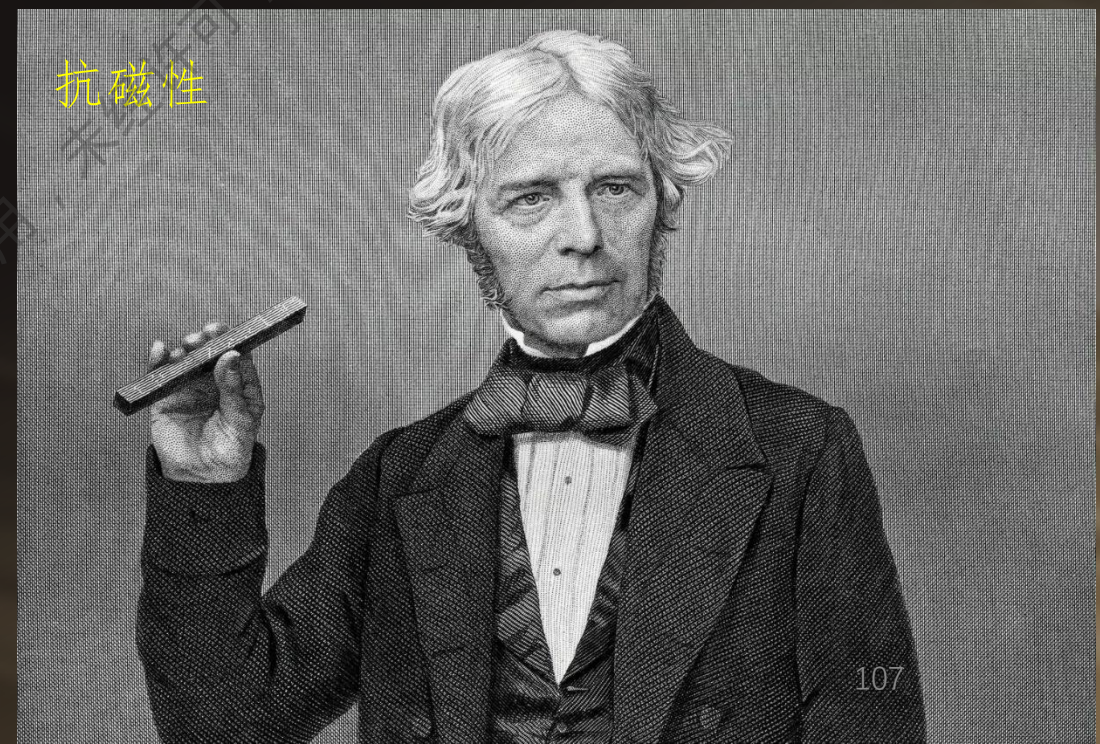
实验的极致是思想

最伟大的实验室在思想者的肩膀上。

注：Gedankenexperiment, 在脑子里过一遍，一种做事和思考的方式。

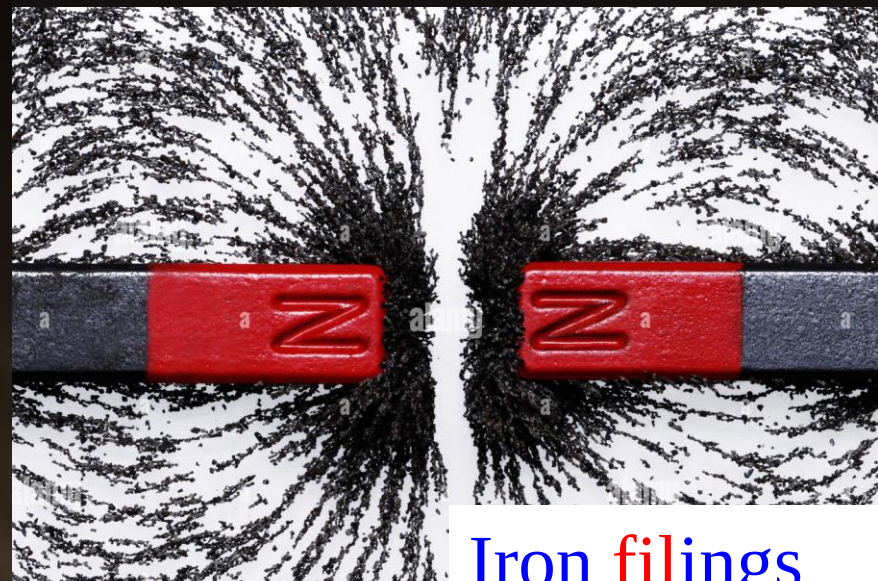


磁旋光效应



抗磁性

法拉第提出“力线、场”的概念



Iron filings
铁屑

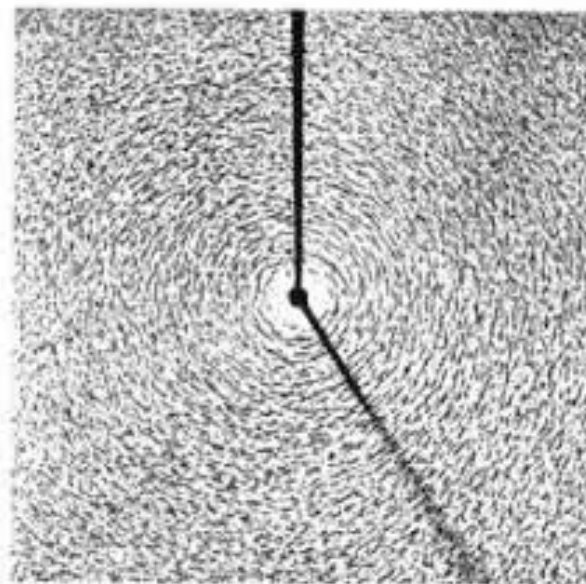
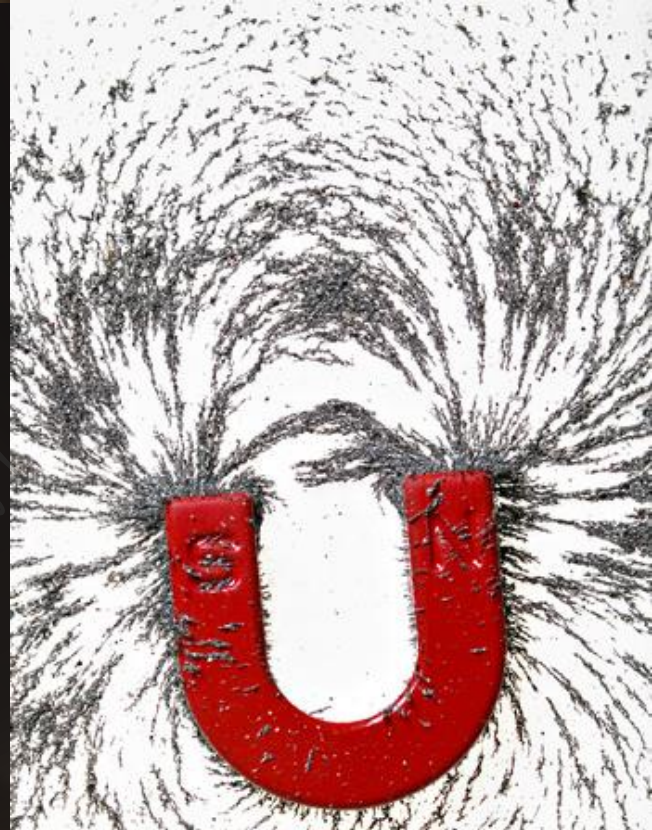


Filum → file → 线

力线 (line of force), 导线 ($I \vec{dl}$),
铁线 (Iron filings), 线的代数
(linear algebra), 请连起来哈。

参阅 Fields of Force 一书

一流学者引入新词、新概念、新理论(体系)



法拉第的发现

从雷电而来的声与光强调了**波传播**需要时间。法拉第说，“借助场的作用需要时间..... 我倾向于把磁力从磁极向外的扩散比作受扰动水面的振动”。法拉第**就差点说出电磁波**这个词儿！

实验的第一要素是思想

1830年代 Faraday 从电化学的**比例问题**指出存在电原子(atom of electricity). 比较库伦的电分子概念。

拉瓦锡 (Antoine Lavoisier, 1743-1794) 从**化学反应比例**看出原子内部有基本单元。 **比较数论的有理数和经典的理性力学 -ratio, rational.**

Action through the field takes time. -Faraday 1832.

I am inclined to compare the diffusion of magnetic forces from a magnet pole, to the vibrations on the surface of disturbed water, or those of air in the phenomena of Sound



电磁感应 (Electromagnetic Induction)

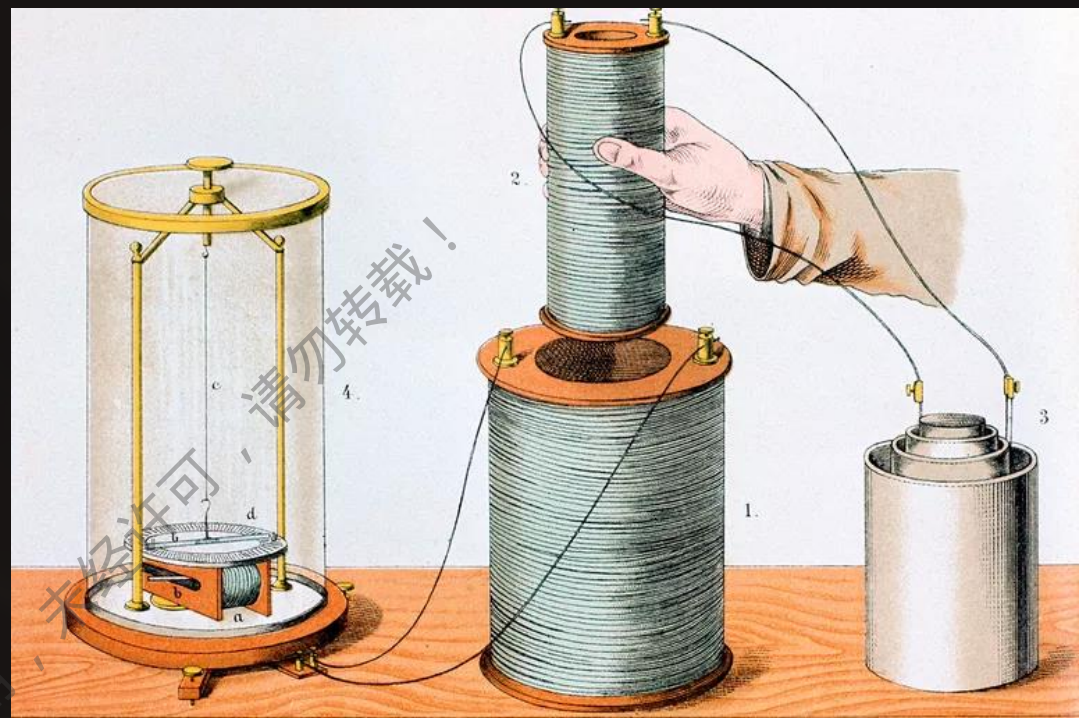
1831年10月17日 法拉第-电磁感应

不是电磁感应，是电的磁诱导。

1834 年，楞次定律

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

Heinrich Lenz determines the direction of the induced electromotive force (emf) and current resulting from electromagnetic induction.



磁(流)通量、电(流)通量
请记住：

πάντα ῥεῖ

电磁感应 (Electromagnetic Induction)

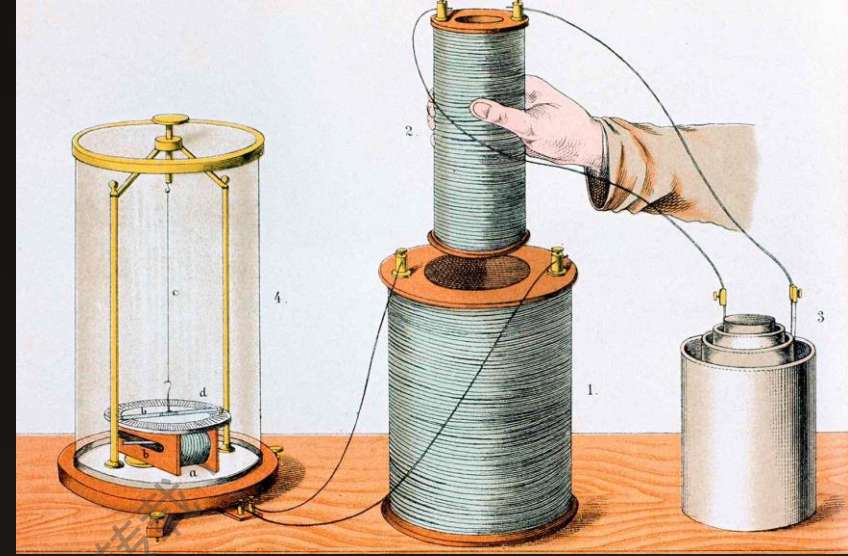
通过面S的磁通量 (流体) $\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} da$

绕面边缘(circuit, 无边界) $\mathcal{E} = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$

$$\oint_C \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{l} = -k \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} da$$

Convective derivative 问题 (流体力学)

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{B}}{dt} &= \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{B} \\ &= \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times (\mathbf{B} \times \mathbf{v}) + \mathbf{v} \nabla \cdot \mathbf{B} \\ &= \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times (\mathbf{B} \times \mathbf{v}) \end{aligned}$$



$$\oint_C \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{l} = -k \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} da$$

$$\oint_C (\mathbf{E}' - k\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = -k \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} da$$

通过单位制, 可以选取系数 $k=1$, 引入
 $\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}$, $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}$ 是实验室参照框架里的

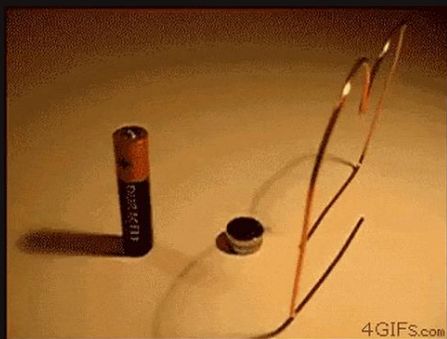
$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$$

发电机 ↔ 电动机

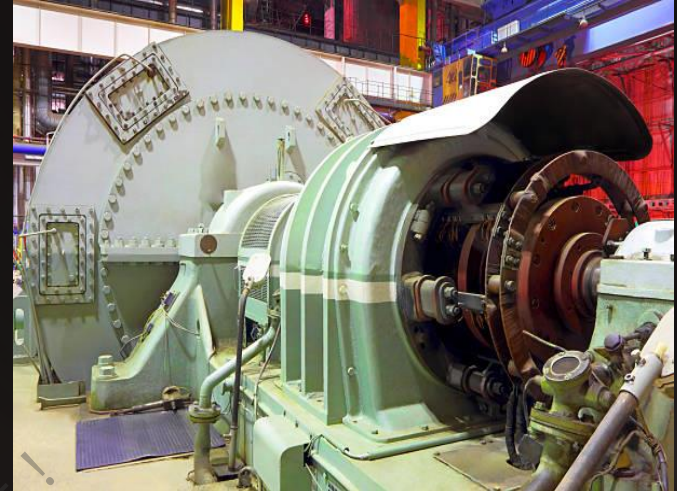
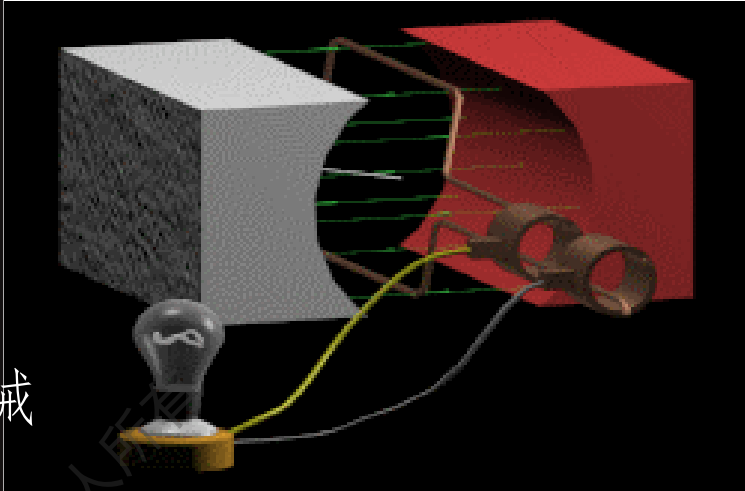
在磁场里诱导出了电，从此有了用机械方式源源不断地产生电的可能

物理现象**互反性**，有发电机就有电动机
The theoretical reciprocity between electricity and magnetism is perfect - Dirac 1931.

