

“高能量密度物理” 课程

第5讲

朱少平， 2020.10.19

第四章：全电离等离子体中电子与光子的能量交换

第四讲回顾：

1. 电子能量传输：热传导模型和适用条件

- 仅考虑电子-离子碰撞；
- 电子分布函数保留最低级的各向异性: $f_e(\mathbf{v}) = f_0(v) + \frac{\mathbf{f}_1(v) \cdot \mathbf{v}}{v}$;
- 电子分布函数各向同性部分为Maxwell：近似局域热动平衡；
- 假定空间每一处电流密度均为零：建立电场与密度、温度之间的关系

$$Q = -\frac{16}{\sqrt{\pi}} \frac{\bar{\lambda}_e}{L_T} Q_F \sim -T_e^{5/2} \frac{\partial T_e}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad Q \sim -T_e^{5/2} \frac{\partial T_e}{\partial \mathbf{x}}$$

第四章：全电离等离子体中电子与光子的能量交换

第四讲回顾：

1. 电子能量传输：热传导模型和适用条件

- 适用条件： $\bar{\lambda}_e / L_T \ll \ll 1$ ，对电子能流起主要贡献的电子的自由程要远远小于温度的空间尺度，而不仅仅是电子平均自由程要远远小于温度的空间尺度；
- 限流处理：知到有局限、但又需要用。

第四章：全电离等离子体中电子与光子的能量交换

第四讲回顾：

1. 电子能量传输：热传导模型和适用条件

- 电子-电子碰撞的影响：对低原子系数系统，需要考虑。

“版权归朱少平研究员和中物院研究生院所有”
“薅享学术在线传播专用，未经许可，请勿转载！”

第四章：全电离等离子体中电子与光子的能量交换

第四讲回顾：

关于Biermann电池效应

$$j = \frac{4\pi e}{3\Xi} \frac{N_e v_{te}^5}{(\pi)^{3/2}} \left[3 \left(\frac{1}{L_n} - \frac{3}{2L_T} + \frac{eE}{T_e} \right) + \frac{12}{L_T} \right] = \frac{4\pi e}{3\Xi} \frac{N_e v_{te}^5}{(\pi)^{3/2}} \left(\frac{3}{L_n} + \frac{3eE}{T_e} + \frac{15}{2L_T} \right)$$

$$j = 0$$

$$\frac{eE}{T_e} = -\frac{1}{L_n} - \frac{5}{2L_T} = -\frac{1}{N_e} \frac{\partial N_e}{\partial x} - \frac{5}{2T_e} \frac{\partial T_e}{\partial x}$$

$$eN_e E = -\frac{\partial (N_e T_e)}{\partial x} - \frac{3}{2} N_e \frac{\partial T_e}{\partial x} = -\frac{\partial p_e}{\partial x} - \frac{3}{2} N_e \frac{\partial T_e}{\partial x}$$

第四章：全电离等离子体中电子与光子的能量交换

第四讲回顾：

1. 电子能量传输：热传导模型和适用条件

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{eN_e} \frac{\partial p_e}{\partial \mathbf{x}} - \frac{3}{2e} \frac{\partial T_e}{\partial \mathbf{x}}$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \times \mathbf{E}$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \times \left(\frac{1}{eN_e} \frac{\partial p_e}{\partial \mathbf{x}} + \frac{3}{2e} \frac{\partial T_e}{\partial \mathbf{x}} \right) = -\frac{1}{eN_e^2} \frac{\partial N_e}{\partial \mathbf{x}} \times \frac{\partial p_e}{\partial \mathbf{x}}$$

Biermann电池效应

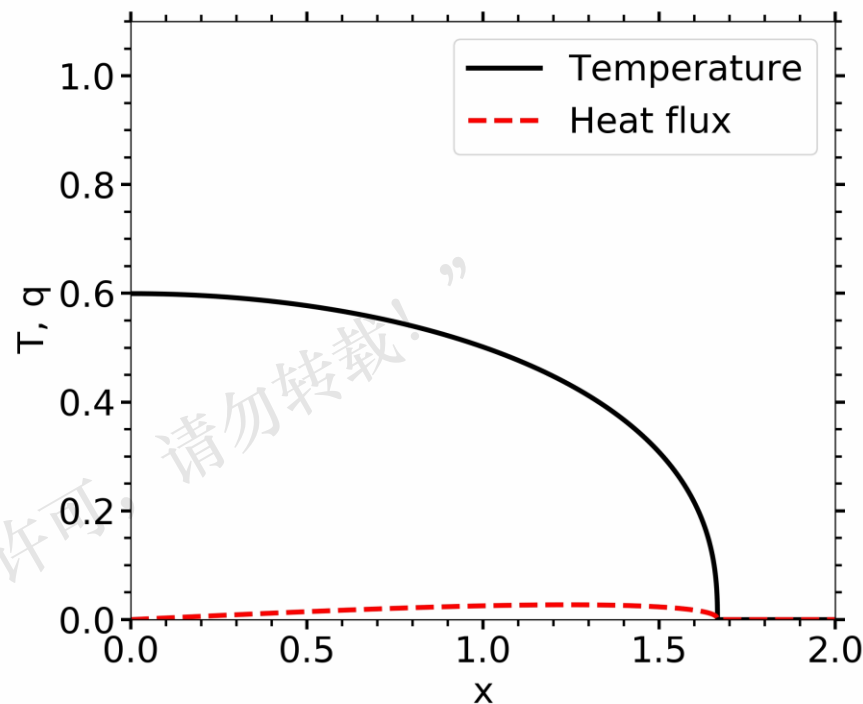
第四章：全电离等离子体中电子与光子的能量交换

第四讲回顾：

2. 电子热波：非线性电子热传导

非线性热传导系统，热传导系数正比于温度的幂次方，温度低处传导慢，温度高处传导快，这样在系统的冷区和热区形成一个边界，一个清晰的阵面，这就是热波的波阵面，电子能量以阵面清晰的波的形式向周围传输。

