

中物院研究生院

固体理论

Solid State Theory

2020.02.19

时间： 星期三 13:30 —— 17:30

主讲教师： 刘海文 （北京师范大学）

haiwen.liu@bnu.edu.cn

课程QQ群：



B站视频地址：

后续更新



2020春季-固体理论

扫一扫二维码，加入群聊。

方法论与授课方式

- 1, 启发式与重点例子
- 2, 实用性, 结合相关实验
- 3, 电子板书, 课下大量阅读与推演

“版权归作者所有，未经许可，请勿转载！”
“寇享学术在线传播专用，未经许可，请勿转载！”

方法论与授课方式

1, 启发式与重点例子

S. Weinberg 的四点忠告:

- 1, 没有人了解所有的知识, 你也不必。
- 2, 学会游泳而不下沉后, 应该到波涛汹涌的地方去。
- 3, 要原谅自己虚掷时光。
- 4, 学一点科学史, 起码你所研究的学科的历史。

Scientist: Four golden lessons, Steven Weinberg

方法论与授课方式

1, 启发式与重点例子

日本著名数学家 广中平佑《创造之门》

日本江户时期，有一位叫关孝和的数学家，看看他所留下的业绩就可知道。他的思想性与同时代的西欧的数学家不相上下，但分析能力却远远不够。

有一位哲学家曾指出：如果欧美人遇到了一个问题，他们首先将问题分解成各种要素，然后从各个角度进行调查研究。与此相反，东方人遇到一个问题后，就开始搜集与此问题相似的问题。也即先有一个大锦囊，袋中盛满了各种各样的类似的问题。这样，袋子很快就会膨胀得像宇宙那么大，因此，与问题有关的看法、观点、评价也随之增多。结果，使得自己陷入众说纷纭，无所适从议论之中，终于使得自己的主张化为乌有。以我的经验来看，这个说法很有裨益。

广中平佑
袋袋分法

陈哲轩
怎样解题

1, 启发式与重点例子

BCS

L. N. Cooper 的看法 [来自金晓峰报告“科学，人性，太人性了！”]

L.N. Cooper (1986)

There is a vast difference between science being created and science being presented (in textbook, for example). For science being created, I see a closeness between art and science. **Creating a painting or a sculpture, a piece of music or a piece of science, involves processes in which intuition is important. The process is not entirely logical - quite distinct from formal presentations in textbooks.**

1, 启发式与重点例子

L. N. Cooper 的看法 [来自金晓峰报告“科学，人性，太人性了！”]

L.N. Cooper (1986)

There is a vast difference between science being created and science being presented (in textbook, for example). For science being created, I see a closeness between art and science. **Creating a painting or a sculpture, a piece of music or a piece of science, involves processes in which intuition is important. The process is not entirely logical - quite distinct from formal presentations in textbooks.**

20

我觉得，一个科学家在建立秩序的时候，他最像艺术家。因为，科学家用自身的技术和媒介，创造现象中的秩序，正如艺术家用他力所能及的东西，去创造现象中的秩序：比如，画家用光、色彩和形式；作曲家，用声音和其他元素。这种秩序是这个科学家观察世界时**个人的眼光**，就像艺术家一样。

L.N. Cooper (1977)

或许，随着科学的进步，我们确实越来越接近这个世界的真实秩序……但是，在这一过程中，很明显，我们实际创造的那些秩序（即使它们只是暂时的，也是我们人类至今能创造的仅有的秩序），乃是由**人类创造的**，而不是它们原本就在现象之中的。它们是**人类的发明**，而不是采矿的结果……

就在这里，我们能找到一种目的上的相似性，把小说家、画家、音乐家和科学家联系起来。他们每一个带给我们的，显然都不是单纯字面上的表述，而是一种**对世界秩序的 personal 眼光**。这种眼光，最原创的，常常也是最怪异的。但是，当我们学会了如何去看、去听或者去理解，就会发现这个世界从此披上了新装。

方法论与授课方式

2, 实用性, 结合相关实验

** 概述/复习固体物理 2 次课

** 传统固体理论 12次课

** 低维/介观/拓扑 4 次课



Handwritten red notes: $1/\mu m$ (circled), $1/\mu m$, and arrows pointing left and right.

3, 电子板书, 课下大量阅读与推演

** 电子板书, 视频录播

** 课下阅读+推演

** [专题阅读+文献报告]; 作业+期末考试

General introduction to Solid State Theory

From solid state physics to condensed matter physics.

→ symmetry breaking
→ phase transition

→ elementary → Landau Fermi liquid theory.
→ collective → Phonon
→ topological → flux

A) Focus on: long-range order + excitations.

lattice, SC, SF, FM, AFM,

B) Introduce modern concepts in low-dimensional and topological systems.

→ quantum fluctuation, quantum coherence, domain wall, 10 Kelvin, 10^{-3} eV

C) Introduce important methods: mean field theory, Green's function method including equation of motion and Feynman diagrams.

讲课内容

- ✓第一章 概论与回顾 固体物理. 二论量子化
- ✓第二章 能带论与电子气
- ✓第三章 玻色系统与磁性系统
- ★第四章 线性响应理论与格林函数方法 $\star$ 极化率, 费米子, 玻色子 Green's function
- ★第五章 相互作用电子体系 费米子系统
- ★第六章 常规超导 $\star$
- ~~第七章 介观与低维体系~~
- ★第八章 贝里相位与能带拓扑

参考书

1. 李正中, **固体理论**, 高等教育出版社 数学推导清楚
2. ✓ Philip L. Taylor and Olle Heinonen, **A quantum approach to condensed matter physics**, Cambridge University Press 2003 图像清楚
3. ✓ D. I. Khomskii, **Basic Aspects of the Quantum Theory of Solid**, Cambridge University Press 2010
4. (4) Alexander Altland and Ben Simons, 路径积分量子化,
Condensed Matter Field Theory, Cambridge University Press 研究参考; 数学清楚; 图像清楚;
- ★ 5. P. W. Anderson, **Basic notions of condensed matter physics**, Westview Press 1984 研究参考

考核方式

平时成绩（60%）+ 考试成绩（40%）

平时作业：

1. 习题（40 %）
2. 文献报告（20%）

（基于阅读多篇文献后的读书报告，必须附文献）

提交方式：书面 或 电子（PDF or Word 格式）

独立完成，抄袭零分

3. 期末考试：（40 %）

“版权归刘海文研究员和中物院研究生院所有”

第一章 概论与回顾

“寇享学术在线传播专用，未经许可，请勿转载！”

凝聚态物理表面上不同于其他学科，内容显得多而杂，
有必要站在科学发展的高度，审视其内在的规律。（中科大杨金龙）

科学史学家 Thomas Kuhn 强调**范式**在学科发展过程中的作用

《科学革命的结构》 **Paradigm shift**

科学的演化是经过不同阶段循环发展的过程。

1. 前范式阶段 (pre-paradigm) •
2. 常规科学阶段 (normal science) ☆
3. **反常阶段 (anomaly)** ✓
4. 危机阶段 (crisis) ✓
5. 科学革命阶段 (scientific revolution) ☆
6. 新范式阶段 (new paradigm).

1. 固体物理的范式

1926 $\Rightarrow$ 1930

Bloch; Peierls; Wigner.

核心概念: 周期结构中波的传播 (1946年Brillouin著) ★

晶体的平移对称性(周期性)

波矢空间(倒空间)

强调共有化的价电子以及波矢空间的色散关系

波矢空间的基本单元: Brillouin区

焦点: Brillouin区边界或区内某些特殊位置的
能量-波矢色散关系

晶格动力学+固体能带理论

固体能带结构的两种理解:

(1). 近自由电子图像+周期势场的微扰

(2). 原子能级图像+晶体场展宽(紧束缚近似)