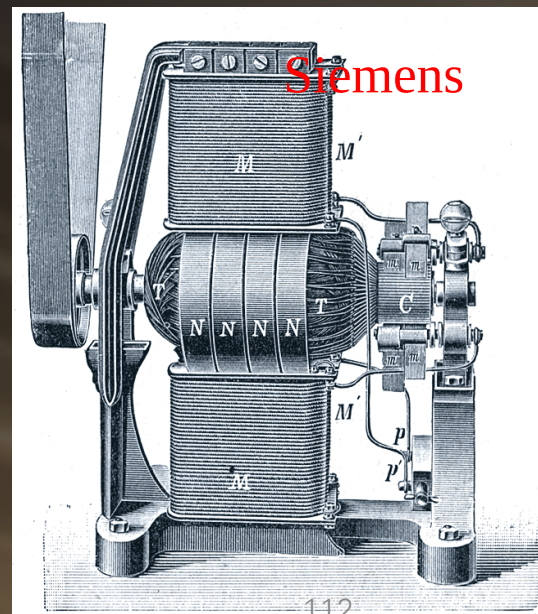
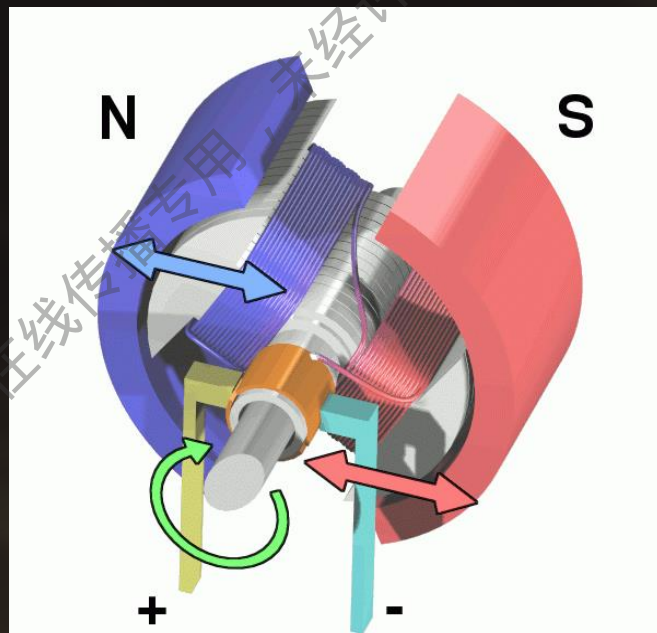
人类社会进入开挂模式！



曹则贤“物理学校文嚼字” 078
Reciprocity: 对称性之上的对称性



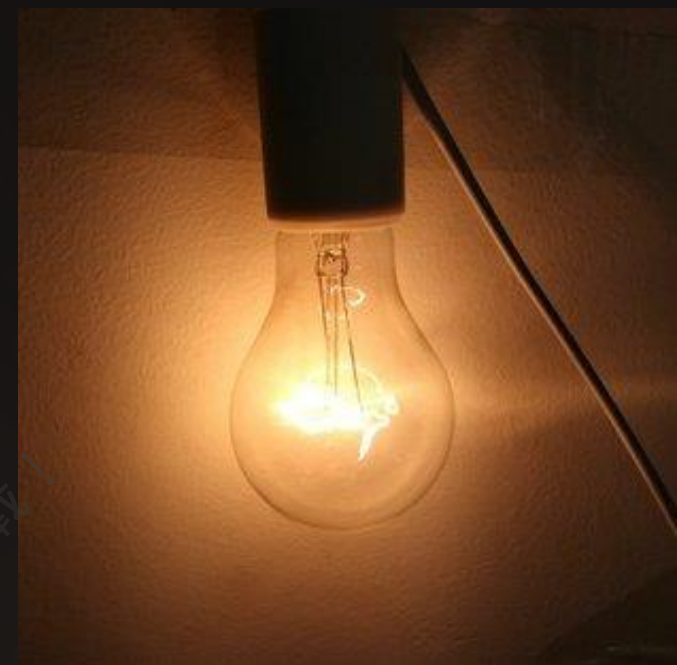
发电机 ----- 远方 ----- 电动机
继电器(relay): 指令和操作**一分为二**



什么是共产主义社会？

楼上楼下，电灯电话

电的使用，**第二次工业革命**，不仅提高了生产力
还极大地提升了人类社会的文明程度



Edison 1878



1960年代，共和国将电气化引入农业与农村，当时先用上電的亿万农民的喜悦心情，40岁以下的中国人已很难想象。



Insulator, 绝缘子



如今的社会是电驱动的社会

电力工程
电机工程
电气工程
电信工程
电子工程
.....

2021年我国发电量为8.1 万亿千瓦时

今日的幸福生活，多亏了我们的社会
里有各种各样**懂电**的人
全国通电，多亏了社会主义制度



中国标准的超高压输电,1100千伏

电磁学的数学

Faraday: I am unfortunate in a want of mathematical knowledge and the power of entering with facility into abstract reasoning.

感慨：如果法拉第会数学，他得把电磁学推进到什么程度啊！

杠：如果法拉第会数学，说不定他一辈子就是个物理系教算术的。

法拉第可以会数学，可以不会。但是，电磁学没有数学可不行。

经典力学/电磁学，是那种需要创造专门数学才能继续前行的学科！

The steady progress of physics requires for its theoretical formulation a mathematics that gets continually more advanced. This is only natural and to be expected. — Dirac, 1931

电磁学的数学

物理量的数学特性: 标量, 矢量, (高阶)张量

粒子的标签: 质量 m , 电荷 q , 自旋 s

人的标签: 体重, 性别, 品行

能用数学的眼光
观照这些量吗?
数学若不对, 物
理如何对呢?

电磁场的物理量: 电势 φ ; 磁矢势 A

电场强度 E , 电位移 D ; 磁通量密度 B , 磁场强度 H

介电常数 ϵ , 介磁常数 μ ; 电磁场张量 $F^{\mu\nu}$

运动学物理量: 位移 Δr , 速度 v , 加速度 a , 力 f

微分运算符号: ∇ , ∇^2 , $\square = \nabla^2 - \partial^2/\partial t^2$

电磁学的数学

粒子的标签： 质量 $\mathbf{m}$, 标量
 $(m_1 + m_2) > m_1, m_2$

$$F_{12} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{r}_0$$

电荷 $\mathbf{q}$, 极性标量 (+, -)
 $(q_1 + q_2), q_1, q_2 ??$

$$F_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{r}_0$$

自旋 $\mathbf{s}$

自旋是内禀自由度，自旋代数，自旋群
自旋决定表示的结构，是量子电动力学的主题

知道为什么电磁才有屏蔽，加速电荷才有辐射了吧？

电磁学的数学

粒子质量 m ，电荷 q 是标量 (Scalar)

位移、速度 v 是矢量 (vector)

标量：不言自明

矢量：既有大小又有方向的量

~~Vector is vector~~ (charge, 载)

这些量会用到加法和乘法。

注意到加法、乘法的水很深了吗？
需要大神

加法：2米+3米=5米

$$z = a + ib$$

乘法：2米×3米=6平方米

$$2 \times 3 \text{ 米} = 6 \text{ 米} \quad \hat{O} |\psi\rangle$$

$$3 \text{ 米} \times 2 = 6 \text{ 米} \quad \langle \psi | \hat{O}^*$$

哈密顿与电磁学的语言



哈密顿：一个天才的学习者，数学、物理学的关键人物
(不逊于牛顿)，一位哲学家。

哈密顿力学是电磁学、电动力学的正确表达方式

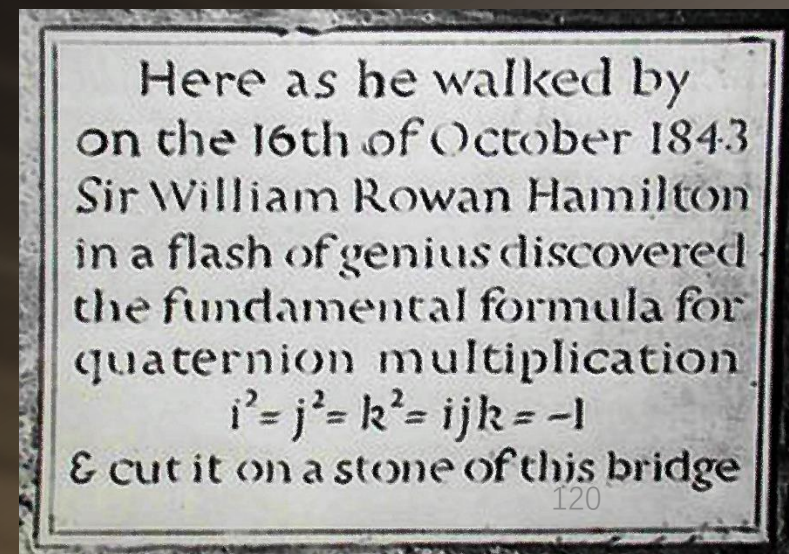
1843. 10. 16下午，哈密顿为电磁学发明了四元数

William Rowan Hamilton
(1805-1865)

复数 $z = a + ib$; $i^2 = -1$

四元数 $q = a + bi + cj + dk$

$$ij = k, \quad jk = i, \quad ki = j; \quad ij = -ji, \quad jk = -kj, \quad ki = -ik$$
$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$



哈密顿与电磁学的语言

哈密顿力学为什么要发明四元数？

电磁学、流体力学，都有涡旋的问题。Vortex 这个概念阴魂不散

如何描述三维空间转动、涡旋？

复数乘法可以描述二维空间里有方向量的转动

复数 $z = a + ib$ 里加号的意思是“扩展, Ausdehnung”，

就是扩展为二元数， $a \rightarrow (a, b)$,

再扩展， $t = a + ib + jc$ ，不中，乘法有问题！

再扩展， $q = a + bi + cj + dk$ ，成啦 ...

$$z = a + ib = re^{i\theta}$$

$$z_0 = e^{i\theta_0}$$

$$z_0 z = re^{i(\theta+\theta_0)}$$

四元数描述
3D空间的转动
 $n' = q^{-1} n q$

哈密顿与电磁学的语言

四元数可以加减乘除，只需要记住 $i^2, j^2, k^2 = -1$ 和

右手定则 $ij = k$

简记 $q = a + bi + cj + dk$ 为 $q = r + v$

实部 r 称为 **scalar** (标量, 尺度因子);

虚部 $v = bi + cj + dk$ 称为 **vector** (矢量, 携带者)

$$(r_1, v_1) + (r_2, v_2) = (r_1 + r_2, v_1 + v_2)$$

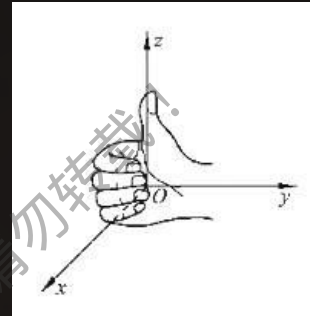
$$(r_1, v_1)(r_2, v_2) = (r_1 r_2 - v_1 \cdot v_2, \quad r_1 v_2 + r_2 v_1 + v_1 \times v_2)$$

矢量点乘

矢量叉乘

$$(0, v_1)(0, v_2) = (-v_1 \cdot v_2, \quad v_1 \times v_2) \dots$$

同时、同时、
同时



矢量点乘叉乘不过是四元数乘积的自然结果。用四元数表示矢量运算结果，
就是普通的乘法，无需背诵什么公式

来自格拉斯曼几何代数的vector

从位移矢量看 vector 的意义。 **Vector**，载而挪

The displacement of point derives the term vector.

A, B 为点，Vector AB 是一种线的对象， $AB = B - A$

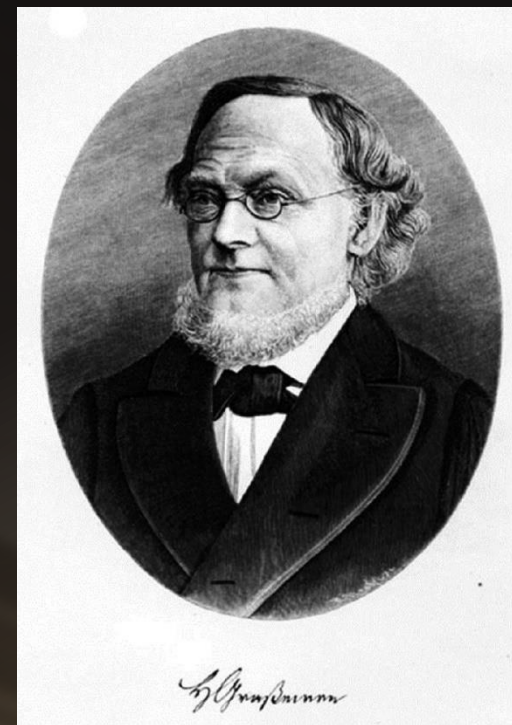
其作用是将A挪到B， $AB * A = B$.

具体算法为 $AB * A = AB + A = B - A + A = B$

故而有 $AB + BC = AC$ ， $A * BC = \Delta ABC$ ，可直接用于几何学

此为莱布尼兹倡议的用代数方法研究几何，是格拉斯曼 (1809-1877) 创造的学问→线的代数→代数几何

参阅 Hermann Grassmann, Ausdehnungslehre 1844; 《磅礴为一》



哈密顿与电磁学的语言

Gibbs 硬生生把 内积和外积给割裂为独立的内容

为了简化而放弃了电磁学的四元数表示，是人类历史上最没有远见的一件事，阻碍了电动力学的发展和学习！！

Everything should be
made as simple as
possible, but no

simpler -Einstein 1933

不能再简单，再简单
就麻烦了！

所幸，Clifford 在更高的层次上把它们缝合到一起 (几何积)

Vector (矢量) 经 Gibbs, Peirce 等人发展成了一般意义的Linear algebra, 线的代数，关于“线段这种几何对象”的代数。

如果 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ 算是矢量，则 $\lambda_1 * \mathbf{v}_1 + \lambda_2 * \mathbf{v}_2$ 也是，
 λ 是矢量的field (域，场，场院，田地)。

如果要定义 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ 的长度和夹角，还要引入新的规则。

矢量可以有但不必有
方向、大小

哈密顿与电磁学的语言

关于叉乘, $A \times B$, 只存在于三维空间!
一般维度的线的空间(由线作为对象构成的空间)里对应的操作为外积

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2 b_3 - a_3 b_2) \mathbf{i} + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \mathbf{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \mathbf{k}$$

恰恰的矢量空间,
 $\mathbf{i}\mathbf{j} = -\mathbf{j}\mathbf{i}; \mathbf{i}\mathbf{j} = \mathbf{k}$

叉乘 $A \times B$ 可以把operator A改写成skew-symmetric 矩阵, 而让operand B保持为列矩阵

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & -A_z & A_y \\ A_z & 0 & -A_x \\ -A_y & A_x & 0 \end{vmatrix}$$

$A \times B = |A|B$ 就是矩阵乘法

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = [\mathbf{a}]_{\times} \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = [\mathbf{b}]_{\times}^T \mathbf{a} = \begin{bmatrix} 0 & b_3 & -b_2 \\ -b_3 & 0 & b_1 \\ b_2 & -b_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix},$$

和 skew-symmetric matrices 同构的是
bivector $B_{23}\mathbf{e}_{23} + B_{31}\mathbf{e}_{31} + B_{12}\mathbf{e}_{12}$. 磁场B!

$$B = \begin{vmatrix} 0 & B_{12} & -B_{31} \\ -B_{12} & 0 & B_{23} \\ B_{31} & -B_{23} & 0 \end{vmatrix}$$

四元数有四元数和
spinor 两种operands
→量子场论

哈密顿与电磁学的语言

1846年，哈密顿甚至引入了微分矢量算符 del

$$\nabla = i \frac{d}{dx} + j \frac{d}{dy} + k \frac{d}{dz},$$

$$\text{Laplacian } \nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \left(\frac{d}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d}{dz}\right)^2$$

这些美丽的竖琴($\nu\alpha\beta\lambda\check{\alpha}$)是电-动力学的新翅膀。

Letter from William Robertson Smith to Peter Guthrie Tait, 10 November 1870: My de propose for ∇ is, as you will remember, **Nabla**... In Greek the leading form is $\nu\alpha\beta\lambda\check{\alpha}$... As of harp and is said by Hieronymus and other authorities to have had the figure of ∇ (an in The unit vectors $\{i, j, k\}$ were originally right versors in Hamilton's quaternions.



哈密顿与电磁学的语言

$$\nabla = i \frac{d}{dx} + j \frac{d}{dy} + k \frac{d}{dz}, \quad -\nabla^2 = \left(\frac{d}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d}{dz}\right)^2$$

数学物理大致说来不过是算符 ∇ 的数学！ -亥维赛德

Physical mathematics is very largely the mathematics of ∇ . ---Oliver Heaviside



2005 哈密顿年

人们只记得2005爱因斯坦年

哈密顿与电磁学的语言

麦克斯韦引入了 curl 和 div

div $\nabla \cdot E = \rho / \epsilon_0$

curl $B = \nabla \times A$

不该一升
一降吗？

坐标反演, $A \rightarrow -A$; $B \rightarrow B$

一说 Thomson 为了表达是势函数梯度 (gradient) 的矢量, 发明了符号 $\nabla = i \frac{d}{dx} + j \frac{d}{dy} + k \frac{d}{dz}$ 。积分与路径无关的, 可表为势函数的梯度 $E = -\nabla \phi$ 。Curl 的结果仍是矢量, 是对外积又作对偶以后的结果。

Del ∇ 的三(?) 种模式 散度，旋度； 梯度
 $\nabla \cdot A, \nabla \times A; \nabla \varphi$

Del ∇ is vector, a multivector of grade -1.

Geometric product = **inner** product + **outer** product

$$\nabla B = \nabla \cdot B + \nabla \wedge B$$

Grade $\downarrow 1$; Grade $\uparrow 1$

Del ∇ 遇到标量 φ , grade-0, 只有 $\nabla \varphi$, grade-1.

Del ∇ 遇到矢量 A ,

$$\nabla A = \nabla \cdot A + \nabla \wedge A; \quad \nabla \times A = -i \nabla \wedge A$$

在三维空间, grade-2 $\nabla \wedge A \rightarrow \nabla \times A$ grade-1
记住: **叉乘只存在于3维空间**, 7维空间也勉强。

有人说, 如果你对量子力学不感到**困惑**, 那说明你还没**真正理解**!

我个人经历, 我学物理时就没对哪门课程不产生困惑!

IF 教书的人和用的教科书就没有一个明白的, **如果你不感到困惑, 那说明你学习时是真不走心!**

IF 万一遇到好老师、好书, 那也一时不能传达得系统、完全, 学习者依然困惑。

不会正确的数学, 学物理太耗神了!

点的代数 & 线的代数

Point algebra (电势), $\varphi_1(r) + \varphi_2(r)$, $\varphi(r, 3q) = 3\varphi(r, q)$

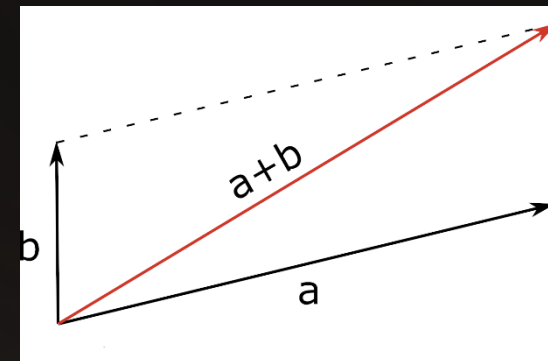
Linear algebra (线的代数), 加与乘, 与微分

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \quad \{\text{光加法就够算矢量了。想说方向得用到乘法}\}$$

线的乘法如同四元数矢量乘法 $\mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_1 \wedge \mathbf{E}_2$

Clifford 扩展成了一般意义的 **Clifford** 代数 $AB = A \cdot B + A \wedge B$

矢量乘积必须同时有内积、外积两部分！



简化只会带来更大的麻烦。
完备性才是科学最见价值的地方

...noch ist sie zu jung, um zu wissen, dass das leben nichts umsonst gibt und allem, was man vom schicksal empfangt, geheim ein Preis eingezeichnet ist.

命运的馈赠，都在暗中标上了价格

—Zweig, Marie Antoinette

其实，物理一直都在无意识地同时用内积和外积

例一、位移 r 与力 F (功与力矩)

$$rF = r \cdot F + r \wedge F$$

例二、位移 r 与动量 p (virial 与角动量)

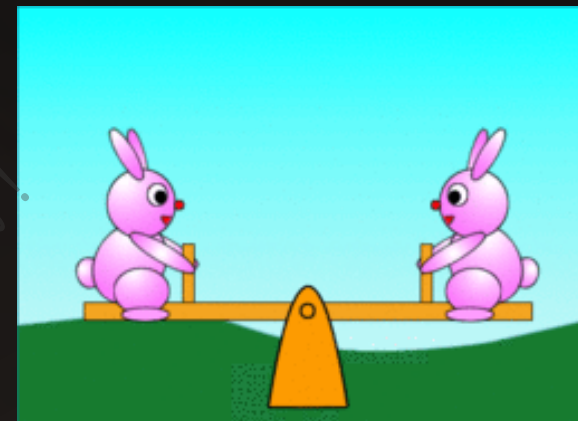
$$rp = r \cdot p + r \wedge p$$

所谓暗物质

例三、电场强度 E 与电极化 P

$$PE = P \cdot E + P \wedge E$$

$U = -P \cdot E$ 是势能, $\tau = P \times E$ 是转动力矩



带入洛伦兹力
 $f = q(E + v \times B)$

磁矢势 A

Neumann 1845; Weber 1846; Thomson 1847 提出.

针对高斯定理
可引入磁矢量 A , $\nabla \cdot B = 0$
 $B = \nabla \times A$

$$B = \nabla \times A; \quad E = -\nabla\varphi - \partial A / \partial t$$

$$(E, B) \rightarrow (\varphi; A_x, A_y, A_z)$$

磁矢势可以由电流矢量直接得到

$$A(r, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{j(r', t)}{|r - r'|} d^3x'$$

4维时空面法向
正好6-分量

1856年, 麦克斯韦把法拉第的电紧张强度(electrotonic intensity) 指认为 磁矢势 A ,

$$E = -\dot{A}$$

到1860年代 电磁学 充分发展，在孕育突破

Gauss's law

高斯定律

$$\nabla \cdot E = \rho / \epsilon_0$$

Gauss's law for magnetism

高斯磁定律 (1835, 1867?)

$$\nabla \cdot B = 0$$

Faraday's law of induction

法拉第感应定律

$$\nabla \times E = -\partial B / \partial t$$

Ampère's **circuital** law

安培**环路**定律

$$\nabla \times B = \mu_0 j$$

不过是内积和外积，不过是因果率表达，不过是运动电 (ρ, j) 的现象. 运动的电要满足连续性方程

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot j = 0, \text{ 这是普适性的定律!}$$

D, 1864
Maxwell

$$\nabla \cdot D = \rho$$

$$\nabla \cdot B = 0$$

$$\nabla \times E + \frac{\partial B}{\partial t} = 0$$

$$\nabla \times H = j$$

Oliver Heaviside 1884年形式

电磁学视角下的物质

绝缘体 绝缘体让我们发现了电。 强电场下可以被击穿.

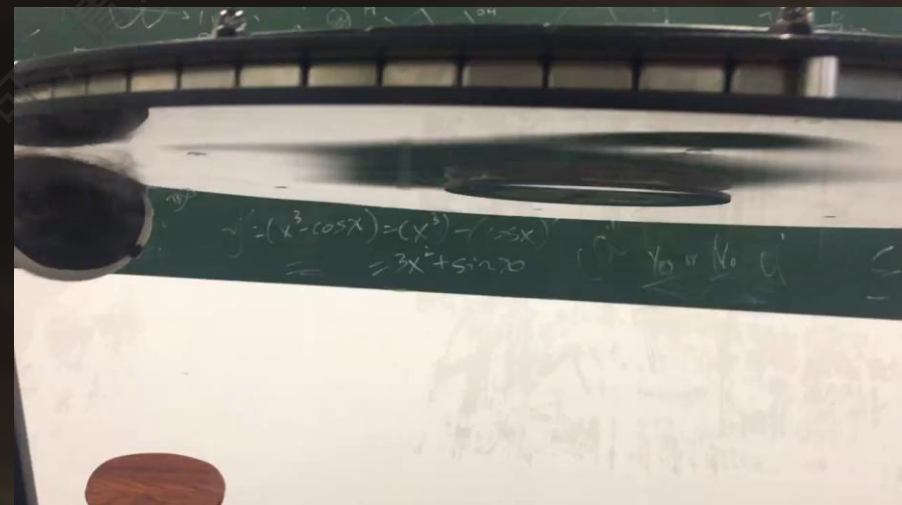
半导体 (1910)

导体 $D = 0$

超导体 (1911) $B = 0$ Meissner effect

真空 $\chi = 0$

真空是电介质，是Maxwell, Hertz 认识到的！



介质电磁学的流体类比

不可压缩流，速度大小同该处流线组成的细管的横截面积成正比。

Circuital vector 都有这个特征。

法拉第磁力线所表示的矢量，正好用来表示磁感应 B

Faraday的磁力线是 **B** ，电力线是 **D** ，同不可压缩流的速度相类比。

(B, D) 和 (E, H) 之间的区别是考虑还是不考虑介质存在的关系

在free aether 中， $\nabla \cdot E = 0$ ；如果存在不同的介质， $\nabla \cdot (\epsilon E) = 0$ ，即计及了不同介电常数的差异， **ϵE is circuital**，才是环路的(开路试试)，无散的！

E 英文里叫电通量，现在叫电场强度。 D 在英文里叫电位移，在德语里叫电通量 (elektrische Fluss)

(介磁)Permeability, (介电)Permittivity, (感应系数) Susceptibility 词辩

Per = through, forward. Permit, permeare, 穿过

参考“穿堂风，建筑拥有穿堂风的能力”等情景

Permeability 一词出现于1773. 1872年 William Thomson (开尔文) 用于磁学

Permittivity 于 1880s 由 Oliver Heaviside 引进, to complement Thomson's "permeability".

Susceptibility, 感受能力, capability of receiving impressions or being influenced, 约出现于1640s

电磁学, 从研究进程看, 磁在前, 电在后。

$$B = \mu_r \mu_0 H$$

$$M = \chi_m H$$

$$\mu_r = 1 + \chi_m$$

$$D = \epsilon_r \epsilon_0 E$$

$$P = \chi \epsilon_0 E$$

$$\epsilon_r = 1 + \chi$$

μ_0, ϵ_0 , 是一元数.

$\mu = \mu_r \mu_0$, $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$
是复杂的张量

$$M = \chi_m H, \quad P = \chi \epsilon_0 E$$

刺激-响应理论, 因果律

电介质与介电常数

q

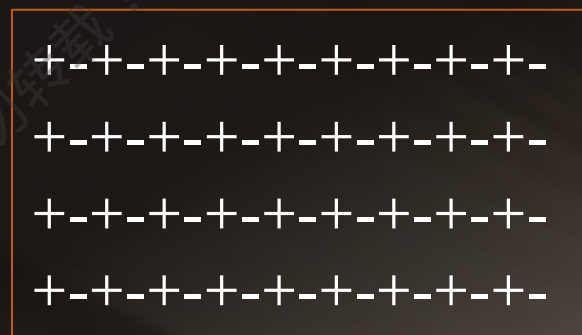
q'

$$f = q \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

常数 ϵ_0 的数值依赖于采用的单位，重要的是量纲！
它是电的物理，不是材料性质。

$$f = q \frac{1}{\epsilon} \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 r^2} \text{ 存疑！比例因子在分母上就诡异。}$$

q



q'

两种方式 (1) $f = q \frac{1}{\epsilon_r} \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 r^2}$; (2) $f = q \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 r^2} + q \frac{Q_d}{4\pi\epsilon_0 r_d^2}$; $\sum Q_d = 0$

第一种方案含糊， $r_f + r_d = r$ ；如何在力表达式和势能表达式中用 $r_f + \epsilon_r r_d$ ？

第二种方案，关键是同样的电荷分布，可能那物质的介电常数是不一样的！相对介电常数描述材料对电的响应，是个张量。 $P = \chi\epsilon_0 E$

介质电磁学

$D = \epsilon_0 E + P$ 里的加法是什么意思？

电介质：玻璃，陶瓷，云母，纸，
半导体的depletion region

金属面对电场能进入松弛态 $D = 0$

$D = \text{const.}$

介
质

$E_{vac} > E_{die}$

介
质

$P_{vac} = 0$

介
质

平行板电容器

电磁学的本构方程

$$\begin{aligned}D &= \varepsilon_0 E + P \\B &= \mu_0 (H + M) \\P &= \chi \varepsilon_0 E\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}D &= \varepsilon_0 E + P \\H &= B/\mu_0 - M \\M &= \chi_m H\end{aligned}$$

$$P = \varepsilon_0 (\chi^{(1)} E + \chi^{(2)} EE + \dots)$$

M 和形状有关，这？

描述电磁介质需要 (E, D) 和 (H, B)

Carlo A. Gonano, Riccardo E. Zich, and Marco Mussetta, Definition for Polarization P and Magnetization M Fully Consistent with Maxwell's Equations, Progress in Electromagnetics Research B 64, 83-101 **(2015)**.

电磁场的能量密度与能流

一个场体系的能量等于将其建立起来所做的功。

Energy is a physical quantity, not an entity
能是一种物理量，不是物理实体-Cao

$$\begin{aligned} \text{做功功率, } \frac{dW}{dt} &= \int_{\Omega} J \cdot E d^3x \\ &= \int_{\Omega} E \cdot \left(\nabla \times H - \frac{\partial D}{\partial t} \right) d^3x \\ &= - \int_{\Omega} \left(\nabla \cdot (E \times H) + E \cdot \frac{\partial D}{\partial t} + H \cdot \frac{\partial B}{\partial t} \right) d^3x \end{aligned}$$

$$\text{由 } \frac{\partial u}{\partial t} = E \cdot \frac{\partial D}{\partial t} + H \cdot \frac{\partial B}{\partial t}$$

对于“单纯”介质

$$u = \frac{1}{2} (E \cdot D + H \cdot B)$$

$$\text{记 } \frac{\partial u}{\partial t} = E \cdot \frac{\partial D}{\partial t} + H \cdot \frac{\partial B}{\partial t}; \quad S = E \times H$$

$$\text{得“连续性”方程 } \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot S = -J \cdot E$$

最让麦克斯韦激动的发现：

Vacuum is a dielectric!

真空是一种“很单纯的”电磁介质

H 和 B 是啥关系？

Maxwell: B and H are quantities of a different kind.

Hertz (1890): For the determination of the electrical and the magnetic state (in the ether) the specification of *a single directed quantity is sufficient* to determine completely the change of state under consideration.

1932年7月，meeting of British and Continental physicists 投票：9人认为B 和 H 是本性不同的，3人认为B 和 H 是本性相同的量。

1936年 International electrotechnical commission 建议在cgs单位制中，B的单位是Gauss, H的单位是Oersted, 而它们的数值是一样的。一样的！
朋友，你为B和H是什么样的物理量困惑过吗？

电动力学结构的我的理解

舞台、时空： $(t; x, y, z) \rightarrow (ct; x, y, z)$

角色是运动的电： $(\rho; j)$ 连续性 $\partial \rho + \nabla \cdot j = 0$

电表现出势： $(\varphi; A)$

表达因果律、变化： $\left(\frac{\partial}{\partial t}; \nabla\right)$

介质的电磁量：有电、有磁；因为是场，类强度量和类广延量
所以有 (E, D) 和 (H, B) . 至于它们的本构关系
是什么样的，花样繁多，从前的概念很幼稚、很有用。

麦克斯韦

On Faraday's lines of force (1855-1856);

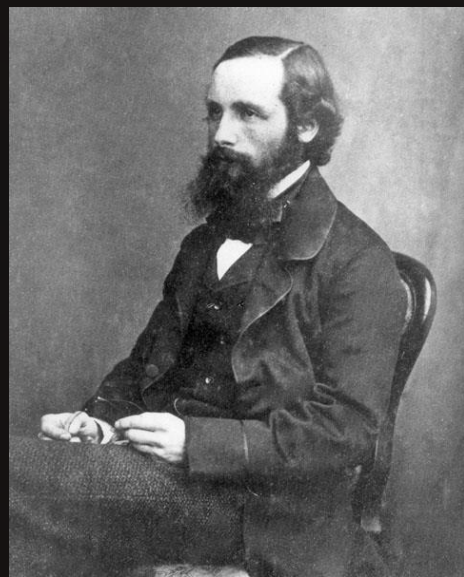
On physical lines of force (1861-1862); 20个方程

A dynamical theory of the electromagnetic field (1864).

方程细化, 放弃力学模型 (mechanism)

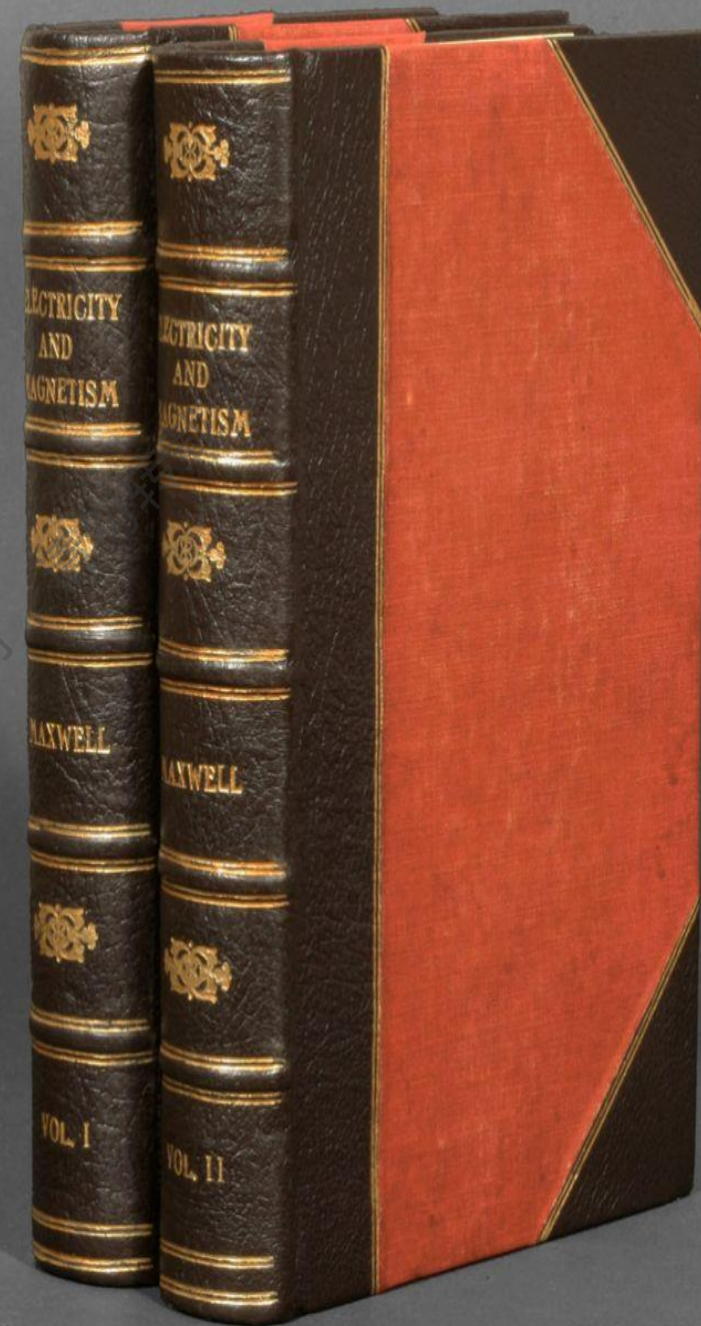
Electromagnetic field 一词儿出现

A treatise on electricity and magnetism, 2 vol.