⊗ tight-binding model

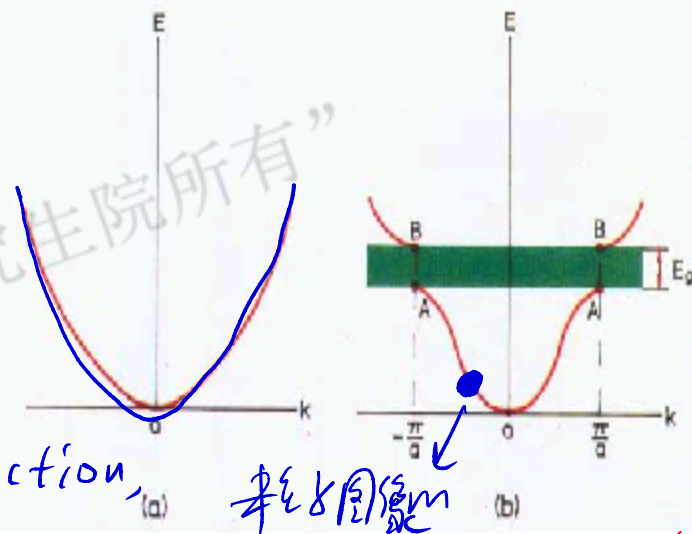
① numerical

⊗ ② disorder, interaction,

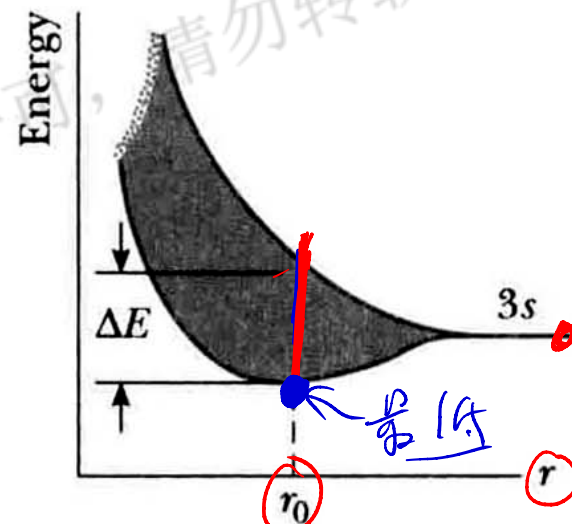
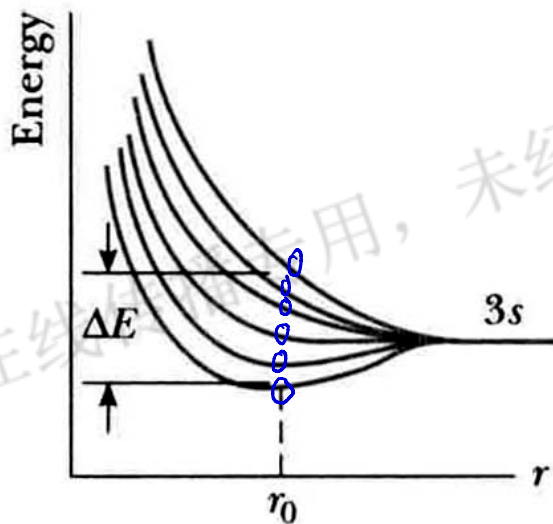
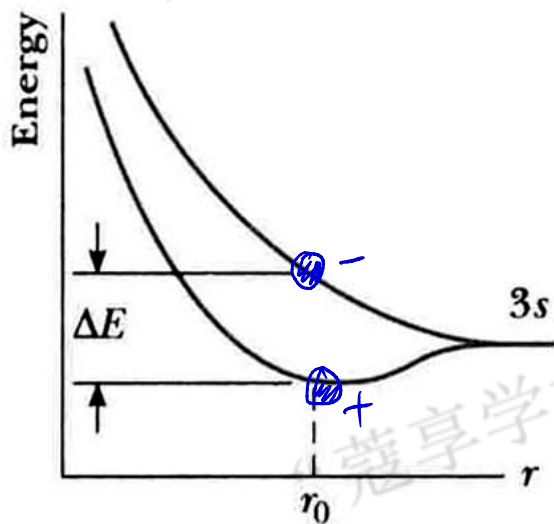
Two atoms

Six atoms

Solid of N atoms



非自由电子



1946

⊗ 光子晶体(photonic crystal)

固体物理范式的开拓和深化

disorder

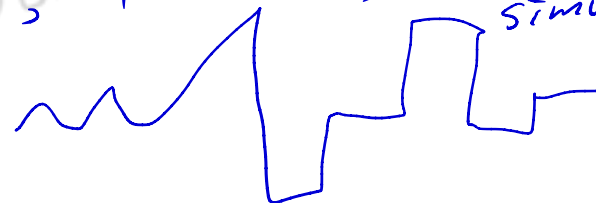
开拓: 无序体系
深化: 量子相干性



1957; P.W. Anderson

1970; Thouless; numerical simulation,

$V(x)$



diffusion
Localization

无序体系: 安德森局域化

相对于周期性晶体结构而言. 非晶, 液晶, 准晶, 液体等.

K不是好量子数

仅有粒子图像是不够的.

量子相干性: 介观物理

大小 $\sim 1 \mu m$.

主要体现在输运性质方面, 输运性质由载流子对散射中心散射决定: 弹性散射+非弹性散射

介观体系: 体系尺度 < 非弹性散射平均自由程

2 凝聚态物理的范式

Landau 的贡献

L.D. Landau(1908-1968): 1962 Nobel奖 “for his pioneering theories for condensed matter, especially liquid helium”

Ginzburg-Landau theory,

凝聚态物理理论: 二级相变理论, 超导理论, 超流HeII理论和Fermi液体理论.

概念: 序参量和对称破缺, 元激发

Paramagnetism

顺磁响应 $M \rightarrow 0$
 $B \rightarrow 0$

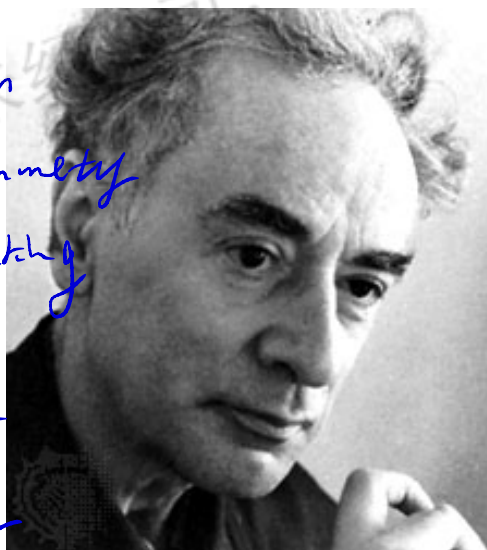
$$\chi = \frac{M}{B}$$

↑ 磁化率 χ

ferromagnetism
spontaneous symmetry
 χ divergent breaking

外加磁场 $B > B_c$

“非自洽” symmetry breaking



Anderson 的贡献:

P.W. Anderson (1923-): 1977 Nobel奖 “for their fundamental theoretical investigations of the electronic structure of magnetic and disordered systems”

(与 J.H. van Vleck, N.F. Mott. 平分) Ken Wilson RG theory Higgs = 1963
1973 move is different 1957 1957

凝聚态物理理论: 无序系统理论, 磁性杂质的电子理论, 电导的标度律, 近藤问题的 Poor man 标度率 1979

概念: 对称破缺, 元激发, 广义刚度, 缺陷, 解析性与连续性 1970 1961
以及重整化群等 Anderson-Higgs 机制

1984年 “凝聚态物理学的基本概念”

Goldstone boson



晶格



phonon

光子

无能隙的
集体激发

Higgs mechanism



电子 (Coulomb interaction)



plasmon 有能隙的集体激发



Auguries of Innocence

To see a world in a grain of sand
And a heaven in a wild flower,
Hold infinity in the palm of your hand
And eternity in an hour.

--William Blake



2.A 对称性和对称破缺

如果你能把物理学学到最薄处，用一页纸写出物理学的精华，那上面一定写着：**对称，和谐，美**

自然界的四类对称性：

* Symmetry. *

(1) 全同粒子的互换

(2) 连续时空变换, 如平移, 旋转和加速

(3) 分立变换, 如空间反演^P, 时间反演^T, 粒子-反粒子共轭^C

(4) 规范变换, 如 U(1) (电荷, 超荷, 重子数和轻子数守恒),
SU(2) (同位旋) 和 SU(3) (色和味) 对称

对称性都是植根于某些物理量是不可观测的假设, 不可观测测量存在的直接后果是出现守恒律或选择定则. 相反, 一旦一个不可观测测量变成可观测的, 对称性就破缺了.

物理学中的对称性

Another theorem

对称性破缺



数学变换	不可观测量	守恒律和选择定则
空间平移	绝对空间位置	动量
时间平移	绝对时间	能量
旋转	绝对空间方向	角动量
空间反演	绝对左或右	宇称
时间反演	绝对电荷符号	电荷共轭
粒子置换	全同粒子的差别	Bose 统计或 Fermi 统计
规范变换	不同电荷态间的相对位相	电荷

lattice, FM, SC, AFM

凝聚态物质世界都是对称破缺的产物:

晶体是平移对称破缺的产物(原子位置的周期性破坏了任意平移的不变性); 空间反演对称性的破缺产生了铁电体; 时间反演对称性的破缺产生磁有序结构; 规范对称性的破缺产生了超流体与超导体...

$\vec{\mu}$ 磁矩
 $\vec{p}$ 动量

2.B 有序相和基态

多粒子体系的行为由(1)粒子的统计行为(2)粒子间的相互作用决定。

$$F = E - TS$$

高温, $S \uparrow$, 无序
低温, $S \downarrow$, 有序

有序-无序相变是多体系统的一般特征, 涉及到系统的能量和熵(熵是系统中粒子无规分布程度的度量)。对体积恒定的系统, 平衡态要求自由能: $F=E-TS$ 取极小。

高温时, F 的极小值与最大熵值有关, 倾向于无序态;

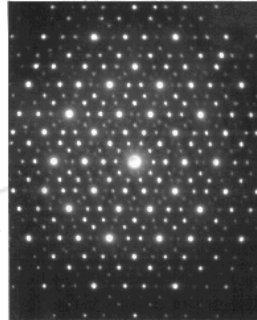
低温下, F 中内能占优势, 平衡态由内能极小决定, 系统处在有序态。

实验经验: 固体作为一个多粒子系统的基态是具有某种规则点阵的相。-----无精确证明

准晶体

- ① 没有平移不变性
- ② 五重对称

劳厄定向:

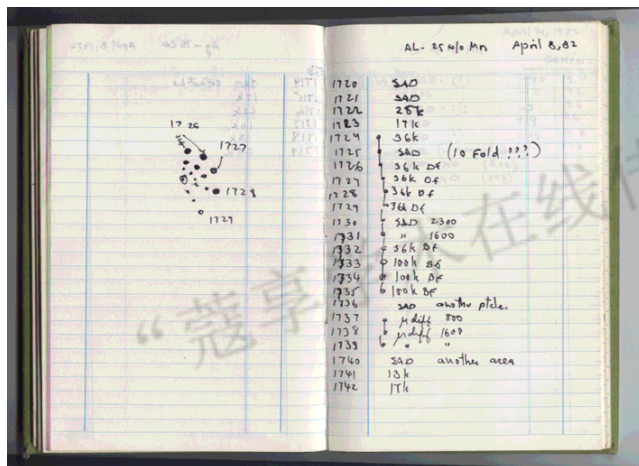


1.D. Shechtman, I. Blech, D. Gratias, and J.W. Cahn, "Metalic phase with with long-range orientational order and no translational symmetry," *Phys. Rev. Lett.* **53** (1984) 1951-1953.

1984年, Shechtman等在寻找既轻又硬的Al合金中,在急冷的Al-Mn合金中获得了具有五重对称,斑点明锐的电子衍射图,定出其点群为m35.