James Clerk Maxwell
(1831-1879) 13岁写出
鸡蛋方程, 后来拍出
第一张彩照

参阅《一念非凡》



电的动力学 (electrodynamics)

随时间变化的电磁场的方程

Coulomb's law $\nabla \cdot D = \rho$

Gauss' law $\nabla \cdot B = 0$

Faraday's law $\nabla \times E + \frac{\partial B}{\partial t} = 0$

Ampère's law $\nabla \times H = j$

不对劲儿

Ampère's law 意味着 $\nabla \cdot j = 0$, 而连续性方程为 $\nabla \cdot j + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

电的动力学 (electrodynamics)

论起玩方程，麦克斯韦
13岁上就是一流专家

Maxwell's equations

Coulomb's law

$$\nabla \cdot D = \rho$$

Gauss' law

$$\nabla \cdot B = 0$$

Faraday's law

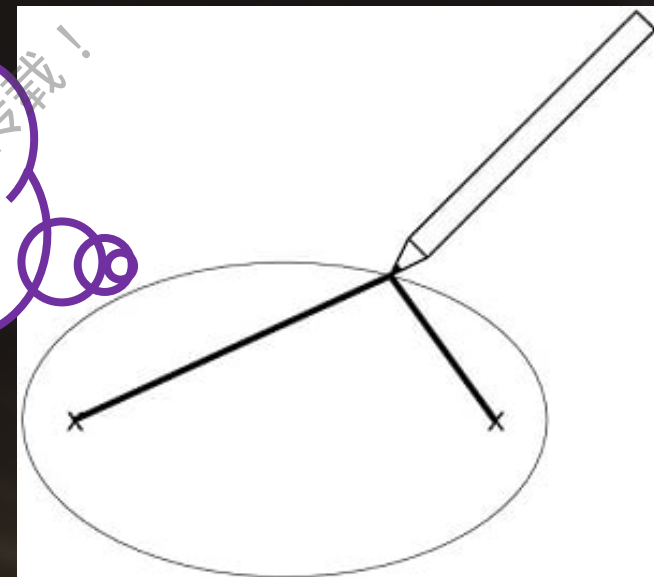
$$\nabla \times E + \frac{\partial B}{\partial t} = 0$$

Ampère's circuital law

$$\nabla \times H = j + \frac{\partial D}{\partial t}$$

连续性方程为 $\nabla \cdot j + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

方程不光是用来
解的，它还是用
来玩的！传统被
Dirac 继承



$$\begin{aligned} \ell_1 + \ell_2 &= c \\ 1 \times \ell_1 + 1 \times \ell_2 &= c \end{aligned}$$

$$1 \times \ell_1 + \mathbf{a} \times \ell_2 = c$$

电的动力学 (electrodynamics)

Maxwell's equations——Microscopic edition

Coulomb's law

$$\nabla \cdot \mathbf{e} = \eta / \epsilon_0$$

Gauss' law

$$\nabla \cdot \mathbf{b} = 0$$

Faraday's law

$$\nabla \times \mathbf{e} + \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} = 0$$

Ampère's circuital law

$$\nabla \times \mathbf{b} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t}$$

μ_0, ϵ_0 是常数，一元数。

$\mu_0 \epsilon_0 = 1/c^2$, c is light velocity in free space

$\sqrt{\mu_0 / \epsilon_0}$: impedance of free space

麦克斯韦方程组

$$\begin{aligned}\nabla \cdot E &= \rho / \epsilon_0 \\ \nabla \cdot B &= 0 \\ \nabla \times E &= -\partial B / \partial t \\ \nabla \times B &= \mu_0 j\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla \cdot D &= \rho_f \\ \nabla \cdot B &= 0 \\ \nabla \times E + \frac{\partial B}{\partial t} &= 0 \\ \nabla \times H &= j_f\end{aligned}$$

方程组和 $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot j = 0$ 不自洽!
麦克斯韦修正后得名 麦克斯韦方程组
成了电-动力学的主角

$$\begin{aligned}\nabla \cdot E &= \rho / \epsilon_0 \\ \nabla \cdot B &= 0 \\ \nabla \times E &= -\partial B / \partial t \\ \nabla \times B &= \mu_0 j + \mu_0 \epsilon_0 \partial E / \partial t\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla \cdot D &= \rho_f \\ \nabla \cdot B &= 0 \\ \nabla \times E + \frac{\partial B}{\partial t} &= 0 \\ \nabla \times H &= j_f + \partial D / \partial t\end{aligned}$$

注：很长一段时间内文献中用 curl, div 的字样而非 $\nabla \cdot$, $\nabla \times$ 。此处统一用 $\nabla \cdot$, $\nabla \times$ 形式

关于麦克斯韦方程(组)不得不说的问题

因为

1. 采用的单位制的不同；
2. 考虑或不考虑介质、源的情形；
3. 一些项放在等号哪一侧的不同；
4. 积分或微分表示的不同；
5. 采用宏观量还是微观量的不同；
6. 使用数学语言的不同 (矢量、张量、几何代数、时空几何...);
7. 放置顺序的不同；
8. 四个物理量角色认识与关联的不同； 等等

几何代数
麦克斯韦方程

$$\nabla F = J$$

你会见到千奇百怪的麦克斯韦方程(组)的写法，这里只是冰山一角。
2023年我计划撰写 200页左右的关于 麦克斯韦方程(组)的文章

洛伦兹力

电荷 面对 电场

$$f = qE$$

电流 面对 磁场

$$f = Il B$$

电荷 面对 磁场

$$f = qv \times B$$

1895, 洛伦兹力

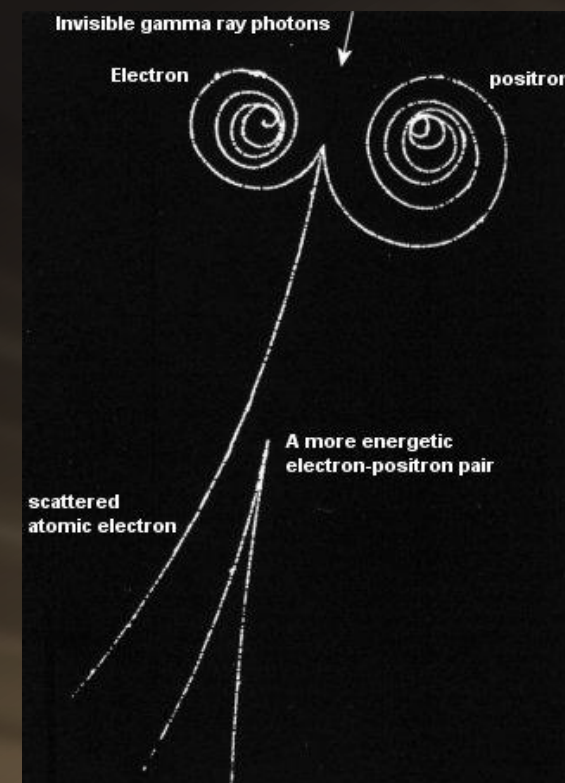
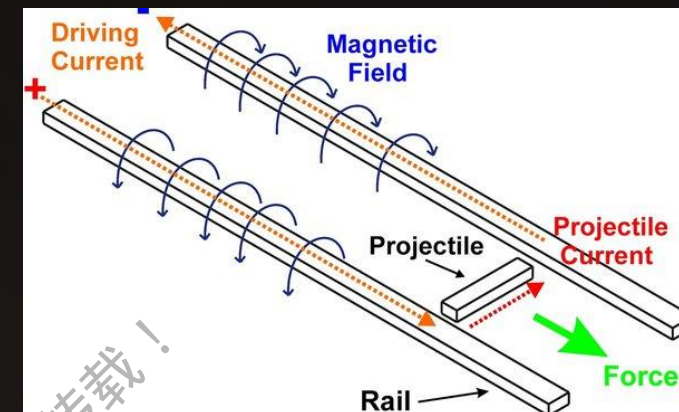
$$f = q(E + v \times B)$$

思考题

$f = q(E + v \times B)$ 中, E, v 是矢量, B 是什么?

速度相对性只影响 $v \times B$, 不影响 E ?

在张量表示 $F^{\mu\nu}$ 中, E, B 的形式等价? $E + iB$ 如何理解?



电磁场的角动量

$dr \cdot f$ 做功, 改变能量; $r \times f$ 力矩, 改变角动量.

$$L_{em} = \frac{1}{c^2} \int \mathbf{x} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) d^3x$$

从角动量守恒, 汤姆孙得到了力 $q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$.

J. J. Thomson, Elements of the mathematical theory of electricity and magnetism, CUP, third edition (1904)

经典电动力学框架理论

麦克斯韦方程组

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}_f + \partial \mathbf{D} / \partial t$$

连续性方程

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$$

洛伦兹力

$$\mathbf{f} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

麦克斯韦方程组 —(E, B)

$$\nabla \cdot E = \rho / \epsilon_0$$

$$\nabla \cdot B = 0$$

$$\nabla \times E + \partial B / \partial t = 0$$

$$\nabla \times B = \mu_0 j + \mu_0 \epsilon_0 \partial E / \partial t$$

$$\nabla \cdot D = \rho_f$$

$$\nabla \cdot B = 0$$

$$\nabla \times E + \frac{\partial B}{\partial t} = 0$$

$$\nabla \times H = j_f + \partial D / \partial t$$

真空中源的情形

$$\nabla \cdot E = 0$$

$$\nabla \cdot B = 0$$

$$\nabla \times E + \partial B / \partial t = 0$$

$$\nabla \times B = \mu_0 \epsilon_0 \partial E / \partial t$$

直接对E, B使用如下公式

$$\nabla \times \nabla \times A = \nabla(\nabla \cdot A) - \nabla^2 A$$

$$\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - \nabla^2 E = 0$$

$$\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} - \nabla^2 B = 0$$

麦克斯韦方程组— (φ, A)

电磁 4-vector (φ, A)

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

$$(\varphi, A) \rightarrow (\varphi - \partial\chi/\partial t, A + \nabla\chi)$$

$$\begin{aligned}\varphi &\rightarrow \varphi - \frac{\partial\chi}{\partial t} \\ A &\rightarrow A + \nabla\chi\end{aligned}$$

变换叫规范变换 (gauge transformation);

函数叫规范函数 (gauge function);

电磁势规范变换说明它有个自由度;

这个自由度有时候可以花掉 (选择规范)

有自由度的电磁势也是真实的, A-B effect;

引力也有规范变换 → 规范场论

规范原理 → 理论就该有规范自由度

麦克斯韦方程组— (φ, A)

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$$

$$\begin{aligned} \nabla \left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) &= \nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} + \mu_0 \mathbf{j} \\ -\frac{\partial}{\partial t} \left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) - \nabla^2 \varphi + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= \rho/\epsilon_0 \end{aligned}$$

$$\text{记 } \mu_0 \epsilon_0 = 1/c^2$$

丹麦人 Ludvig Lorenz (1829-1891) 规范

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{j}$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \nabla^2 \varphi = \rho/\epsilon_0$$

很物理的 (φ, A) 的时空变化

还有Coulomb 规范 $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, 等等.

麦克斯韦方程组— (φ, A)

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - \nabla^2 A = \mu_0 j$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \nabla^2 \varphi = \rho / \epsilon_0 \dots$$

波动方程
有电磁波？

此前Maxwell
认识到
真空是介质！

真空、无源

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - \nabla^2 A = 0$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \nabla^2 \varphi = 0$$

这是真空里
的波动？

$\mu_0 \epsilon_0 = 1/c^2$ ， $c \sim 27$ 万公里/秒。麦克斯韦：光是电磁波？

这里的速度没有参照哇！光速是绝对的！约30年后有了相对论

对超距作用(Action-at-a-Distance)的疑心

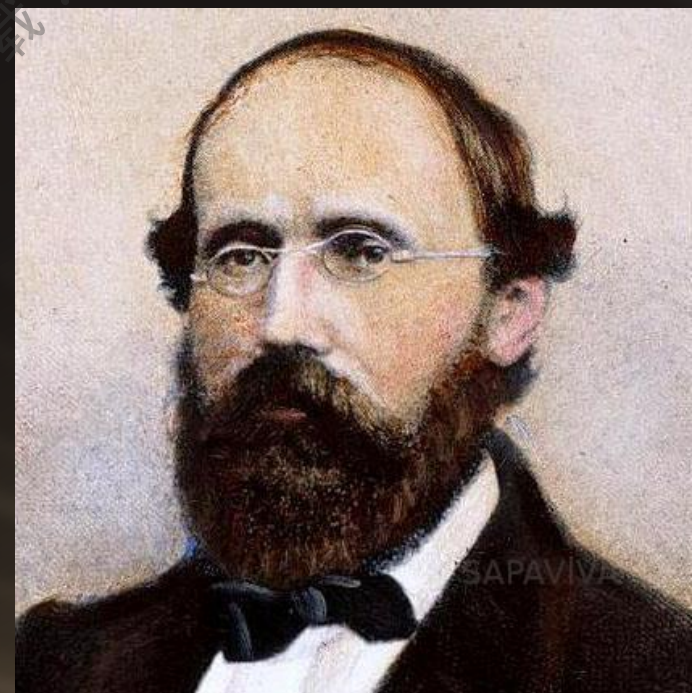
在静电势里**没有时间**的问题。光、电都在产生、湮灭中。
光有传播(速度)的问题。**那电荷间的作用也该有速度？**

1845年，高斯老师说会考虑这个问题，然后，就没有然后了。

在**1867**年出版的黎曼 文章中，出现了 $\nabla^2 V - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + 4\pi\rho = 0$ 对泊松方程 $\nabla^2 V + 4\pi\rho = 0$ 的替代。

如同1859年的论文贸然出现了关于几何的“Quantel”，没道理。
Gauss: Pauca sed matura **(少，但是成熟)**

曹对黎曼这两项工作的评价：**没道理但正确！**



Bernhard Riemann, 1826-1866

1870s, 电磁学不是 (流体、固体)力学, 电磁学是电磁学!

认识到电磁是一个独特的、非力学现象是一个艰难的过程;

法拉第: 电磁扰动的有限速度

1847年, Helmholtz: discharge of a Leyden jar should be oscillatory.

柏林科学院悬赏: to establish experimentally any relation between electromagnetic forces and the dielectric polarization of a non-conductor as an effect of electromagnetic induction. The magnetic lines of force cutting a dielectric causes polarization (电介质切割磁力线产生电极化)

赫兹想证实的是: variation in the polarization of material dielectrics produces a magnetic field. 开路电流

In 1887 赫兹发现, space free of matter acts as a dielectric. Displacement current (convection current, 位移电流) in a vacuum creates a magnetic field.

帝城不禁东流水,
叶上题诗寄阿谁。





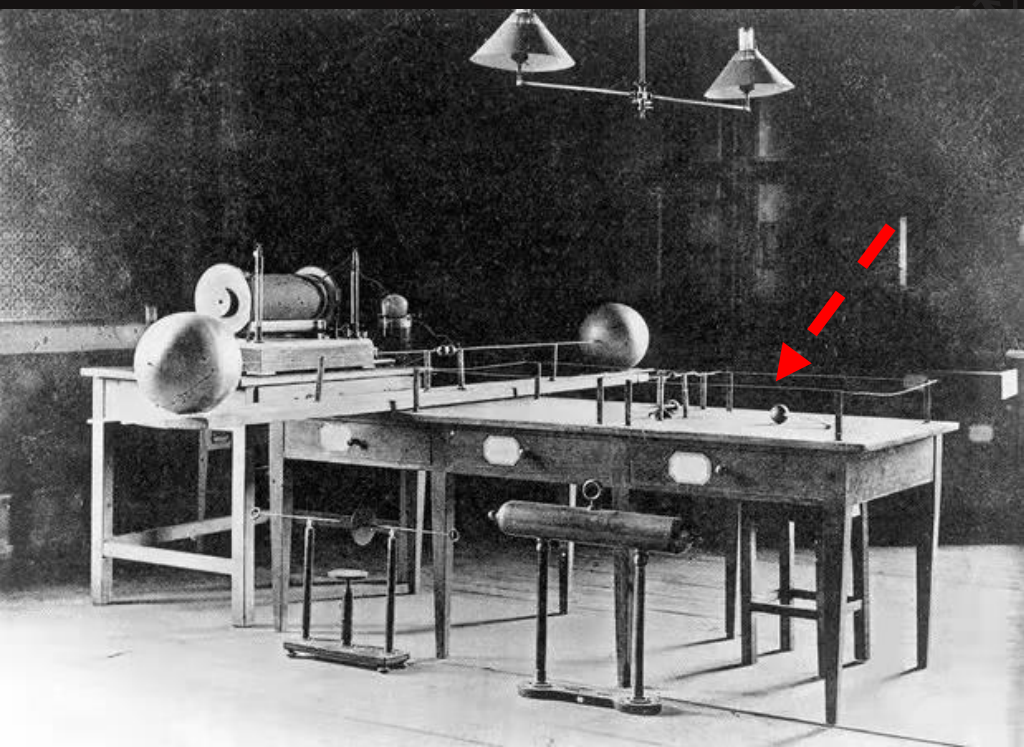
Hertz 与电磁波的发现

别炫耀啥“四大力学”，
不存在噻！

Heinrich Hertz (1857-1894), 一个天都妒的天才。

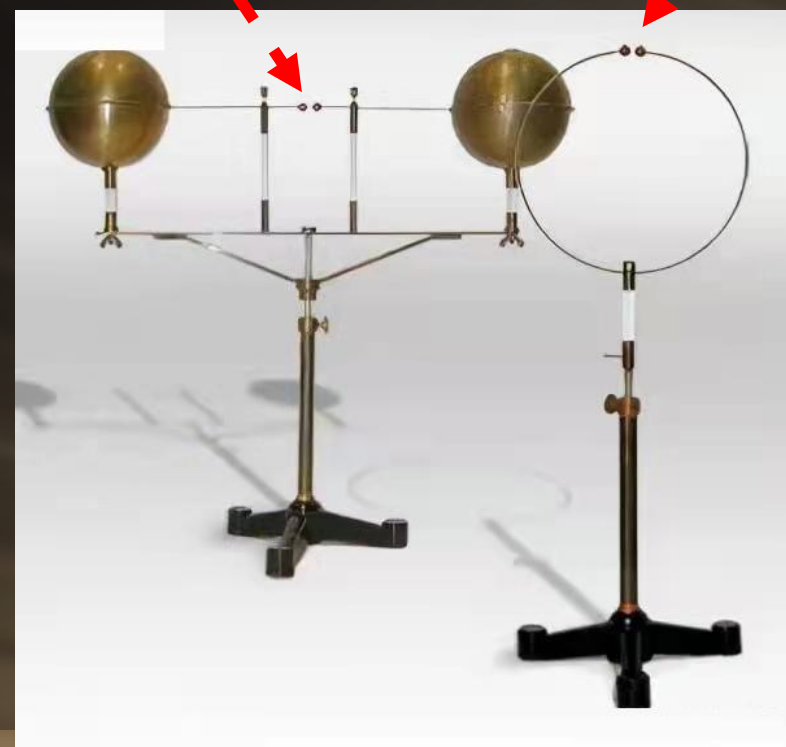
Die Prinzipien der Mechanik in neuem Zusammenhange dargestellt (力学原理新表述), 把“力”的概念踢出了物理。

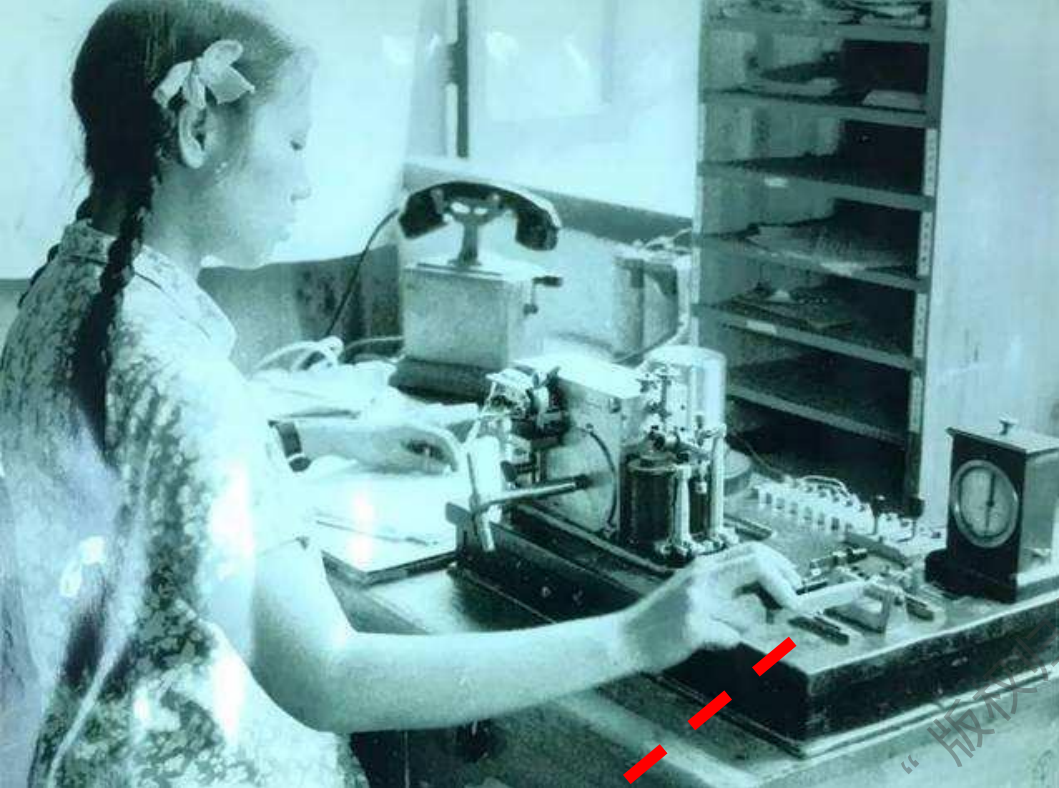
1887年, 演示开路电流效应 (球→平行板), 改变了人类社会进程。此装置直接产生了电报机, 引入了光电效应 (爱因斯坦因此获1921年度诺奖)。



交变电路打出的火花,
在一根导线连接的两个
锌球之间引起了火花

此实验中赫兹最早用的电
介质是一摞书, 有些是电
磁学书



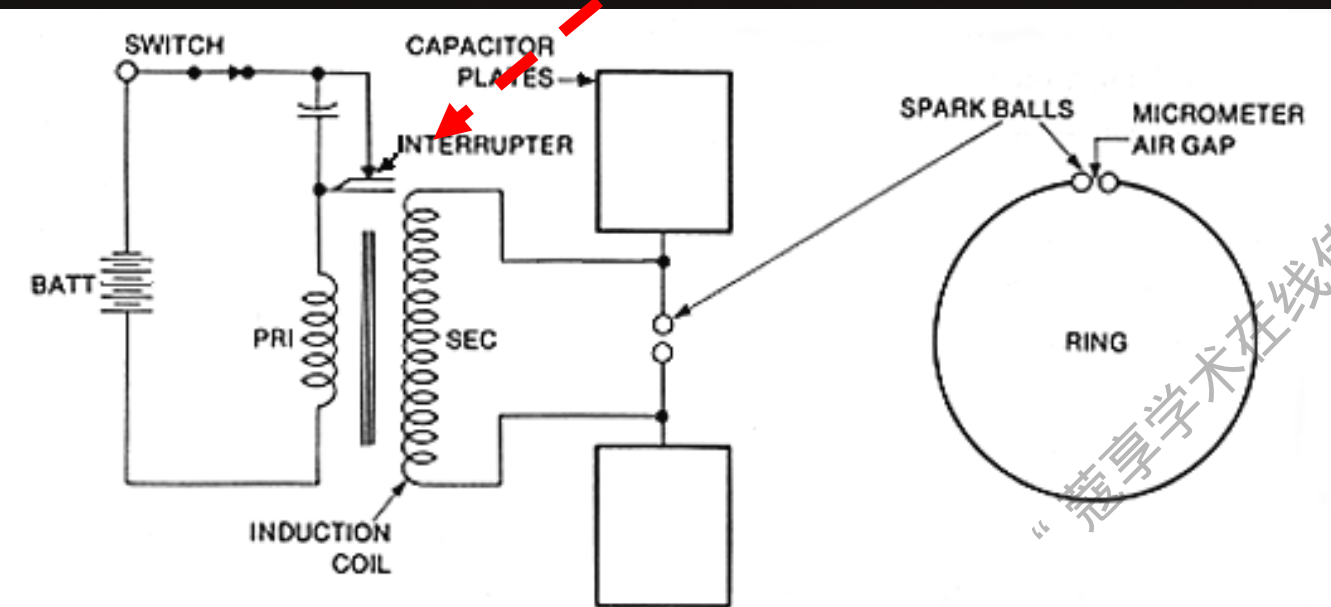


Hertz 与电磁波的发现

如果把接收装置放箱子里，且使用普通玻璃观察，**spark length** 变短。
使用石英玻璃，效果好点儿

发现光电效应：光照的锌球会带电

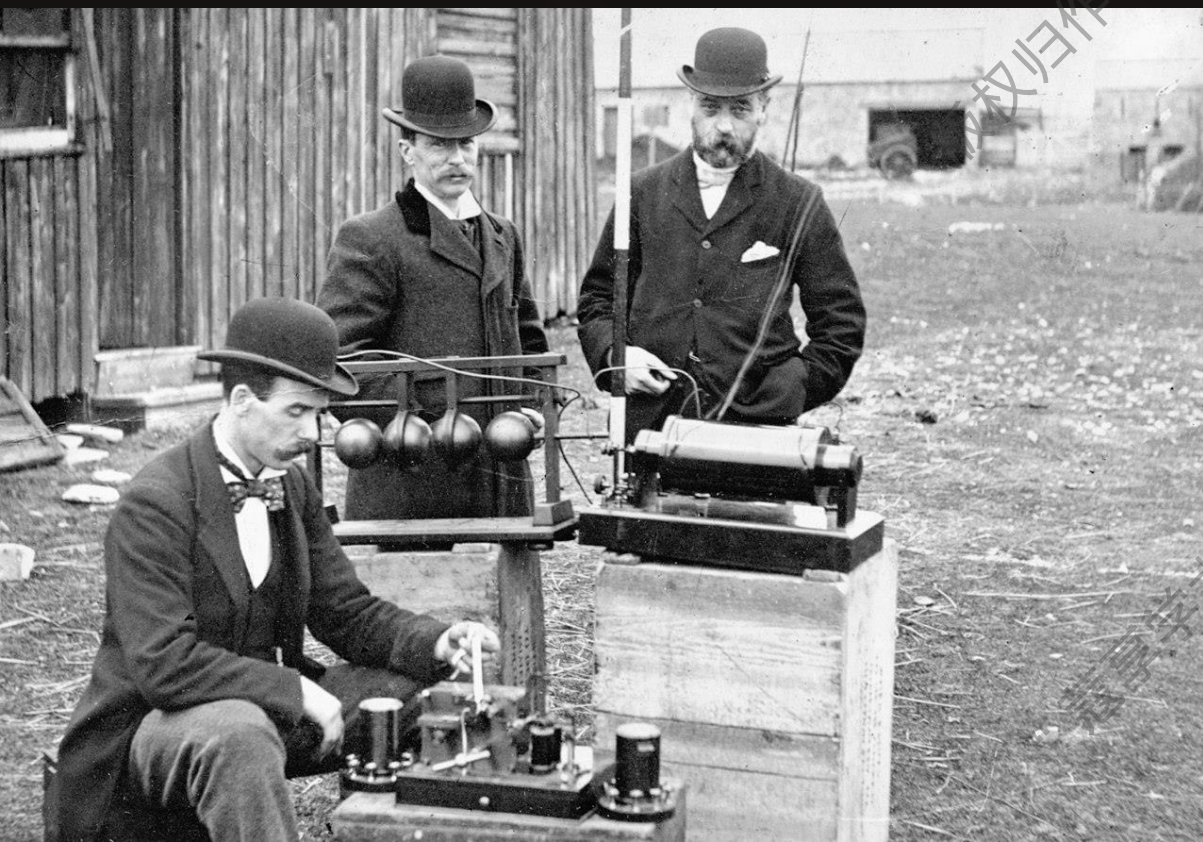
Note: 1873, Willoughby Smith discovers photoelectric effect in metals (i.e., selenium).



电磁波：无线电时代

Guglielmo Marconi (1874-1937) 发展了无线电报，获1909年诺奖

关键：天线



电磁辐射

偶极子 (天线) 辐射

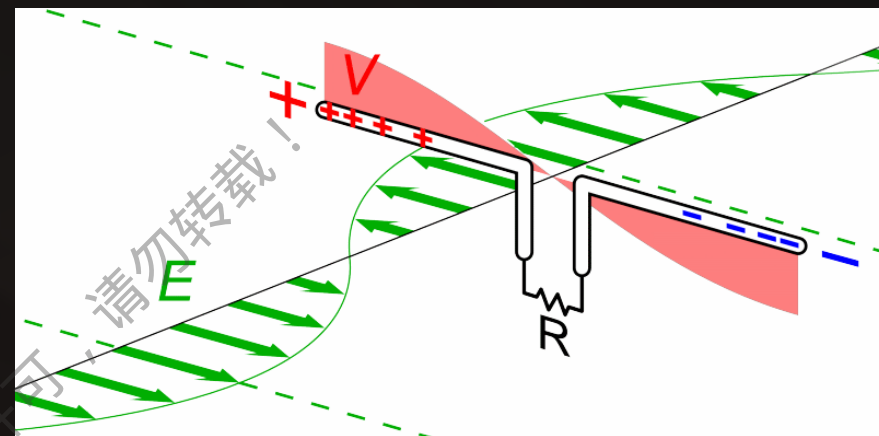
$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i\omega e^{ikr}}{r} \mathbf{p}$$

远场近似

$$\lim_{kr \rightarrow \infty} \mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \sum_n \frac{(-ik)^n}{n!} \int \mathbf{j}(\mathbf{x}') (n \cdot \mathbf{x}')^n d^3x'$$

只取 $n=0$ 第一项 $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \int \mathbf{j}(\mathbf{x}') d^3x'$

$$\int \mathbf{j}(\mathbf{x}') d^3x' = - \int \mathbf{x}' (\nabla \cdot \mathbf{j}) d^3x' = -i\omega \int \mathbf{x}' \rho(\mathbf{x}') d^3x'$$



电磁辐射

傅里叶分量，
复数表示。 Why

$$\rho(x, t) = \rho(x) e^{-i\omega t}$$

$$\mathbf{j}(x, t) = \mathbf{j}(x) e^{-i\omega t} \quad \{\text{加速电荷, 变化的电流}\}$$

Ludvig Lorenz gauge 下,

$$A(x, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3x' \int dt' \frac{\mathbf{j}(x', t)}{|x-x'|} \delta\left(\frac{|x-x'|}{c} + t' - t\right)$$

考虑正弦形式的时间依赖关系

$$A(x) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3x' \frac{\mathbf{j}(x')}{|x-x'|} e^{i\omega|x-x'|/c}$$

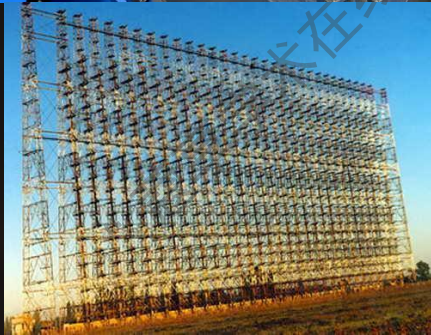
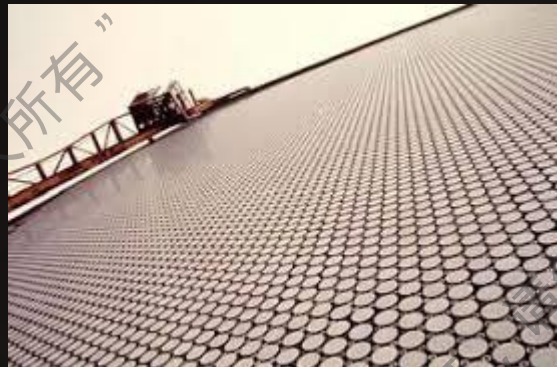
$$H = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times A; \quad \nabla \times H = -i\omega \epsilon_0 E; \quad \text{Poynting vector } \mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$$



电磁辐射天线：物理、技术与艺术

一段频率上的无线电波的天线设计
都称得上专门的研究所

尺寸：小至毫米，大至 百公里



电磁辐射

光是电磁波 ($\sim 10^2 - 10^{24} \text{ Hz}$). 每一个频率上的光都有特殊的光学

光发生的机理是多样的

1. 电荷加速(减速) 会发光。用高速电子轰击固体靶材获得的连续谱X-射线，用振荡电路产生长波电磁波、同步辐射都是这种机制；
2. 跃迁机制。燃烧过程、半导体材料发光都属于这种机制；
3. 切伦科夫辐射。当电荷在介质中速度超过介质中的光速时就会发生辐射；
4. 物质湮灭。 比如 $e^- + e^+ \rightarrow 2\gamma$
5. 核过程伴随的辐射。原子核衰变过程通常伴随 γ 光子的发射。强、电磁、弱三种相互作用可统一。

切伦科夫辐射 (Эффект Вавилова–Черенкова)

Павел Алексеевич Черенков, 1904-1990

Cherenkov 1934年

重水的蓝色观察

Frank & Tamm, 1937年

推导、解释

高速运动的带电粒子一路上抛撒能量

$$\frac{dE}{dx} = \frac{(ze)^2}{c^2} \int_{\epsilon(\omega) > c^2/v^2} \omega \left(1 - \frac{c^2}{v^2 \epsilon(\omega)} \right) d\omega$$