郭可信: 五次对称, 八次对称, 十二次对称



2.C 相变和临界现象

[高等统计物理]

(1) 相变

定义： 一个多粒子系统在不同的温度和压强或其他外部条件下可以处在不同的状态，不同状态之间的转变叫相变。

相变的分类标志： 热力学势及其导数的连续性。

热力学势： 自由能，内能

一阶导数： 压力(体积)，熵(温度)，平均磁化强度等

二阶导数： 压缩系数，膨胀系数，比热，磁化率等。

一级相变或不连续相变：热力学势连续，一阶导数不连续的状态突变

* 二级相变或连续相变：热力学势和一阶导数连续，二阶导数不连续的状态突变 $[\chi, C_v]$ ★

连续相变理论：平均场理论（唯象理论）↑

平均场理论：被多次发明的理论

1873: van de Waals 气液状态方程↑

1907: Weiss 铁磁相变的“分子场理论”

1934: 二元合金有序-无序转变的Bragg-Williams近似

1937: Landau 相变理论↑ 热力学相变① BKT 相变：2D XY. T_{BKT} “Anti-Vortex” “Vortex”
Berezinskii - Kosterlitz - Thouless

② Anderson Localization: metal-insulator transition
量子相变 ←

$$F = 2(T - T_c) |\Delta|^2 + |\alpha \cdot \Delta|^2 + \beta |\Delta|^4$$

Landau的二级相变理论: 强调对称性的重要性, 对称性的存在与否是不容模棱两可的, 高对称性相中某一对称元素突然消失, 就对应于相变的发生, 导致低对称相的出现. $|\Delta| \neq 0$

核心: 对称破缺 $U(1)$ 序参量 $|\Delta|$, ϕ

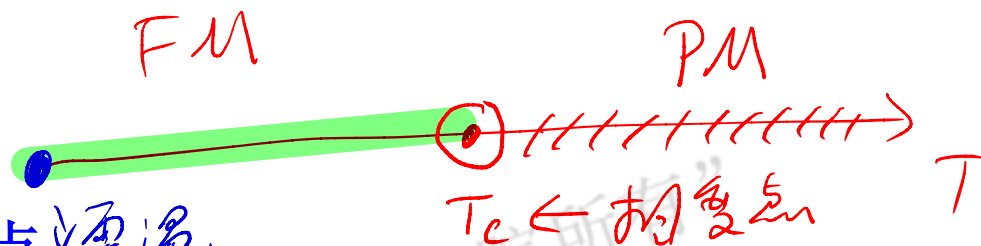
特例: 连续相变不存在对称性上的差别(汽-液相变) $\Delta = |\Delta| e^{i\phi}$

序参量: 低温有序相的一个标志, 描述偏离对称的性质和程度. 为某个物理量的平均值, 可以是标量, 矢量, 复数或更加复杂的量. 随对称性的不同, 它在高温时为零, 而低温下取有限值, 在 T_c 处转变. 对称破缺意味着序参量不位零的有序相的出现. 实参量 $\Rightarrow$ 标量, 矢量, 张量 $\Rightarrow$ 液晶

对于没有破缺对称性的系统, 应选取某个对相变点上下两相之间的差别敏感的量与它在相变点的差别为序参量。

相位空间 $\Rightarrow$ 实 复 ① $\rightarrow$ SC
 $\rightarrow$ triplet SC ②

(2) 临界现象



临界点：两级相变的相变点 $\downarrow$ 零温

临界现象：物质处在或接近于临界点时所表现出来的独特行为

系统的某些自由度表现出长波尺度上的反常大涨落，与远离临界点的正常物质不同。这些大涨落使得凝聚态系统的正常宏观规律以某些剧烈和微妙的方式受到破坏。

临界指数 标度律 普适性

“寇享学术在线传播专用，未经许可，请勿转载！”

普适律(Widom-Kadanoff 普适性假设):

$\Rightarrow$

现象理论

一个系统的临界指数仅与其空间维数 d 及序参量的分量数 n 有关。

标度律和普适律直接导致重整化群理论

化学家

$$x = f(y)$$

一系列
临界指数

临界指数

一. Widom的标度理论(1965)

1. 广义齐次函数 2. 临界指数(铁磁系统为例)

二. Kadanoff的标度理论(1966)

临界点最重要特征: 关联长度 $\xi \rightarrow \infty$

普适标度性: ξ 趋向无穷的事实将不再受以什么有限尺度作为测量而影响 $\rightarrow$ 关联长度趋向无穷具有尺度变换下的不变性

$\rightarrow$ 标度变换 不容易

Ising Model

结构因子

线性响应 χ

关联长度

$$\hat{\rho}(r, r') \propto e^{-\frac{|r-r'|}{\xi}}$$

$|r-r'|$ 衰减

有序

长程序

对称

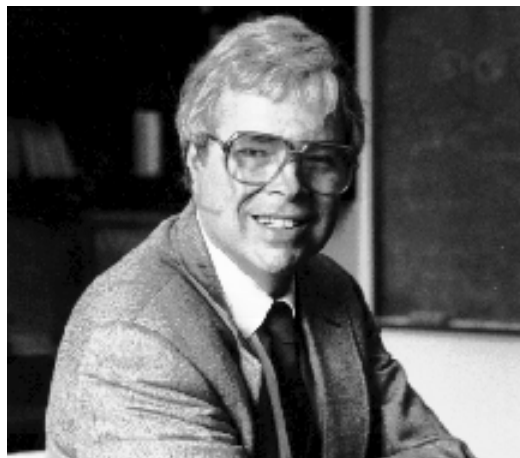
非对称

RG flow, Critical exponents;

(3) 连续相变临界现象的重整化群方法 (70年代, K. Wilson)

KENNETH G. WILSON (1936~²⁰¹³): 1982 Nobel 物理学奖 ^{NRG; Kondo problem; 4-ε expansion}

for his theory for critical phenomena in connection with phase transitions. ^{QED [e, m]; Gell-mann, low 1958}



1936年6月8日，威尔逊出生于美国麻省沃尔瑟姆城。父亲E·布赖特·威尔逊(E. Bright Wilson)是美国哈佛大学著名的物理化学教授。1952年，威尔逊十五岁就考入英国牛津大学，一年后考入美国哈佛大学，十九岁就从哈佛大学毕业。然后去加州理工学院攻读博士学位，导师是盖尔曼(M. Gell-Mann)。1961年获物理学博士学位。1963年到康涅尔大学任教。1971年起被任命为该校教授。

“寇享学术在”

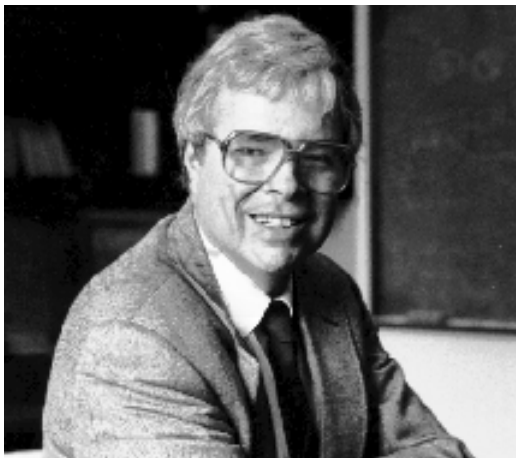
(3) 连续相变临界现象的重整化群方法 (70年代, K. Wilson)

→ P.W. Anderson: more is different.

KENNETH G. WILSON (1936~): 1982 Nobel 物理学奖

for his theory for critical phenomena in connection with phase transitions.

effective field theory.



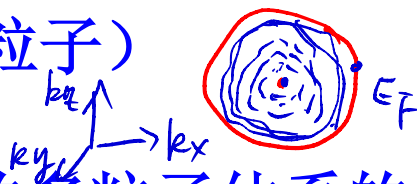
Renormalization group theory: its basis and formulation in statistical physics, MICHAEL E. FISHER, ☆ ☆ Chapter 8 in Tian Yu Cao - Conceptual foundations of quantum field theory (1999).

- Before Wilson, quantum field theory and statistical mechanics were separate subjects.
- Before Wilson, the renormalization group was a set of half-formed ideas, both in field theory and in statistical physics.
- Before Wilson, the subject of critical phenomena was a mass of poorly understood experimental data and a few exact results. *Landau, Onsager*
- Before Wilson, the role of renormalization in field theory was itself poorly understood.
- Before Wilson, color confinement in gauge theories was only a hypothesis.
- Before Wilson, the use of computers to understand fundamental physics was suspect.
- Before Wilson, early physics education was not a priority for research physicists.

↑ John Cardy, ↑ arXiv:1308.1785v1

excitation $\rightarrow$ elementary excitation.

2.D 元激发 (准粒子)



$\bullet \leftarrow$ 准粒子. 有确定能量.

有相互作用的多粒子体系的低能激发态, 可以看成是一些独立的基本激发单元的集合, 它们具有确定的能量, 有时还有确定的动量.

元激发使一个复杂的多体系统简化成接近于理想气体的准粒子系统. 元激发不是简单的数学简化, 可以在实验上被观测, 理论上进行推导.

例如: $E(k) \leftarrow$ 能谱; 角分辨率光电子能谱
ARPES $\Delta k \Leftrightarrow \Delta E$

实验: 中子非弹性散射, Brillouin 散射, Raman 散射

理论: 量子场论方法 (Green 函数, Feynman 图和 Dyson 方法)

元激发: ① 元激发能谱; ② 满足的统计规律; ③ 散射机理

$E(k)$

准粒子 Green 函数, 谱函数;

$$G^r(E, k) = \frac{1}{E - E(k) - i\Gamma(k)}$$

lifetime $\Gamma(k)$

dispersion $E(k)$

excitations.

元激发分类

collective excitation

集体激发 (多为Bose型):

- (1) 晶格振动--声子 (**phonon**);
- (2) 磁性材料中的自旋波--磁振子 (**magnon**);
- (3) 金属中电子气的集体振荡--等离激元 (**plasmon**);
- (4) 光子和光学模声子耦合--极化激元 (**polariton**)

elementary excitation

⇒ 个别激发 (多为Fermi型):

- (1) 准电子, 其有效质量增大 (**quasi-electron**);
- (2) 离子晶体中的电子或空穴+极化场形成极化子 (**polaron**);
- (3) 半导体中的电子和空穴对: (**electron-hole pair**) **exciton**

↑ Bose 型

⇒ 拓扑型元激发 topological excitation.