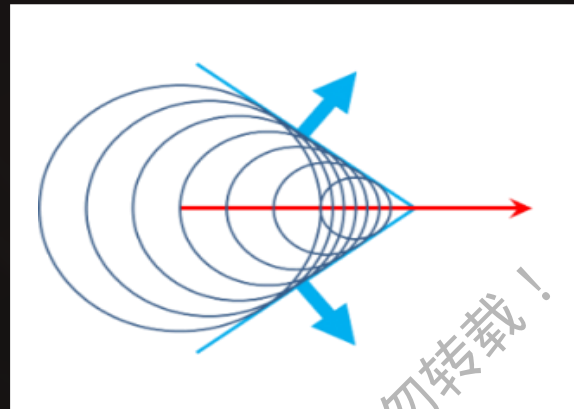
切伦科夫 辐射

在介质中运动的电荷，会遭遇各种能量损失过程， stopping power

单位路径上的能量损失 $\frac{dE}{dx}$ 可表示为对频率的积分，积分函数表达式里有个因子

$$e^{-(\lambda+\lambda^*)a}, \quad \lambda^2 = \frac{\omega^2}{v^2} [1 - v^2/\epsilon(\omega)c^2]$$

当 $v > c/\sqrt{\epsilon}$ 时， λ 是纯虚数，
衰减项 $e^{-(\lambda+\lambda^*)a} = 1$ ， 远处可见辐射。



Cherenkov radiation
切伦科夫辐射

Mach cone
马赫锥

Bow wake
船头波

这是表象， 不是物理本质

电磁场的对称性

方程不光是用来解的，甚至根本就**不是用来解的**，它是用来**玩**的！方程有价值的是它自身的结构。

$$\nabla \cdot E = \rho / \epsilon_0$$

$$\nabla \cdot B = 0$$

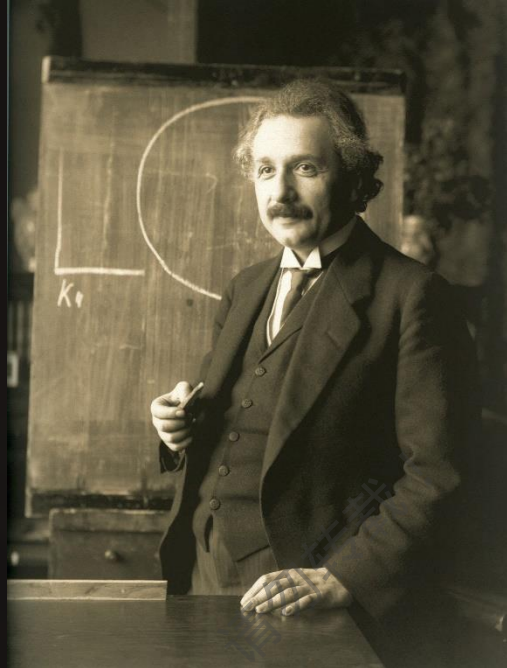
$$\nabla \times E + \partial B / \partial t = 0$$

$$\nabla \times B = \mu_0 j + \frac{\mu_0 \epsilon_0 \partial E}{\partial t}$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - \nabla^2 A = 0$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \nabla^2 \varphi = 0$$

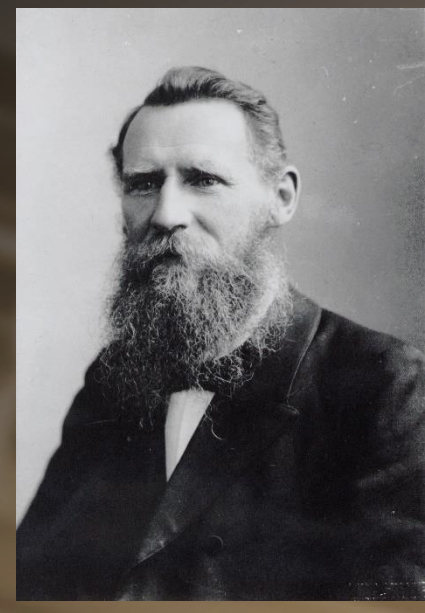
- 时间反演
- 空间反射与反演
- 空间转动
- 电磁量对偶 $E \leftrightarrow H$
- Lorentz transformation (狭义相对论)
- 规范自由度 (规范场论：电磁+引力)



Albert Einstein
Henri Poincaré



Hermann Weyl
Woldemar Voigt



Maxwell's equations 之磁单极

Magnetic Monopole 磁单极
Monopole, 单极: 一种洁白的黑。

Coulomb's law

$$\nabla \cdot D = \rho_e$$

Gauss' law

$$\nabla \cdot B = \rho_m$$

Faraday's law

$$\nabla \times E = -j_m - \frac{\partial B}{\partial t}$$

Ampère's circuital law

$$\nabla \times H = j_e + \frac{\partial D}{\partial t}$$

ρ_m 是赝标量? 那
B 是啥?

磁单极存在能解释
电荷的分立性, 那
么磁单极的分立性
是不是也得解释?

If this is true, 相对论和规范场论去哪儿找呢?

P. A. M. Dirac, Quantised singularities in the electromagnetic field, Proc. R. Soc. London 133, 60(1931); the theory of magnetic poles, Phys. Rev. 74, 817(1948). 不是 monopole

电动力学的张量表示

Lorentz Tensor 与不变量

$$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = 2(B^2 + E^2)$$

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}F^{\alpha\beta}F^{\gamma\delta} = 8(B * E)$$

$$F_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -B_z & B_y \\ -E_2 & B_z & 0 & B_x \\ -E_3 & -B_y & -B_x & 0 \end{bmatrix}$$

$$F^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -B_z & B_y \\ -E_2 & B_z & 0 & B_x \\ -E_3 & -B_y & -B_x & 0 \end{bmatrix}$$

张量的矩阵表示是个笨拙的尝试。Electromagnetic Tensor (wiki)

电动力学的张量表示

Jacobi 恒等式
反对称

$$\begin{aligned}\nabla \cdot B &= 0 \\ \nabla \times E + \frac{\partial B}{\partial t} &= 0 \\ \nabla \cdot D &= \rho \\ \nabla \times H - \frac{\partial D}{\partial t} &= j\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla \cdot B &= 0 \\ \nabla \times E + \frac{\partial B}{\partial t} &= 0 \\ \nabla \cdot D &= \rho \\ \nabla \times H - \frac{\partial D}{\partial t} &= j\end{aligned}$$

$$F_{\alpha\beta,\gamma} + F_{\beta\gamma,\alpha} + F_{\gamma\alpha,\beta} = 0$$

$$F^{\alpha\beta}{}_{\beta} = j^{\alpha}$$

其中 $j^{\alpha} = (\rho, j)$

E and D as response to the tetrad (ρ, j)

I prefer the $(x, ict), (j, icp)$ form, 此中有双四元数. The so-called Minkowski metric makes things uneasy!

时空几何下的电动力学

有自然结构的
数学

电磁学产生了 **四元数** → **Clifford 代数**，线的代数，矢量分析，几何代数

麦克斯韦方程组产生了相对论，用 **时空代数** 描述它

Clifford 代数初步 （我们生活在3维空间）

假设 有3个矢量基 $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ ，它们构成一个 2^3 -维代数

$\{1\}$,	$\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$,	$\{\sigma_1\sigma_2, \sigma_2\sigma_3, \sigma_3\sigma_1\}$,	$\{i = \sigma_1\sigma_2\sigma_3\}$
标量	矢量，线积分，	二矢量，面积分	赝标量 $ii = -1$
	构成矢量空间	构成矢量空间	

时空几何下的电动力学

Clifford 代数初步 (我们生活在3+1维时空, Minkowskii spacetime)

有4个矢量基 $\{\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$, $\gamma_\mu \cdot \gamma_\nu = \eta_{\mu\nu} = \text{diag}(+, -, -, -)$, 构成 2^4 -维代数

$\{1\}$,	$\{\gamma_\mu\}$,	$\{\gamma_\mu \wedge \gamma_\nu\}$,	$\{I\gamma_\mu\}$,	$\{I = \gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3\}$
标量	4个矢量,	6个二矢量,	4个三矢量	赝标量 $I^2 = -1$

可巧不巧, 6个二矢量可以分成两组三矢量 $\gamma_k \wedge \gamma_0$ 和 $\gamma_i \wedge \gamma_j$; 而 $\gamma_k \wedge \gamma_0$ 可以作为三维Clifford代数的生成元, 导出相对矢量代数

关于电磁学量 (E, B) 的困惑在这里能找到解释。

时空几何下的电动力学

相对矢量和相对二矢量都是时空二矢量

定义法拉第二矢量 (Faraday bivector)

$$\mathbf{F} = \mathbf{E} + I\mathbf{B}$$

相对论洛伦兹公式: $\frac{dP}{d\tau} = \dot{p} \wedge \gamma_0 = q\{(\mathbf{E} + I\mathbf{B}) \cdot \mathbf{v}\} \wedge \gamma_0$

真空中(取 $\mu_0 = \varepsilon_0 = 1$)的麦克斯韦方程组为

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho,$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \wedge \mathbf{E} = -\partial_t(I\mathbf{B}),$$

$$\nabla \wedge \mathbf{B} = -I(\mathbf{J} + \partial_t \mathbf{E}),$$

这里的 I 是三维相对矢量空间的赝标量,也是时空赝标量, $\nabla = \sigma_i \partial_i = \gamma_i \gamma_0 \partial_i$

时空几何下的电动力学

麦克斯韦方程

法拉第 二矢量 $\mathbf{F} = \mathbf{E} + I\mathbf{B}$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho,$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \wedge \mathbf{E} = -\partial_t(I\mathbf{B}),$$

$$\nabla \wedge \mathbf{B} = -I(\mathbf{J} + \partial_t \mathbf{E}),$$

$$\tilde{\nabla}^2 \mathbf{F} = \tilde{\nabla} \cdot \mathbf{j} + \tilde{\nabla} \wedge \mathbf{j}$$

写成几何积的形式,

$$\nabla E = \rho - \partial_t(I\mathbf{B}),$$

$$\nabla(I\mathbf{B}) = -\mathbf{J} - \partial_t \mathbf{E}.$$

$$\tilde{\nabla} F = j$$

$$F_{\alpha\beta,\gamma} + F_{\beta\gamma,\alpha} + F_{\gamma\alpha,\beta} = 0$$
$$F^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = j^{\alpha}$$

低层次上的百思不得其解，不过是高层次上的一目了然。

必须有 $\tilde{\nabla} \cdot \mathbf{j} = 0$ 。这是连连续性方程 $\nabla \cdot \mathbf{j} + \partial \rho / \partial t = 0$ 都自然捎上了！
麦克斯韦把它改成和连续性方程一起的形式，现在我们明白是连续方程进入其中了

$$\text{矢量几何积 } \mathbf{A}\mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$$

场与粒子

1665 Newton, Universal gravitation

1785 Coulomb, electrostatic interaction

同心球面，向外辐射(矢量)/守恒→平方反比律

法拉第：电磁场。

1887-1888年，电磁波，光是电磁波

1897年, J. J. Thomson 发现电子。Atomicity of electricity

1900年，普朗克光量子

1926，薛定谔电子的方程；化学家 Louis 造Photon 一词

1927，泡利电磁场中电子的方程



Field, 场(cháng), 地, 场地(chǎngdì)

电(原)子→电磁场/光→光量子

问世界，粒子和场是啥关系？

如何理解电(原)子,它从哪里来?

1. 在气体放电中, 电子只是和离子实分离来;
2. 在光电效应中, 电子只是从固体里被轰击出来;
3. 作为 β -射线, 从核子(中子)中来, 比如 $n \rightarrow p + e + \bar{\nu}_e$;
4. 电子对从光而来, 又湮灭为光

$$\gamma + N_{euc.} \rightarrow N_{euc.} + e^+ + e^-$$

$$e^+ + e^- \rightarrow 2\gamma$$

光是电磁波, 是电荷的辐射。那么电荷和辐射场怎么相互作用呢?
这个理论既要是相对论的, 又要是量子力学的!

量子& 量子电动力学

1859年	德国人黎曼说几何有 Quantel.
1877年	奥地利人 玻尔兹曼 说 分子动能可以quantized.
1900年	德国人 普朗克说光能量是量子化的, $\varepsilon = h\nu$.
1913年	丹麦人 玻尔说电子的轨道角动量可以quantized, $\oint p dx = nh$.
1923-24年	法国人 德布罗意说 电子是波.
1924年,	Quantenmechanik 一词正式出现.
1925年	德国人 约当 正则量子化, $xp - px = i\hbar$.
1926年	奥地利人薛定谔的薛定谔方程, 单分量 $i\hbar\partial_t\psi = \hat{H}\psi$.
1927年	奥地利人泡利的二分量方程, $i\hbar\partial_t \psi\rangle = \left[\frac{1}{2m}(\sigma \cdot (p - qA))^2 + q\phi\right] \psi\rangle$.
1927年	英国人 狄拉克, 辐射的发射与吸收, 量子电动力学/场论
1928年	英国人 狄拉克的狄拉克方程, 双旋量, $i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu\psi = mc\psi$

光的能量量子化, 电子在电磁场中能量的量子化, 电荷的量子化。

电磁场量子化是不是也算个问题?

Quantum Electrodynamics: Who made it?

Pascual Jordan

Dirac

Heisenberg

Pauli

Oscar Klein

Wigner

Tomonaga (朝永)

Schwinger

Feynman

Dyson

Weinberg

1. 为什么要有QED? 用量子化理解基本粒子的存在,
电子与辐射的作用是咋回事?

2. QED 如何做?

3. QED 有什么结果?

4. QED 有什么问题?

By mid-1928 both Heisenberg and Pauli were pessimistic about the prospects of obtaining a satisfactory QED.

第一步：电磁场的量子化

光子态

$m = 0$ (从哪里来?)

$$H|k, \sigma\rangle = \hbar ck|k, \sigma\rangle$$

$$p|k, \sigma\rangle = \hbar k|k, \sigma\rangle$$

$$S_z|k, \sigma\rangle = \pm|k, \sigma\rangle$$

这是关于光子状态该有的性质, 要求在先?

把场用基函数展开, 然后把系数当算符? 强加对易关系。这算符是产生算符、湮灭算符。A creation operator creates a particle in the corresponding basis function and an annihilation operator annihilates a particle in this function.

Second quantization: quantization of Wave function. (Heisenberg representation)

Maxwell equations 解的量子化也叫二次量子化?? 矢量势的傅里叶分量的量子化。

狄拉克一开始是量子化电磁场模的相位与模的能量。咋回事?

第一步：电磁场的量子化

采用库伦规范 $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ 明确 $\mathbf{A}$ 是 transvers field, 然后就可以说它们是两种横波模式。无源的情形 φ 是常数, $\nabla\varphi = 0$ 。

用平面波展开磁矢势。因为平面波全空间不能做展开, 于是在立方体 L^3 中展开. 这样波矢 $\mathbf{k}$ 是分立的, $k_x = 2\pi/L \dots$ (可以谈论波的模式)

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}} (a_{\mathbf{k}}(t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} + c.c.) \quad \{\text{有的会强调两种偏振}\}$$

把系数算符化, 引入谐振子量子化程序

$$[a(\mathbf{k}), a(\mathbf{k}')] = 0; [a^+(\mathbf{k}), a^+(\mathbf{k}')] = 0; [a^+(\mathbf{k}), a(\mathbf{k}')] = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'};$$

量子化的是基
展开系数,
这种算符是特
殊的算符

构造物理理论就要大胆地胡乱拼凑, 万一提供了某种让人舒服的解释 (即便是错的!) 或者启发你认识到了新的观念、新的存在, 那就是成功。

第一步：电磁场的量子化

$$H = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}p^2$$

$$H = \frac{1}{2}\epsilon_0 \iiint (E^2 + c^2 B^2) dV$$

电磁理论、光电效应和
黑体辐射在前，照猫画虎

$$H = \sum_k \hbar\omega \left\{ a^\dagger(k)a(k) + \frac{1}{2} \right\}$$

就是把电磁场弄成了谐振子模型，有1/2 零点能。由于电磁波模式无穷多，这带来了发散问题之一。

Inference from Photoelectric effect and black-body radiation
使用gauge 使之成为可以引入canonical quantization 的形式

电磁场量子化火热进行中

It does not invoke the solutions of Maxwell's equations in a specific gauge and there is no need to consider a finite quantization volume with boundary conditions before being able to go to the infinite-volume limit.

直接构造一个 Hilbert 空间，

$$\prod_{\omega} \prod_{\mathbf{X}=\mathbf{L}, \mathbf{R}} \prod_{\lambda=1, 2} |n_{\mathbf{X}\lambda}(\omega)\rangle$$

其中， $\mathbf{X}$ 是光传播方向。然后为电磁场硬引入谐振子量子化方案 $H|n_{\mathbf{X}\lambda}(\omega)\rangle = \hbar\omega(n_{\mathbf{X}\lambda} + 1/2)|n_{\mathbf{X}\lambda}(\omega)\rangle$ ，粒子数算符就是升降算符组合而来的。

电荷场、电磁场及其相互作用的量子场论

$$L = \bar{\psi} [i\gamma_{\mu}(\partial^{\mu} + ieA^{\mu}) - m]\psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

对有质量 m 、电荷 e 和自旋 (γ_{μ}) 的粒子的量子力学(ψ)描述

经典电磁场(论)

$$\frac{1}{4} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

电荷和场的相互作用,

$$ieA^{\mu}$$

满足相对论电子的

$$i\gamma_{\mu}(\partial^{\mu} + ieA^{\mu}) - m$$

协变微分

$$D^{\mu} = \partial^{\mu} + ieA^{\mu}$$

天然地有四元数、旋量

$$\gamma_{\mu}, \quad \psi$$

这一代人听说过,
对下一代人就可能
是常识!

关于电子场 $\bar{\psi}$ 的运动方程 $(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m)\psi = e\gamma^{\mu}A_{\mu}\psi$

关于电磁势 A_{μ} 的运动方程 $\partial_{\mu}F^{\mu\nu} = ej^{\nu}, \quad j^{\mu} = \bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi$

如果加上 Ludvig Lorenz gauge $\partial_{\mu}A^{\mu} = 0$, 就成了 $\square A^{\mu} = ej^{\mu}$

注: Lagrangian 一词儿是Hamilton 造的

电荷场、电磁场及其相互作用的量子场论

除了庞加莱群不变

还有规范变换 $A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \alpha(x)$

$$\psi \rightarrow \psi' = e^{iq\alpha(x)} \psi$$

运动方程 $(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = q\gamma^\mu A_\mu \psi$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu$$

其中 Dirac-current $j_\mu = \bar{\psi}\gamma_\mu\psi$

电荷是波函数相位的共轭, 相位是规范函数,
量子化 $\mu = hc/2e$

Dirac 1927, 原子的吸收与发射问题; 1931
Enrico Fermi 1932, 辐射理论

1947年, Hans Bethe 引入renormalization思想

后来有了场论和费曼图两种表示的在各阶微扰上都收敛的量子电动力学形式.

Dyson 证明这两者都是等价的。

大神们对量子电动力学的评价

Dyson 1949: The present electrodynamics is certainly incomplete, but is no longer certainly incorrect.

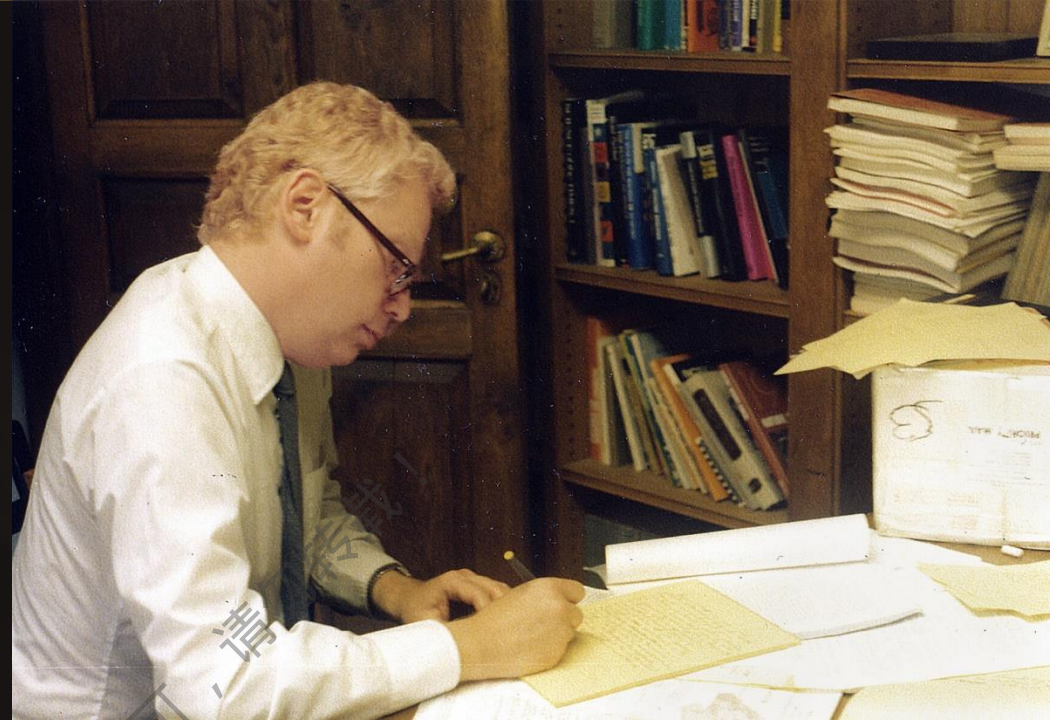
Landau: “The lack of complete logical consistency...”

Feynman: 量子电动力学是人吓鬼 (hocus pocus)

Dirac: QED (of Feynman, Schwinger and Dyson) is an ugly and incomplete one.

它的数学让人难以容忍。

量子电动力学
太难，简单点的
有用不？

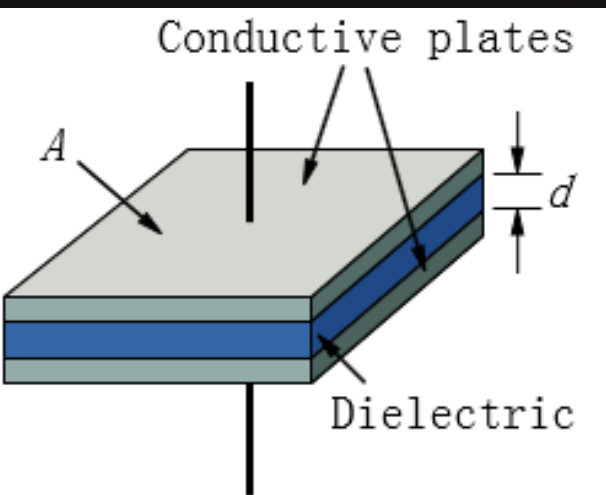


Quantum field theory, which was born just fifty years ago from the marriage of quantum mechanics with relativity, is a beautiful but not very robust child.

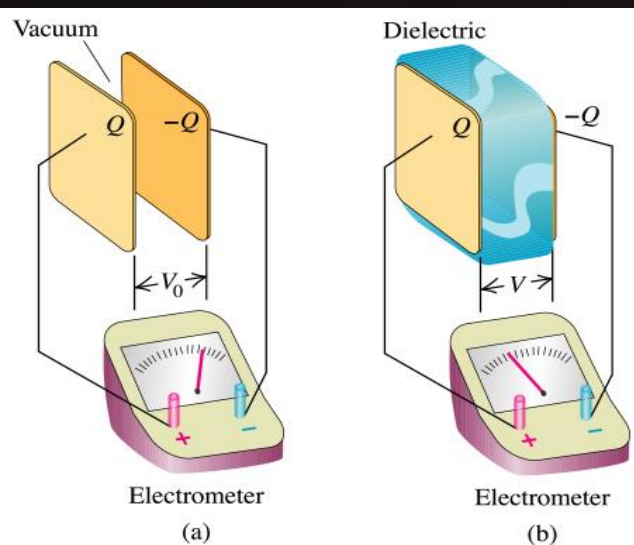
— Steven Weinberg —

AZ QUOTES

平行板上产生了多少个诺贝尔物理奖？



平行板电容器示意图



电场强度

$$E_{vac} = \frac{Q/A}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{Q/A}{\epsilon_r \epsilon_0}$$

定义电容

$$C = \frac{Q}{Ed} = \frac{\epsilon_r \epsilon_0 A}{d}$$

储存能量

$$E_{energy} = \frac{1}{2} C V^2$$

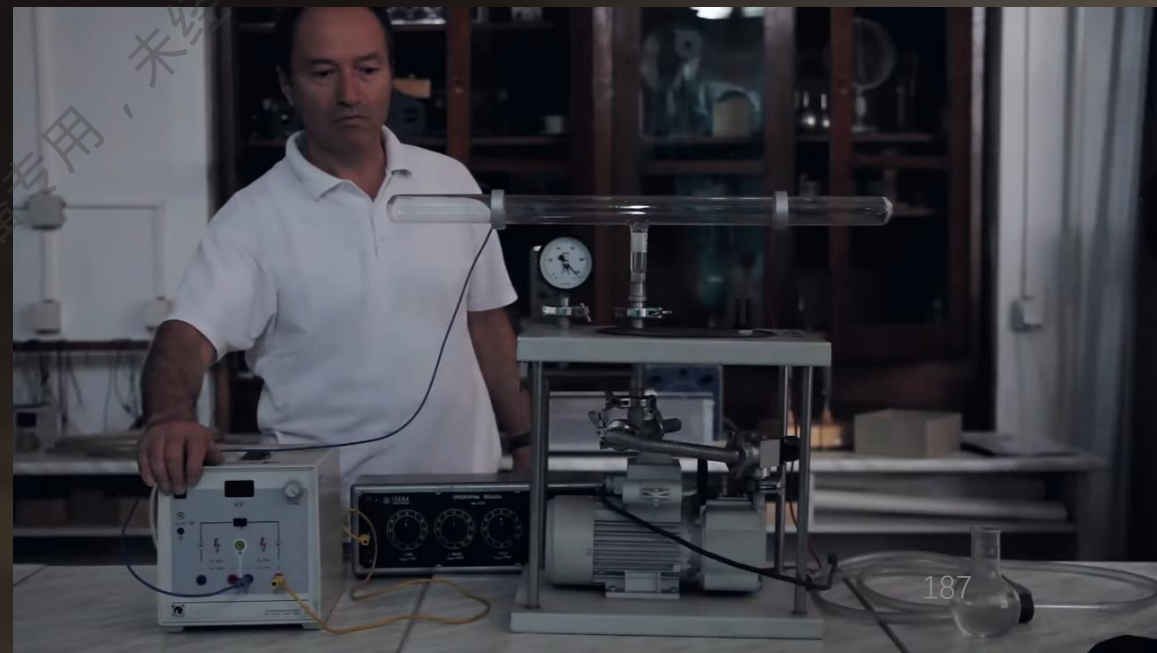
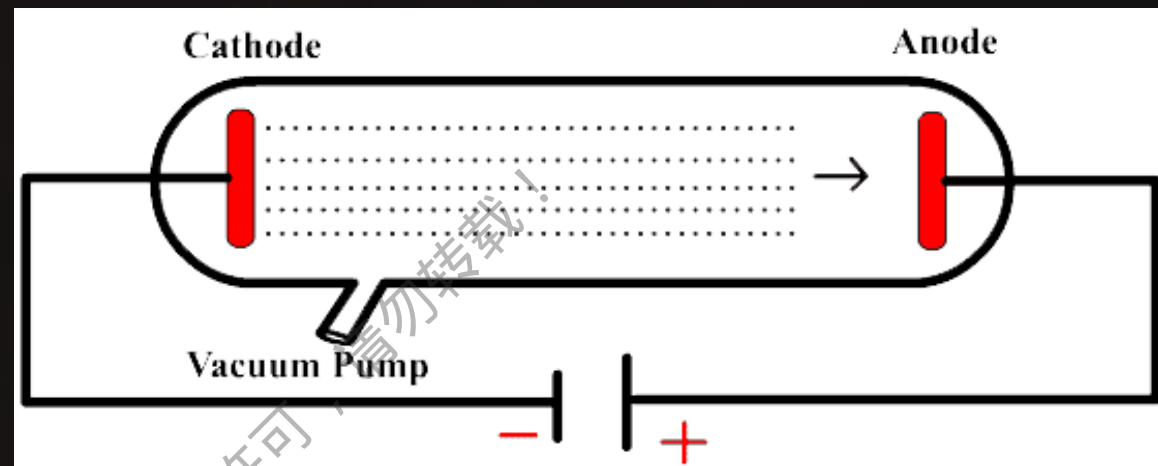
物理不是这样的

平行板上产生多少个诺贝尔物理奖？



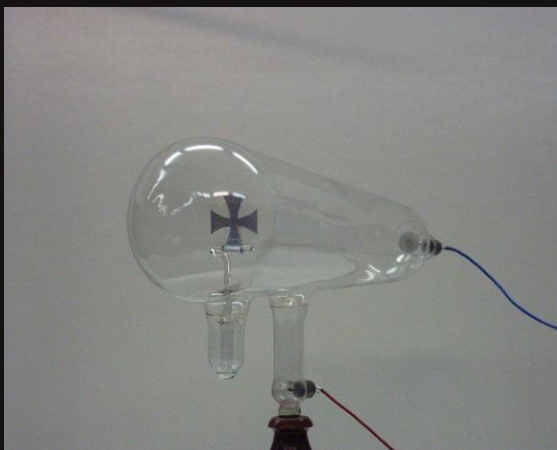
一个平板电容器，给带上电，很快电就没了！

封装在玻璃壳里，抽气，杯具了！



平行板上产生多少个诺贝尔物理奖？

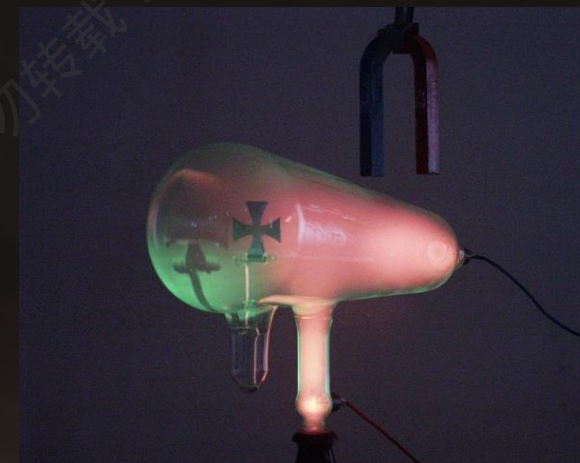
真正的物理实验是良心与天才的挥洒



1. 正极挪到下方
(阴极对面亮)



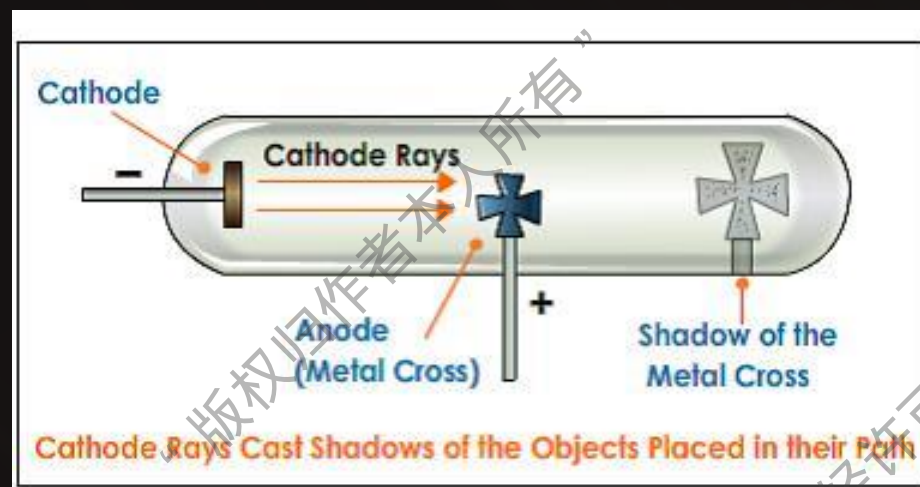
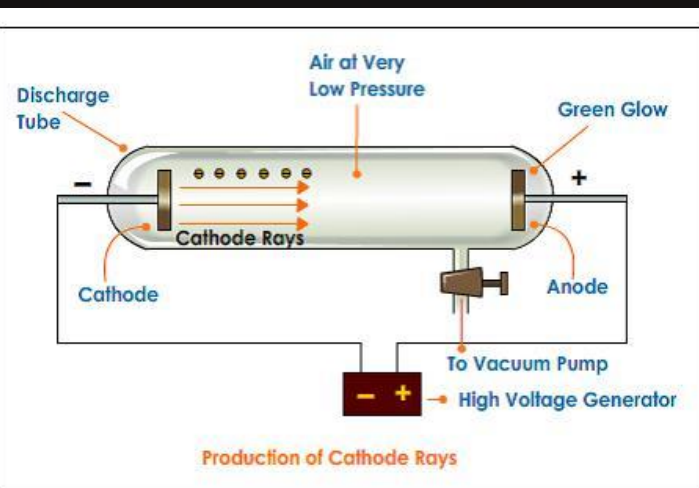
2. 可见光区以外见阴影
(排除光)



3. 磁场偏转阴影
(射线带电)

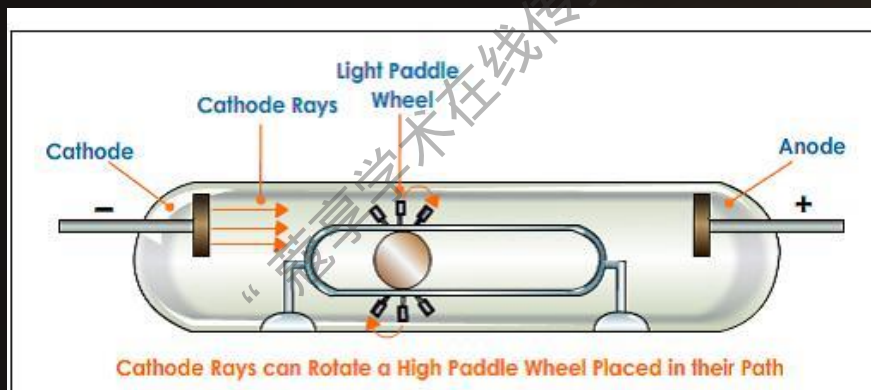
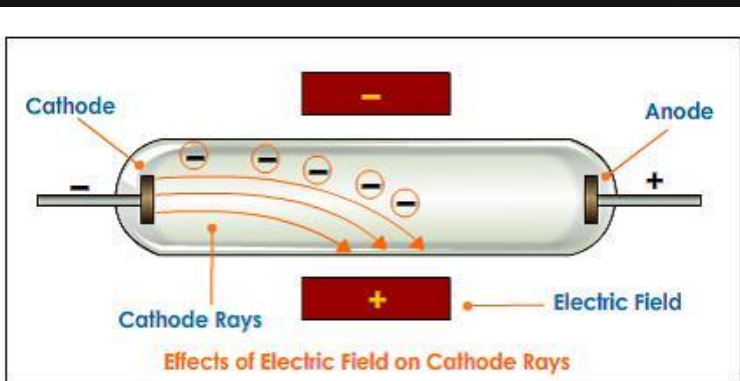
William Crookes 1869年发明的克鲁克斯管 (Crookes tube).