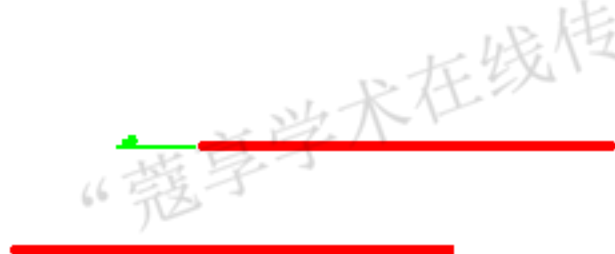
- (1) 超导/超流体系中的 **vortex** 激发/**vortice**^{flux}; **phase slip**; **soliton**
- (2) 晶体中的位错 3D; 2D; 1D
- (3) 磁性体系中的 **domain wall**, **skymion**, **meron** 1D

2.E 广义刚度与缺陷

如有序介质处在更高的激发态，可产生非线性激发或拓扑型缺陷(涡线，位错和畴界)。它们是局域化的，对应于序参量为奇异性(singularity)之处。

缺陷的存在破坏了序参量的空间均匀性，影响凝聚态的一系列重要性质→广义刚度

⇒ 广义刚度：描述有序相(对称破缺)体系在能量取极小的情况下对外界的某种响应。它反应了有序相中长距离上粒子之间存在关联(相邻粒子间的相互作用是这种关联的基本原因)。



刚性移动：晶格从一端至另一端可以无损耗地传递这个力

广义刚度与大多数有序态的特殊性质有关：铁磁，超导，超流
永磁体的磁化不能一次改变一点儿，而必须整个宏观的畴一起
倒转，才能使磁性反转。

广义刚度是一个演生性质

演生性质 (Emergent property)：只作为较高物质层次的性质
出现，在低层次没有它的地位。

广义刚度的破缺 → 拓扑缺陷的产生（涡线，位错，畴界）

缺陷结构：比元激发更高的激发态。

序参量空间：序参量的拓扑不变量导致广义刚度的形成。

缺陷结构和对称破缺相的关系：拓扑理论（de Gennes, 1974）

一维序参量容许面缺陷；二维序参量容许线缺陷；三维（三维以上）序参量只容许点缺陷。

2. 凝聚态物理的范式：总结

和固体物理相比，凝聚态物理：(1) 研究对象日益扩大和复杂
(2) 基本概念和理论工具已大为丰富 (3) 作为固体物理学分支的金属物理，半导体物理，磁学，低温物理，电介质物理
之间交叉日益密切 (4) 一些新的分支如无序系统物理学，准晶物理学，介观系统物理学，团簇物理学被开拓和建立起来。

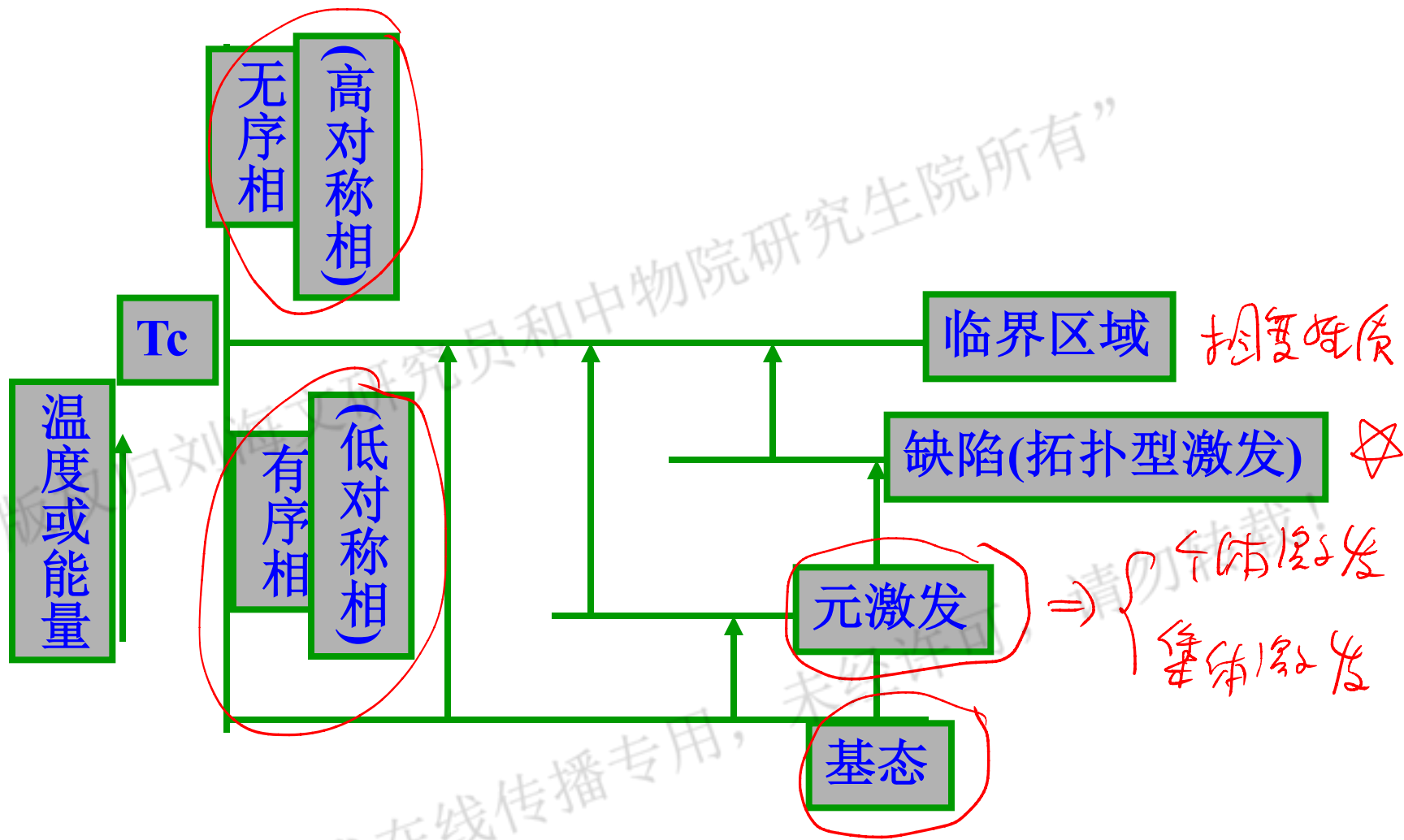
范式的核心概念：对称破缺

FM, SC, SF

四个层次，相互关联：基态，元激发，拓扑激发，临界区域

相变性质

简单性和复杂性的关系：基本定律在多粒子系统上长时间的作用将给出有趣的结构和事件。



与对称破缺有关的多粒子系统的能态示意图

凝聚态物理中的对称破缺现象主表

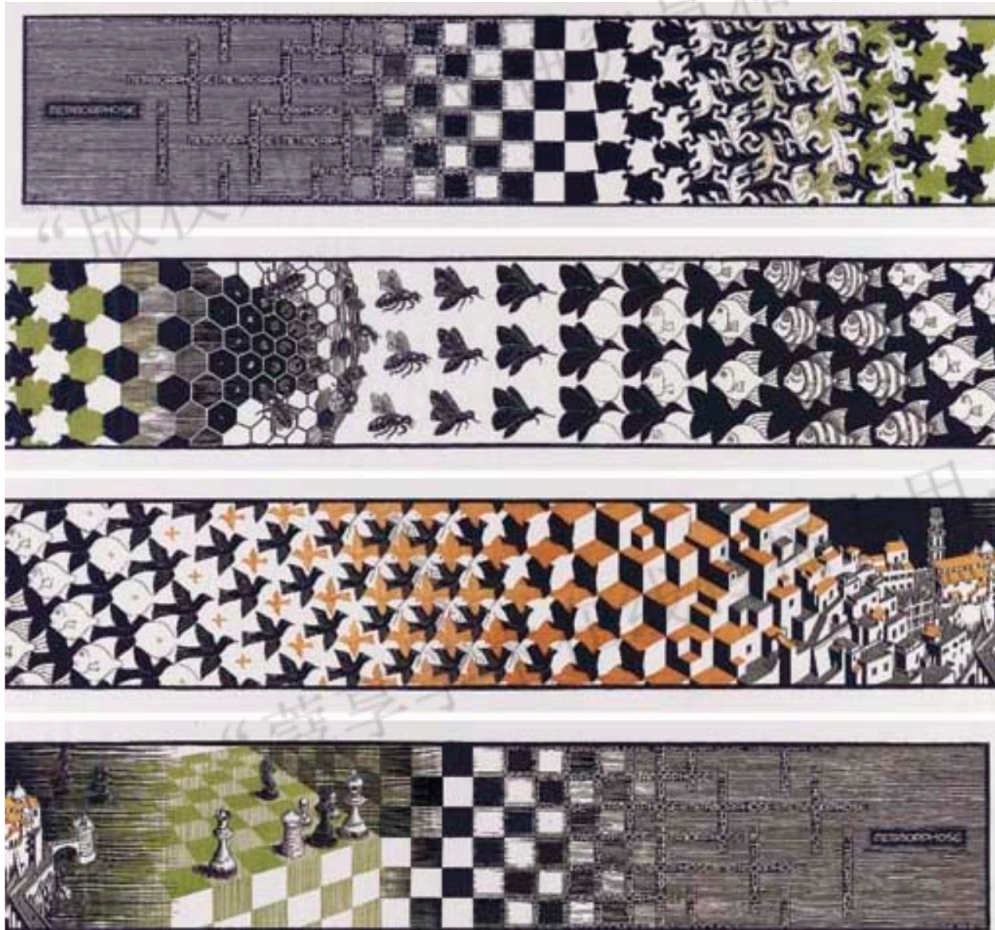
1984

现象	破缺的对称性	高对称性	低对称性	序参量	元激发	广义刚度现象	缺陷
铁电性	空间反演	非极性晶体	极性晶体		光声子	铁电回滞	畴界
反铁电性	空间反演	非极性晶体	极性晶体		光声子		畴界
✓铁磁性	✓时间反演	顺磁体	铁磁体		✓自旋波	永磁性磁滞	畴界
反铁磁性	时间反演	顺磁体	铁磁体		自旋波	反铁磁共振中的微妙效应	畴界
✓超导电性	✓规范不变性	正常金属	超导体		✓电子	超导电性	涡线 ✓ flux
✓4He 超流性	✓规范不变性	正常液体	超流体		✓声子, <u>旋子</u>	超流性	涡线 ✓
3He 超流性	规范不变性	正常液体	各向异性超流体			超流性	涡线, 旋错, 点缺陷
向列型液晶	旋转	正常液体	取向液体			取向弹性	向错, 点缺陷
胆甾型或近晶型液晶	平移	取向液体	密度波			取向弹性	向错, 点缺陷, 位错
晶体	平移	液体	固体		声子	刚度	位错, 晶界, 点缺陷
✓电荷密度波	✓平移	正常电子气	密度波		✓相位子, 振幅子	滑动的 CDW	公度错, 位错
自旋密度波	平移	正常电子气	自旋密度波		相位子, 振幅子		公度错, 位错

phonon

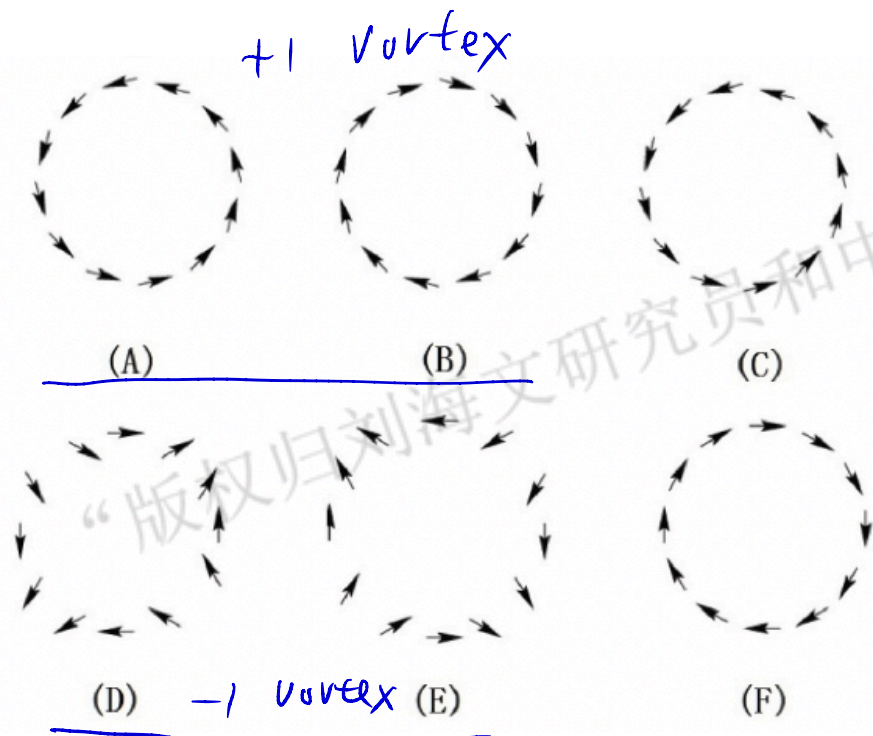
3. 凝聚态物理的新范式？

拓扑



“Metamorphosis II”
M. C. Escher

Berezinskii-Kosterlitz-Thouless phase transition — 2D XY model



$$H = -J_s \sum_{\langle i,j \rangle} \cos [\varphi_i - \varphi_j]$$

↑ ↑



晶格正规化的二维XY模型

$$\oint dr \nabla \varphi(\mathbf{r}) = 2\pi n_w$$

$$E = \int_a^L dr 2\pi r \frac{J_s}{2} \frac{1}{r^2} = \pi J_s \ln \left(\frac{L}{a} \right)$$

单个涡旋态对应的能量增加

$$S = k_B \ln \frac{L^2}{a^2}$$



涡旋
出现

涡旋态位形变化引起的熵变

(A)(B)为缠绕数为+1的涡旋态
(D)(E)为缠绕数为-1的涡旋态
(C)(F)分别为对应的梯度场

kT
↓

Anderson



$$F = \underline{(\pi J_s - 2k_B T)} \ln \left(\frac{L}{a} \right)$$

体系自由能

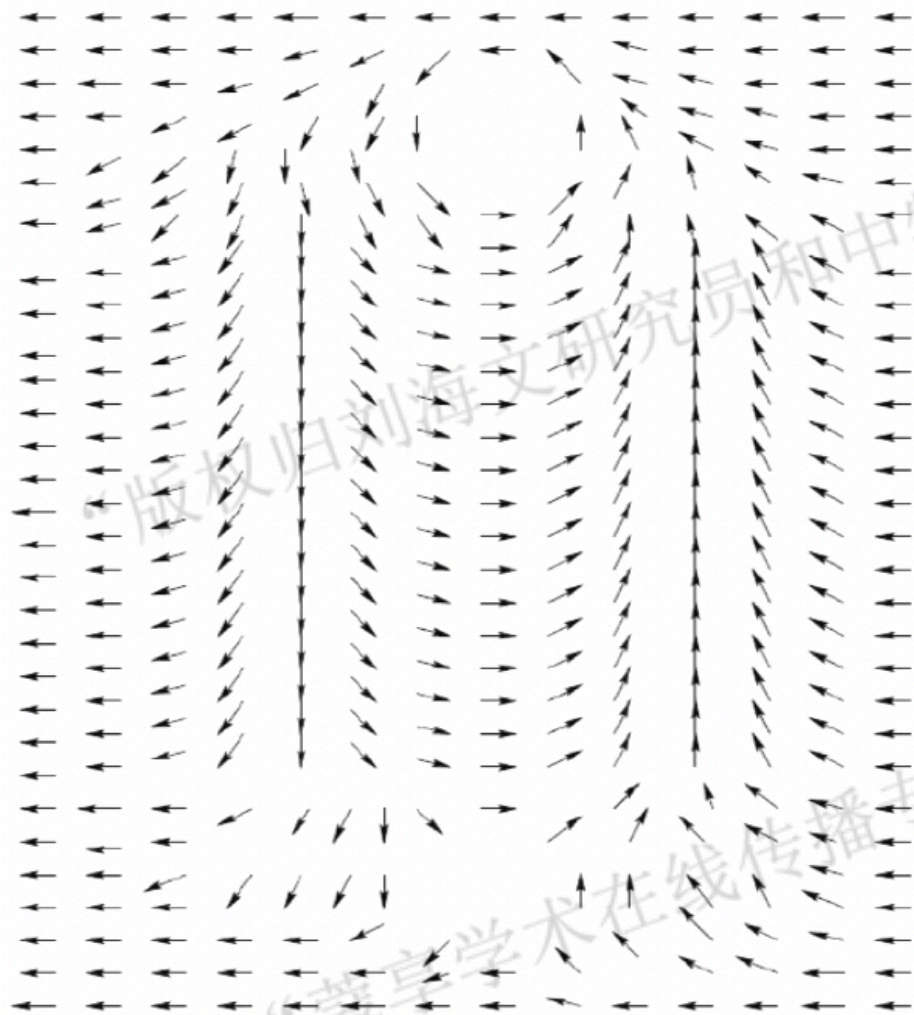
$$T > T_{BKT}$$

$$T_B = \frac{\pi J_s}{2k_B}$$

VL Berezinskii, JETP **34**, 610 (1972).

JM Kosterlitz, and DJ Thouless, JPC **6**, 1181 (1973).

Berezinskii-Kosterlitz-Thouless phase transition — 2D XY model



涡旋-反涡旋对激发示意图

BKT转变温度

$$k_B T_{BKT} = \frac{\pi J_s}{2}$$

关联函数

$$G(r) \sim e^{-\frac{r}{\xi(T)}}$$

关联长度

$$\xi(T) \sim e^{-b|T-T_{BKT}|^{-1/2}}$$

$T > T_{BKT}$

Exponential divergence

体系存在单个涡旋态激发，容易受到散射
改变位形，故体系存在耗散

$T < T_{BKT}$

涡旋-反涡旋态成对出现，不容易受到散射，
故体系不存在耗散，超流特性

2D flow

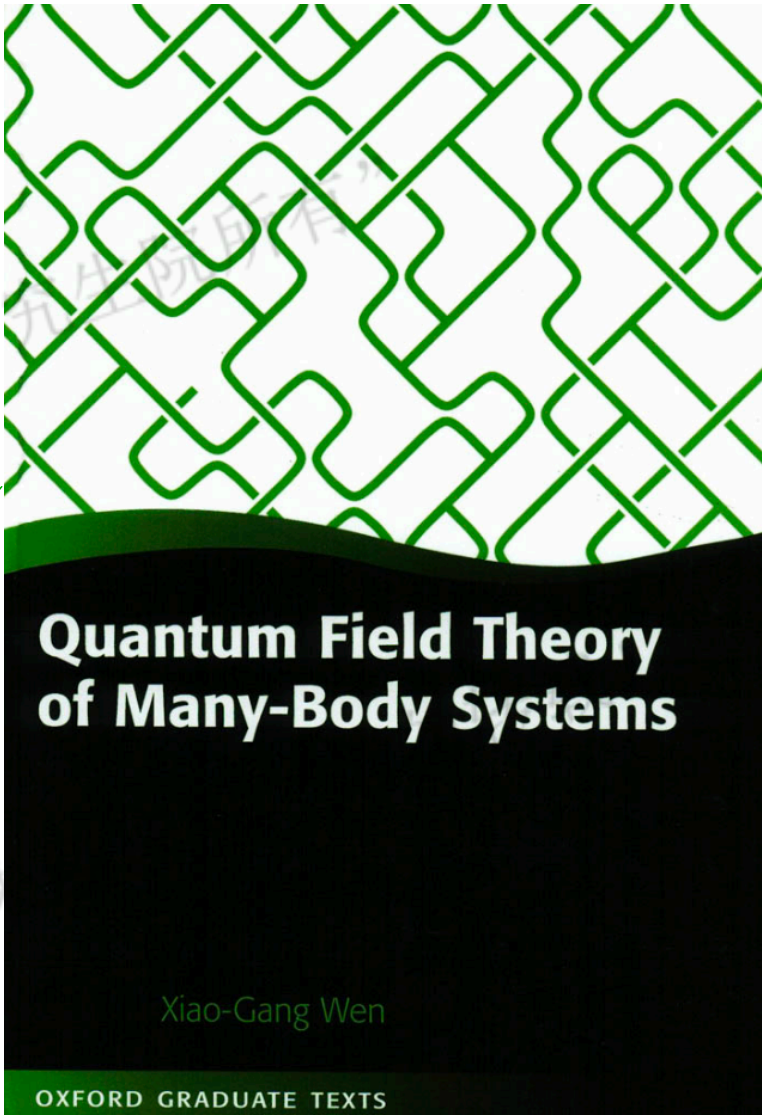
VL Berezinskii, JETP **34**, 610 (1972).

JM Kosterlitz, and DJ Thouless, JPC **6**, 1181 (1973).

The quantum theory of condensed matter (i.e. solids and liquids) has been dominated by two main themes. The first one is **band theory** and **perturbation theory**. It is loosely based on Landau's Fermi liquid theory. The second theme is Landau's symmetry-breaking theory and renormalization group theory.