平行板上产生多少个诺贝尔物理奖？



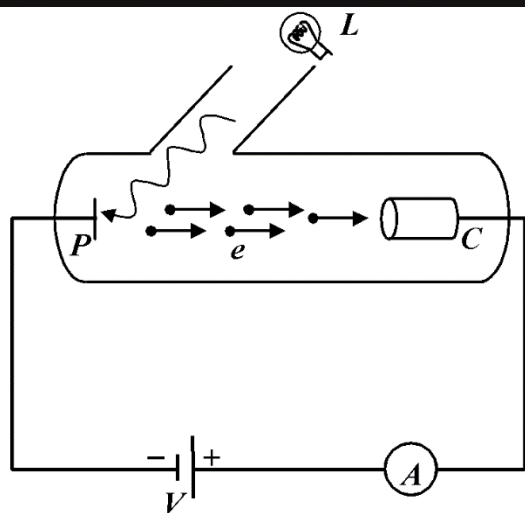
1900 Röntgen, X-ray

1905 Lenard Cathode ray

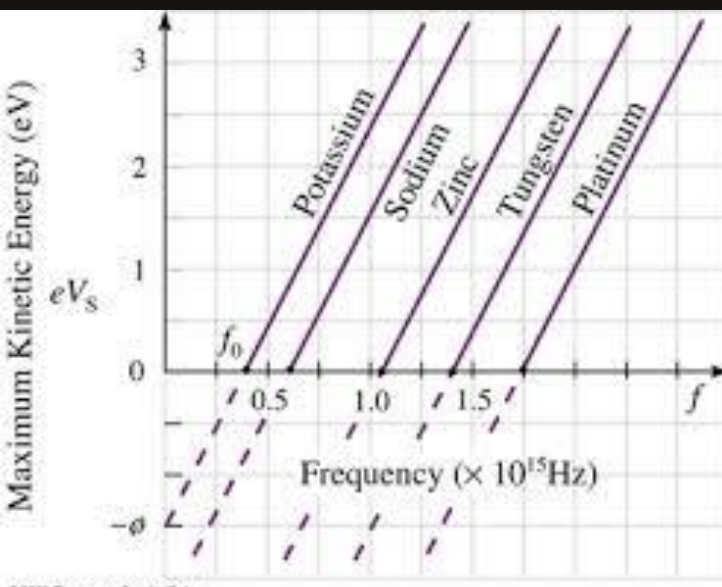


1906 Thomson, gas discharge

平行板上产生多少个诺贝尔物理奖？



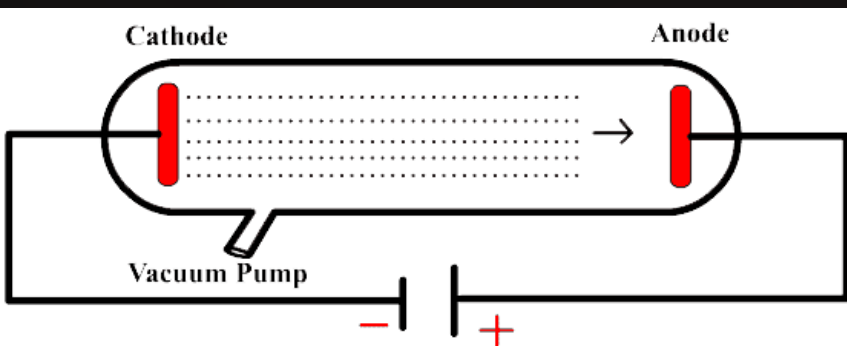
$$E_{kin} = h\nu - \varphi$$



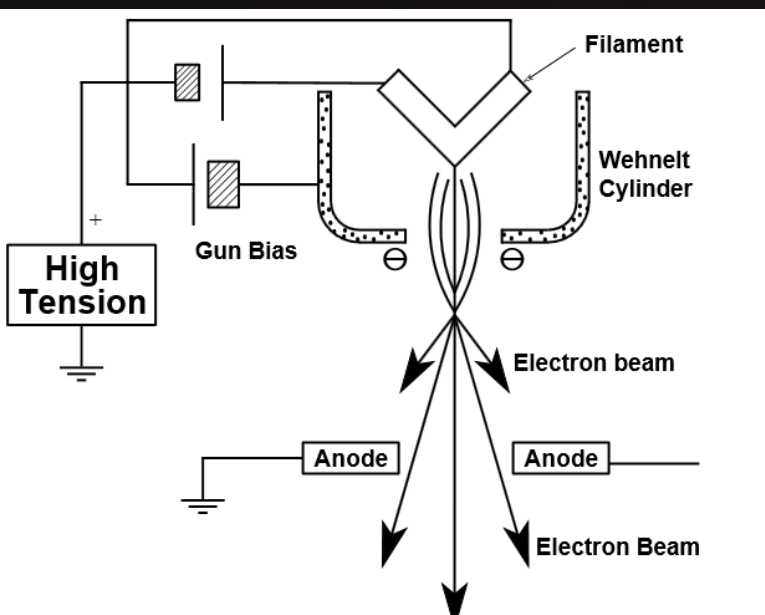
光电效应 (photoelectric effect)
Einstein 1905 年给出解释,

1922年获 1921年度诺贝尔奖

平行板上产生多少个诺贝尔物理奖？



有毛刺 (spikes) 的地方放电，那就干脆做成**针尖**。理论和实验不需要精确到小数点后1位，能粗略地提示就行



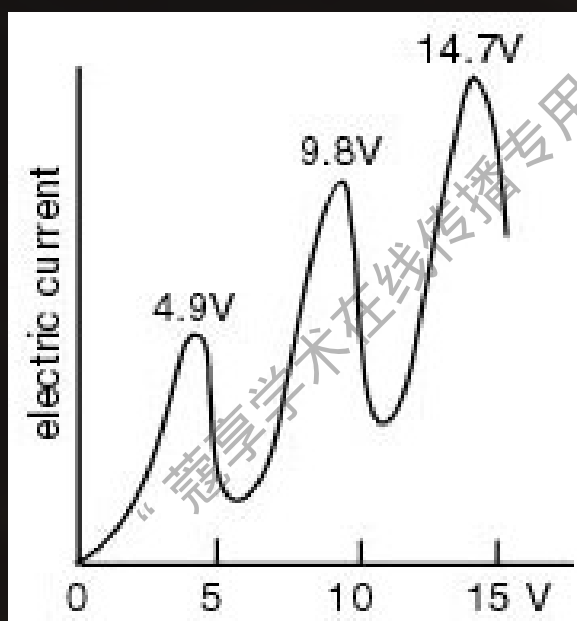
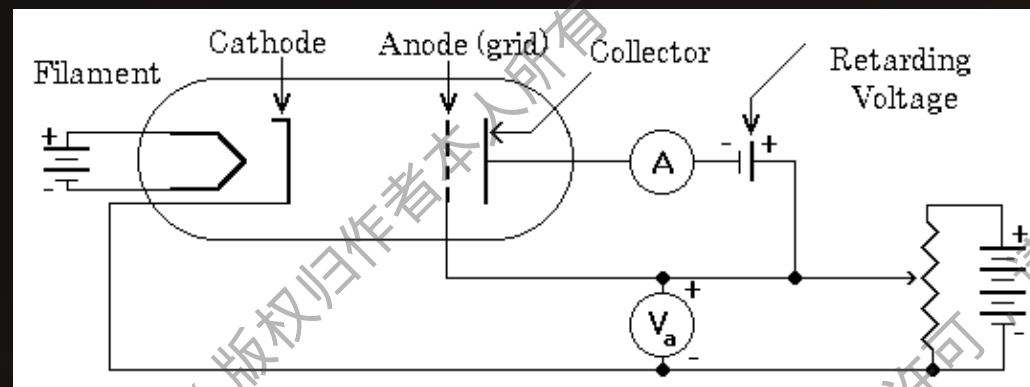
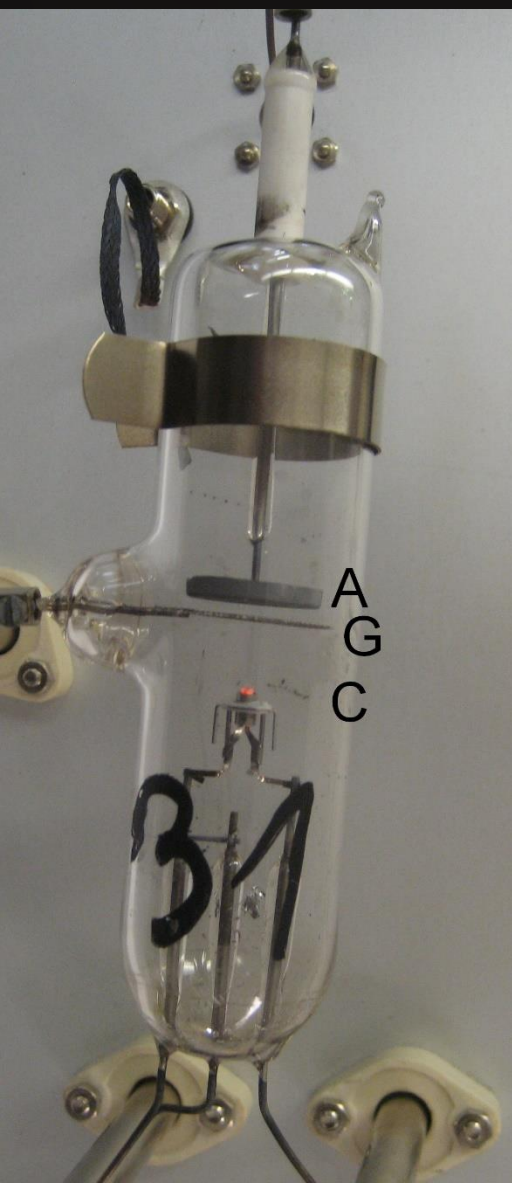
电子枪开辟了无数应用。

于是有了**电视机**，电子显微镜

1986 年度诺贝尔奖，电子显微镜，扫描隧道显微镜

关键词：**针尖 放电**

平行板上产生多少个诺贝尔物理奖？



1914年的Franck–Hertz experiment

获得1925年度诺贝尔奖

平行板上产生多少个诺贝尔物理奖？



H_{α}

H_{β}

H_{γ}

H_{δ}

6562.10

4860.74

4340.10

4101.2

氢原子谱线，玻尔 1913 年解释，1922 年诺贝尔奖
确立量子化的概念

电磁学关联着第二次工业革命

学会了电磁学的任何点滴，
都意味着掌握了数个工业门类！

学会了电磁学的任何点滴， 都意味着掌握了数个工业门类！



电磁学：电荷在电场 E 中受力为 $\vec{f} = q\vec{E}$

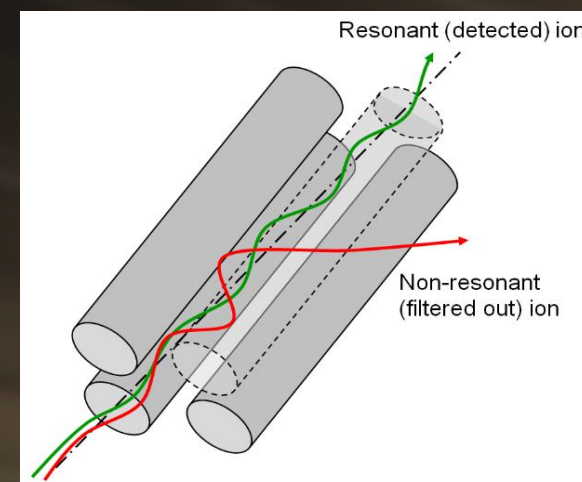
加上牛顿定律： $m\vec{a} = \vec{f}$

两者结合起来： $m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = q\vec{E}(\vec{r}; t)$

只要你会设计 $E(\vec{r}; t)$ ，
你就能把电荷送到
指定地点

电子光学这种学问
各种电子学仪器

比如质谱仪 $\frac{m}{q} \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{E}(\vec{r}; t)$



问：如何评价电磁学、(量子)电动力学？

答：模棱两(不)可但硕果累累

Theories seem quite ambiguous nevertheless turn out to be extraordinarily fruitful (2000)

电磁学/电动力学的建立是一场马拉松式的瞎子摸象。
纵然漏洞百出，它依然是最伟大的人类智慧结晶。



今后的进步，每一步都会是巨大的，但每一步都需要真正的内功(教是个挑战)。越是面对未知，越是要深入理解已知，那是整个人类智慧的结晶！

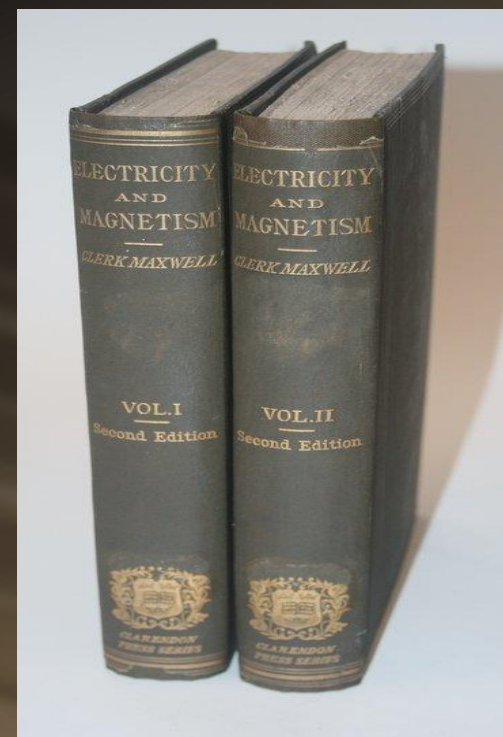
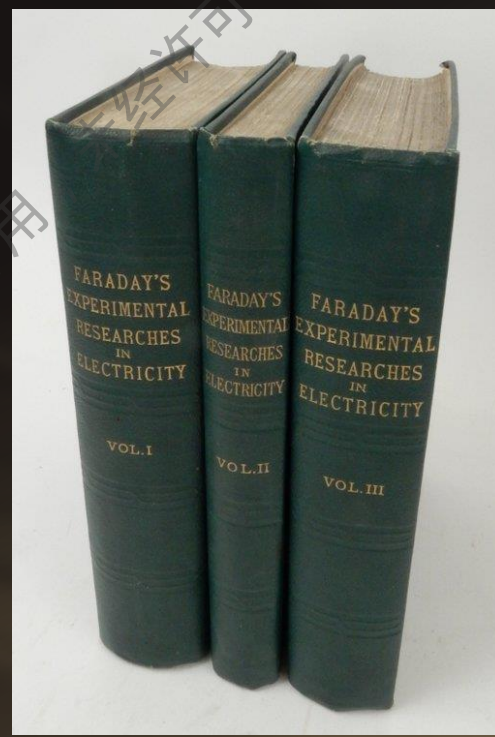
难！难！难！道最玄，
莫把金丹作等闲。
不遇至人传妙诀，
空言口困舌头干。

—吴承恩《西游记》



人问：如何才能学得懂
电磁学与电动力学？

曰：读学问创造者的书！
它给你“终于上学了”的感觉





去听研究者的课

NAOC NEW YEAR COLLOQUIUM
国家天文台新年报告

麦克斯韦方程和规范理论概念起源

杨振宁 院士

去听研究者的课

麦克斯韦的第一篇论文满是数学，
因此比法拉第的好懂。- 杨振宁



感谢您的关注

Thank you for your attention

我眼中的物理：

平静的海面上波涛汹涌

鸣 谢

中国科学院物理研究所
中国科学院科学传播局

北京电视台： 李 杰，徐春妮
央视 创造传媒： 王雪纯

抖音集团

愿更多的人在**严肃地学习物理**
的过程中收获欢乐与智慧。

致 敬

安徽省灵璧县禅堂联中

潘秀德 老师

安徽省灵璧第一中学

解安庆 老师

安徽省灵璧第一中学

荣超群 老师

中国科学技术大学

何贤昶 教授

中国科学技术大学

汪克林 教授

德国 Kaiserslautern大学

Hans Oechsner 教授

他们让我的学物理之路成为一条连续的曲线

基于电磁学知识， 猜猜“電影”是什么意思？

電， 雷電(lightning)， 是含水气团积聚了太多的电荷 (electric charge) 引起放电(discharge)后带电粒子(charged particles)复合发光现象。
電影， 就是雷電作为光源在地上造成的明暗现象

電影入飞阁， 风威凌吹台。

—[唐] 杨师道 “中书寓直咏雨简褚起居上官学士”

電影江前落， 雷声峡外长。

—[唐] 沈佺期



后来， 有了电灯(electric light) 作为随时可用的、很亮的、方向性的光源，把透明胶片 (film， 皮) 投影(project)到荧幕上。

胶片的运动(cinématique)足够快时， 投影给人以连续的感觉，这就是新时代的电影，专门放电影的场所叫 cinema! 皮影戏是電影前身！

2022.07.07, 17:40分, 我想到一句上联:

电波、磁波、电磁波, 波光粼粼

求下联。

举个不对仗的例子哈

窝气、囊气、窝囊气, 气息奄奄