A peek into the new world is offered by the discovery of the fraction quantum Hall effect (Tsui *et al*, 1982). Another peek is offered by the discovery of high-Tc superconductors (Bednorz and Mueller, 1986). Both phenomena are completely beyond the two themes outlined above.

Selected from
PREFACE of Quantum Field Theory of Many-body Systems
by Xiao-gang Wen



Quantum Field Theory of Many-Body Systems

Xiao-Gang Wen

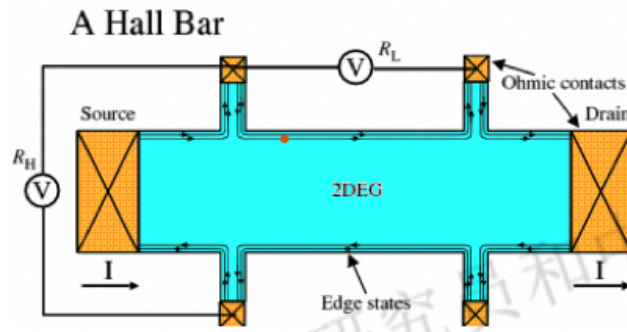
OXFORD GRADUATE TEXTS



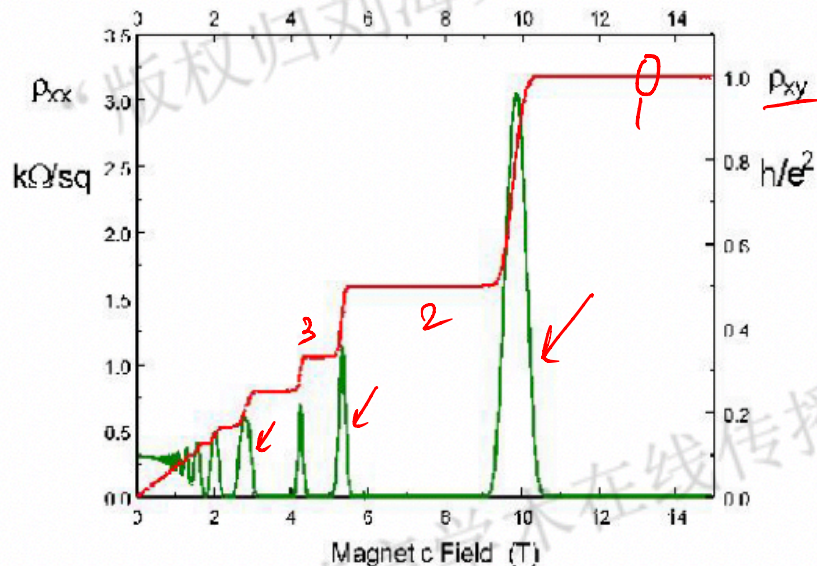
Integer Quantum Hall effect

✱ ✱

SDH 1/2h/e^2



□ Under low temperatures and strong magnetic fields, the Hall conductance take on the quantized values.



K.Von Klitzing (1980)
Nobel Prize 1985

$$\underline{\rho_{xy}} = \underline{R_Q} / \underline{n} \quad n = \text{integer}$$

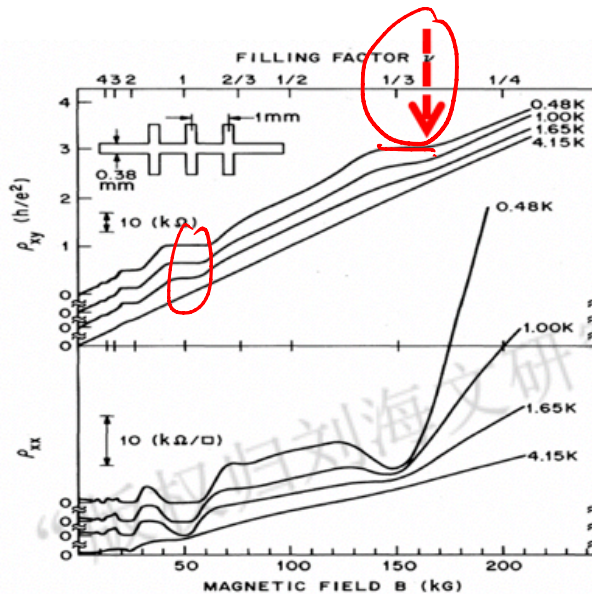
□ R_Q Resistance quantum

$$\leftarrow R_Q = h/e^2 = 25.812\,807\, \text{k}\Omega$$

(Hall-) Resistance $R_H = U/I$

PRL 45,494 (1980)	25 812.68 (8) Ω
BIPM (PARIS)	25 812.809 (3) Ω
PTB (D)	25 812.802 (3) Ω
ETL (JAPAN)	25 812.804 (8) Ω
VSL (NL)	25 812.802 (5) Ω
NRC (Can)	25 812.814 (6) Ω
EAM (CH)	25 812.809 (4) Ω
NBS (USA)	25 812.810 (2) Ω
NPL (GB)	25 812.811 (2) Ω
1.1.1990	25 812.80700 Ω

Fractional quantum Hall effect



D. C. Tsui, H. L. Stomer et al (1982)



Stormer, Laughlin, Tsui
1998 Nobel Prize

(1983) Laughlin wave-function
☐ Hall conductance fractional value
 $\rho_{xy} = (p/q)R_Q$ e.g. $p=3, q=1$

☐ Theoretical explanation

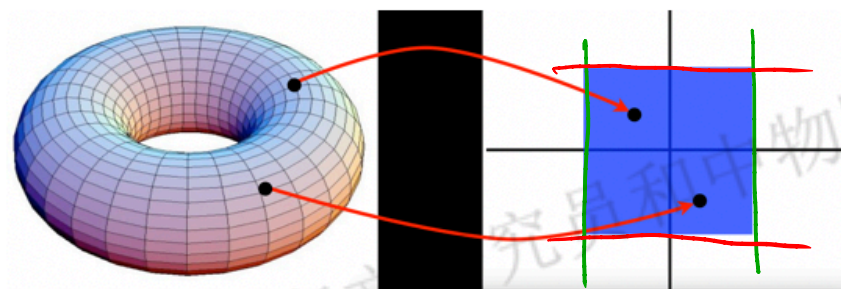
1. Collective motion of electron under magnetic field.

2. Composite fermion with fractional charge e/p

$\frac{p}{3}$; $\uparrow$ J. K Jain FQHE $\rightarrow$ IQHE

Topological origin of Integer Quantum Hall effect

TKNN number (Chern number)



Bloch Bands

Brillouin zone

Bloch Bands

$$|\psi_n(\mathbf{q})\rangle = |\psi_n(\mathbf{q} + \mathbf{G})\rangle$$

$$\sigma_{xy} = \frac{e^2}{h} \int_{\text{BZ}} \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \Omega_{k_x k_y} = n \frac{e^2}{h}$$

Chern number

$$\Omega_{n,\mu\nu}(\mathbf{R}) = i \sum_{n' \neq n} \frac{\langle n | (\partial H / \partial R_\mu) | n' \rangle \langle n' | (\partial H / \partial R_\nu) | n \rangle - (\nu \leftrightarrow \mu)}{(\epsilon_n - \epsilon_{n'})^2}$$

Berry curvature (1984)

□ The Hall conductance is **topological invariant** (Chern number), which can only take integer values.

TKNN, PRL (1982)

$$\sigma_{xy} = n \cdot \frac{e^2}{h}$$

↑ 线性响应



David Thouless

Nobel Prize (2016)



Michael Berry

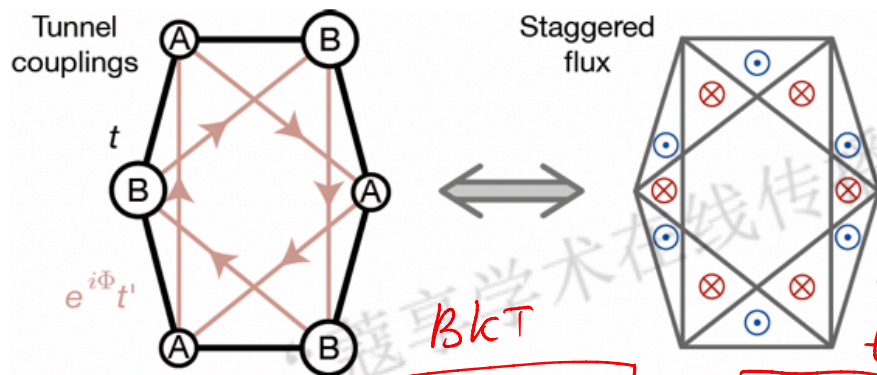
Dirac Medal (1996)

Integer Quantum Hall effect without Landau Level – Haldane model

Nonzero Chern number, one
need to break time reversal
symmetry. But the total flux is
zero.

Toy model of F. D. M. Haldane.

Haldane model

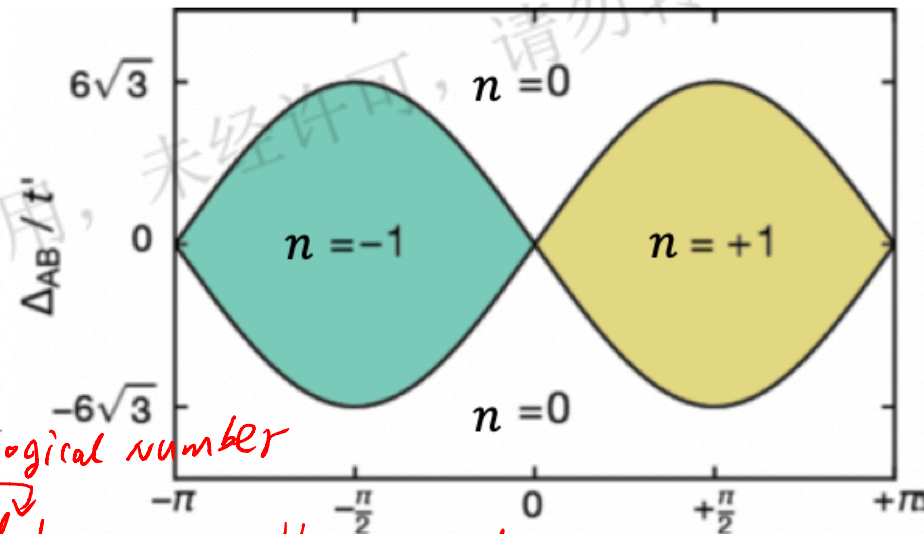


BlkT
Kosterlitz; Thouless
 $\frac{1}{4}$

topological number
Haldane
 $\frac{1}{4}$



1988
F. D. M. Haldane
Nobel Prize (2016)



2016 Nobel Prize
Haldane, PRL (1988)

Realization of Haldane 's model and QAHE (2013年)



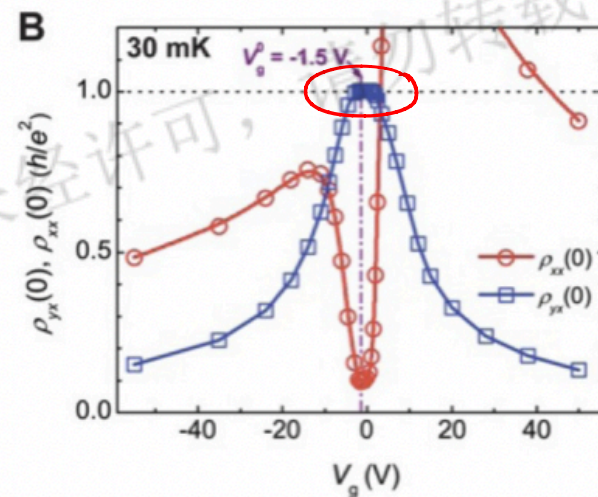
Scientific Background on the Nobel Prize in Physics 2016

TOPOLOGICAL PHASE TRANSITIONS AND TOPOLOGICAL PHASES OF MATTER

breaks the invariance under time reversal, which is necessary to have a Hall effect. This phase of matter described by Haldane is now called a *Chern insulator*, and twentyfive years later, in 2013, a quantized Hall effect was observed in thin films of Cr-doped $(\text{Bi,Sb})_2\text{Te}_3$ at zero magnetic field, thus providing the first experimental detection of this phase of matter [15]. In Fig. 6 we see a clear plateau in the Hall resistance ρ_{yx} at a density (regulated by the gate voltage) corresponding to a filled band. The later development of *topological band theory* will be discussed in the concluding section.

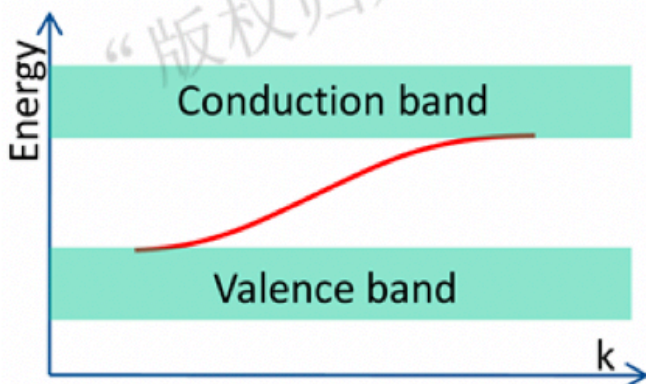
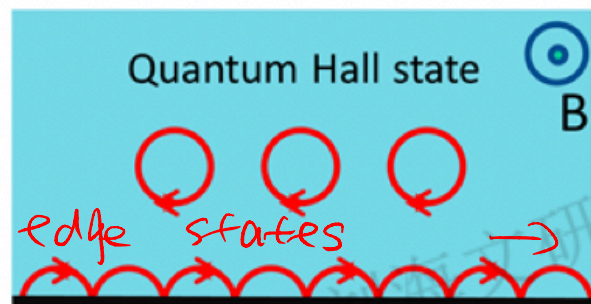


薛其坤教授



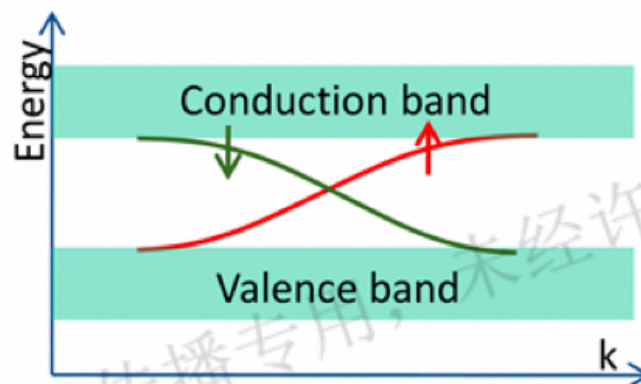
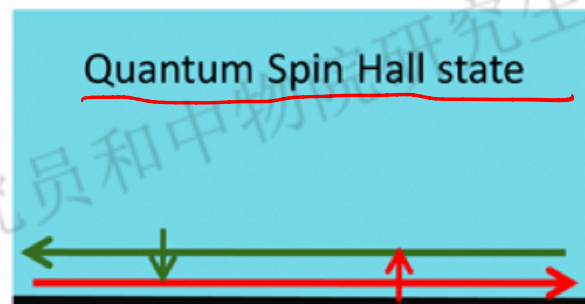
From IQHE to (Topological Insulators)

K. Von Klitzing
(1980)



Chiral edge states.
Break TRS.
No backscattering.

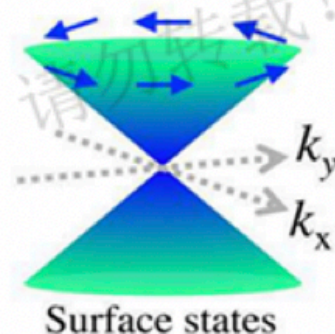
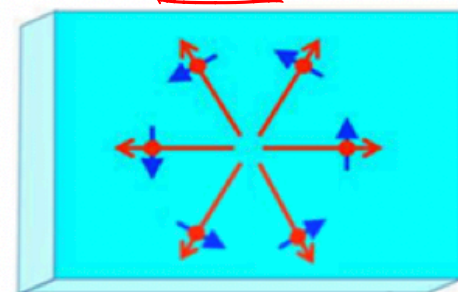
C. L. Kane & S. C. Zhang (2006) $\Rightarrow$



Helical edge states. Satisfy TRS.
No backscattering without magnetic impurities.

C. L. Kane & J. E. Moore, etc. (2007)

3D TI

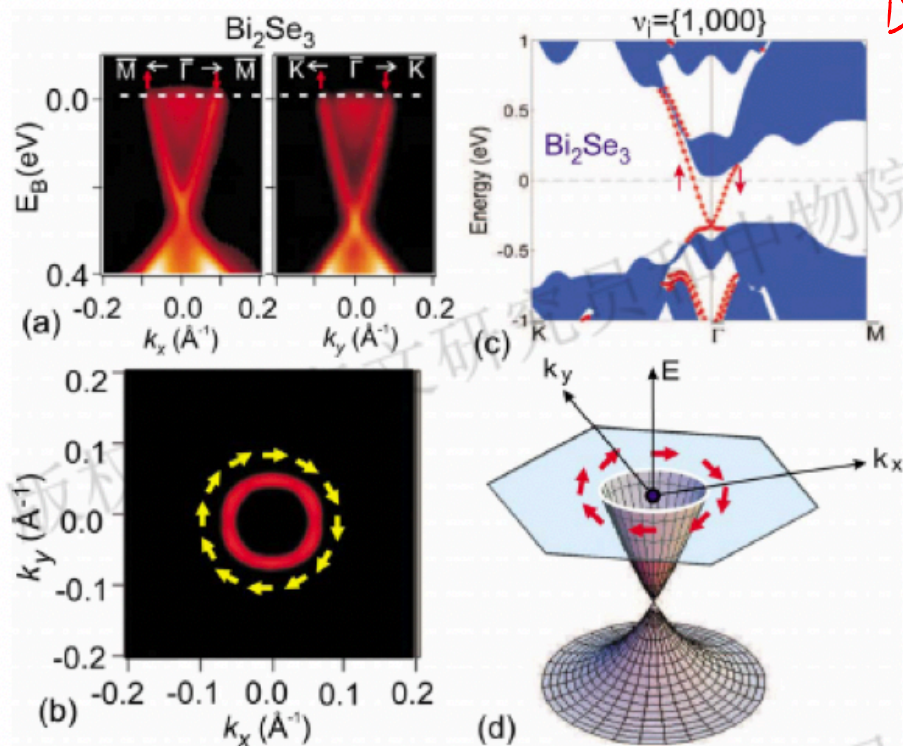


M. Z. Hasan and C. L. Kane, Rev. Mod. Phys. 82, 3045 (2010).

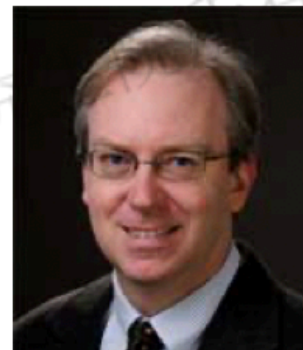
X. L. Qi and S. C. Zhang, Rev. Mod. Phys. 83, 1057 (2011).

Experimental verification of Topological Insulators

Dirac prize **Buckley Prize (2012)**



ARPES detection.



Charles L. Kane



Laurens W. Molenkamp



Shoucheng Zhang

M. Z. Hasan and C. L. Kane, Rev. Mod. Phys. 82, 3045 (2010).

X. L. Qi and S. C. Zhang, Rev. Mod. Phys. 83, 1057 (2011).

Topological semimetals

topological insulator

Simplest Case with Weyl nodes:

Semimetal

insulator

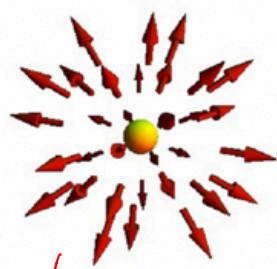
$$H(\vec{k}) = \pm \vec{k} \cdot \vec{\sigma} = \pm \begin{bmatrix} k_z & k_x - ik_y \\ k_x + ik_y & -k_z \end{bmatrix}$$

Weyl nodes:

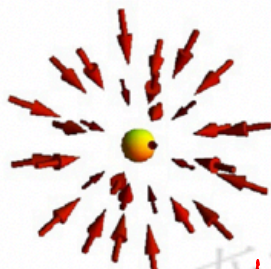
$$\vec{A}(\vec{k}) = i \langle u(\vec{k}) | \nabla_{\vec{k}} | u(\vec{k}) \rangle$$

- (1) Gapless, no mass term
- (2) Chirality $\pm$ (left or right-hand)
- (3) Protected by lattice symmetry

Monopoles in k-space:



$$H = +v_F \vec{p} \cdot \vec{\sigma}$$



$$H = -v_F \vec{p} \cdot \vec{\sigma}$$

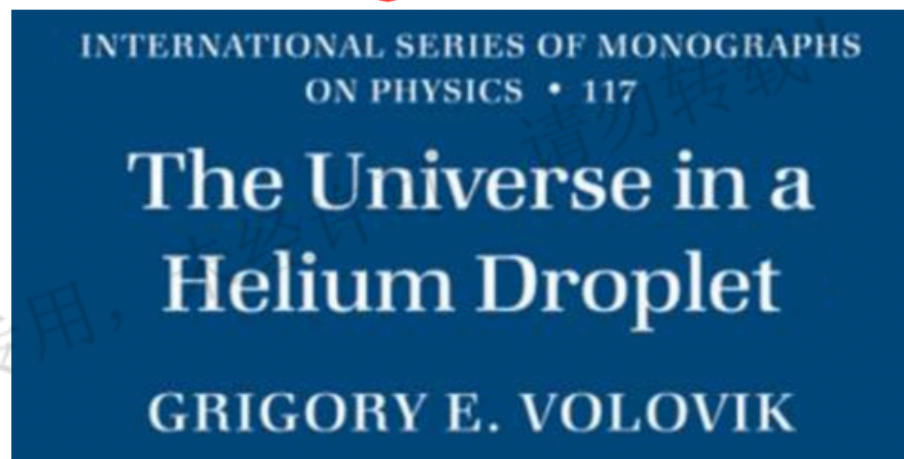
$$\vec{\Omega}(k) = \vec{\nabla}_k \times \vec{A}(k) = \pm \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|^3} \cdot \frac{1}{2}$$

Berry curvature diverges near the monopoles.

Grigorii E. Volovik, JETP (2002).



Grigorii E. Volovik
Onsager Prize (2014)



Topological Charge:

$$\frac{1}{4\pi} \oint \Omega(k) \cdot dS(k) = Q$$

Beyond Topological Insulator/Semimetal

From band topology to SPT

Fermion SPT

1. Classification of free-fermion nontrivial SPT is well-known (Ludwig; Kitaev)
Topological insulators (time-reversal)
Topological crystalline insulator. (space group)
2. Classification of interacting-fermion nontrivial SPT is under debate (Gu, Wen, Senthil, Qi....)

Boson SPT

1. Haldane phase in spin-1 is a bosonic SPT, a short-range entangled state. (Pollmann)



Xiao-gang Wen
Buckley Prize (2017)

2. Group cohomology classification (Wen)

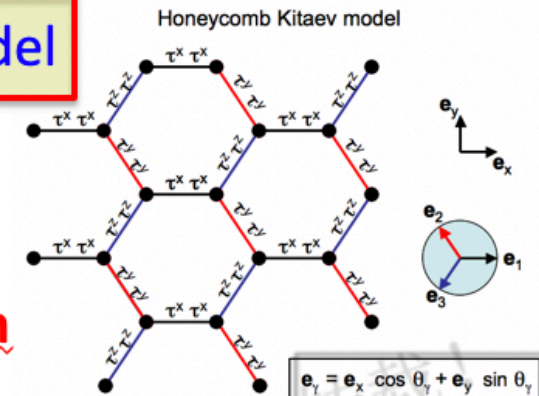
T. Senthil, ARCMP, 2015

Topological quantum computation

Maierana fermion as Ising anyon.

2D Kitaev model

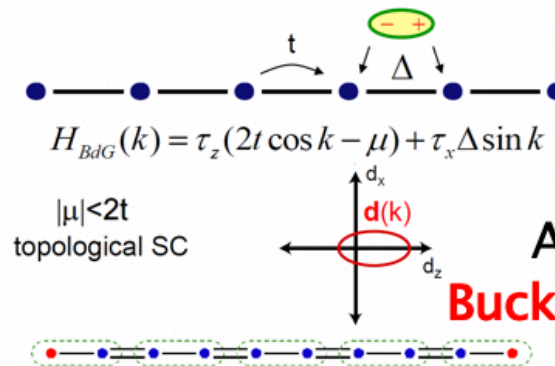
Maierana fermionisation



$$H = -J_x \sum_{x\text{-links}} \sigma_i^x \sigma_j^x - J_y \sum_{y\text{-links}} \sigma_i^y \sigma_j^y - J_z \sum_{z\text{-links}} \sigma_i^z \sigma_j^z - K \sum_{(i,j,k)} \sigma_i^x \sigma_j^y \sigma_k^z$$

1D Kitaev model

$$H = \sum t(c_i^\dagger c_{i+1} + c_{i+1}^\dagger c_i) - \mu c_i^\dagger c_i + \Delta(c_i c_{i+1} + c_{i+1}^\dagger c_i^\dagger)$$

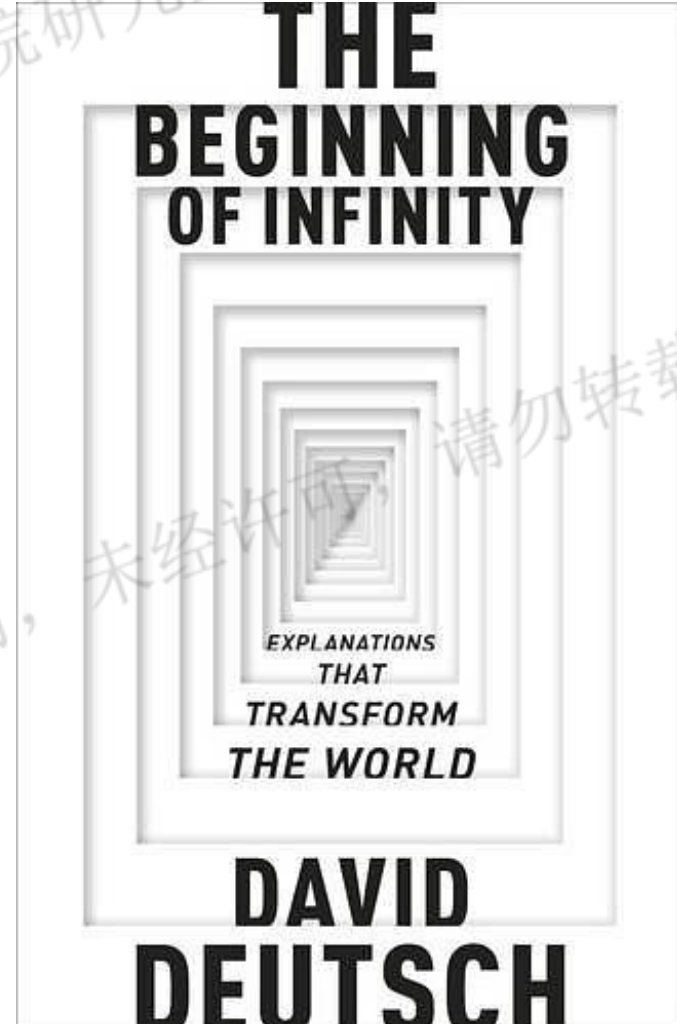
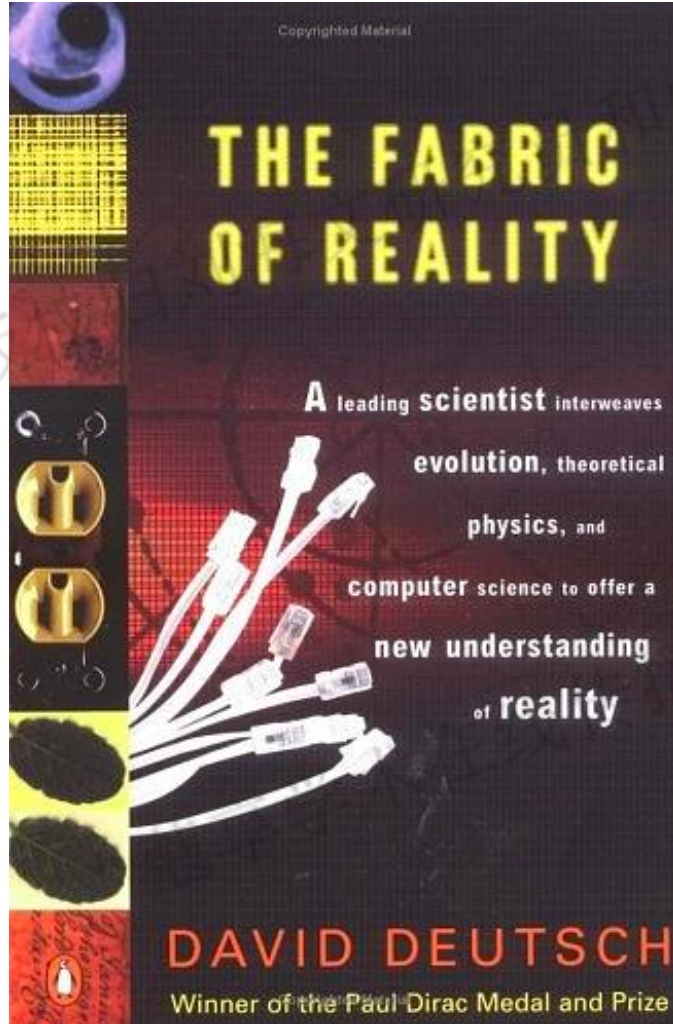


Alexei Kitaev
Buckley Prize (2017)

The progress has no necessary end, it is the beginning of infinity.

--David Deutsch

In retrospect to Thomas Kuhn “paradigm shift”



General introduction to Solid State Theory

From solid state physics to condensed matter physics.

- A) Focus on long-rang order + excitations.
- B) Introduce modern concepts in low-dimensional and topological systems.
- C) Introduce important methods: mean field theory, Green's function method including equation of motion and Feynman diagrams.

讲课内容

- 第一章 概论与回顾 ; 复习⑤体物22.
- 第二章 能带论与电子气 ① Steven Simon
- 第三章 玻色系统与磁性系统 ② VI electrons in solids
basic notion of chapter 1 ;
- 第四章 线性响应理论与格林函数方法
- 第五章 相互作用电子体系
- 第六章 常规超导
- 第七章 介观与低维体系
- 第八章 贝里相位与能带拓扑