波阵面的运动速度：初始时热传导速度极快，随着时间发展逐渐变慢。



$$u_f = \frac{dx_f}{dt} = \frac{\xi_0 (AQ^n)^{1/(n+2)}}{n+2} t^{-\frac{n+1}{n+2}}$$

第四章：全电离等离子体中电子与光子的能量交换

第四讲回顾：

2. 电子热波：非线性电子热传导

自相似变换：决定系统演化规律的物理量、分析量纲

唯一性问题

“版归朱中物院研究员和中物院研究生”
“共享学术在线传播专用，未经许可，请勿转载！”

第四章：全电离等离子体中电子与光子的能量交换

全电离高能量密度系统中电子与光子之间的相互作用：

1. 韧致辐射与韧致吸收
2. 康普顿散射与逆过程

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho C_v T_e) + \dots = -\nabla \cdot \mathbf{F} + C_{ei}(T_e - T_i) + E_{\text{电子-光子}}$$

第四章：全电离等离子体中电子与光子的能量交换

韧致辐射与韧致吸收

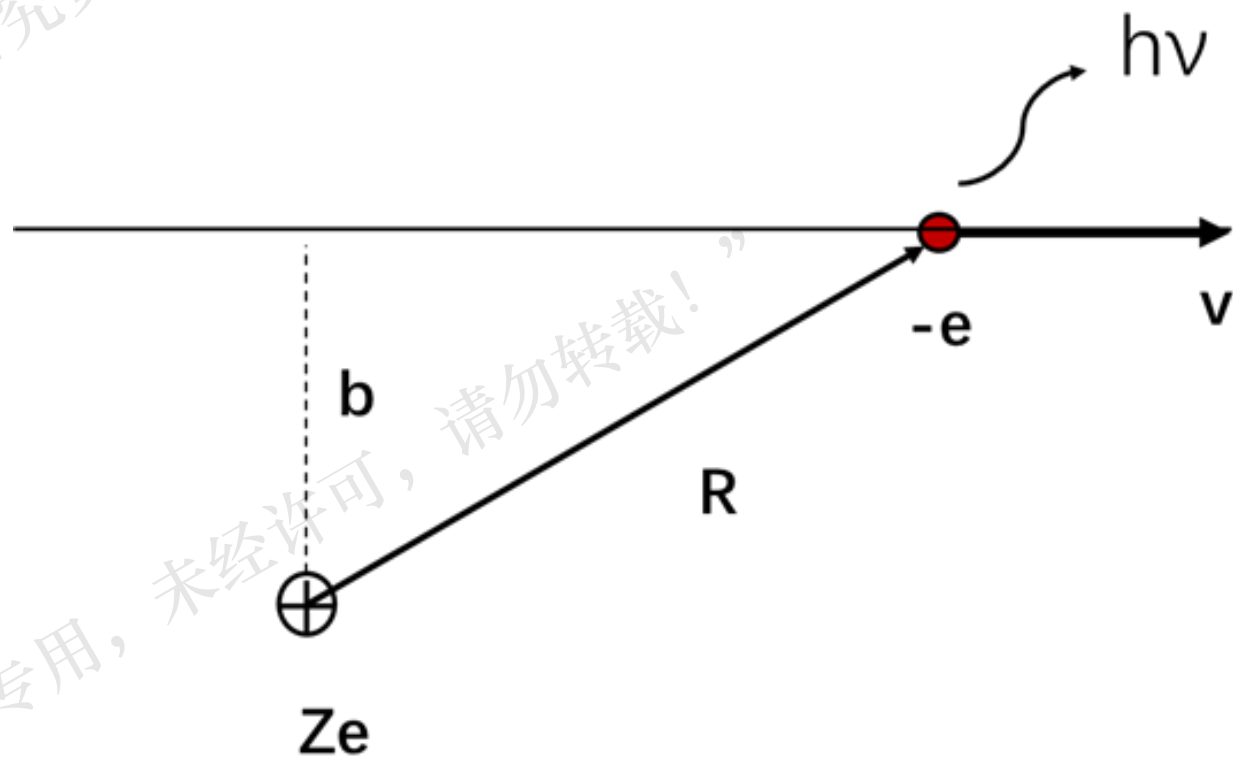
“归朱少平研究员和中物院研究生院”
“共享学术在线传播专用，未经许可，请勿转载”

第四章：全电离等离子体中电子与光子的能量交换

单个电子的韧致辐射

韧致辐射是当电子经过离子附近时，受到离子吸引产生了加速度，从而发射出光子的过程。

由于电子运动速度一般比离子速度大很多，可以近似地认为离子静止不动。



第四章：全电离等离子体中电子与光子的能量交换

偶极矩为： $\mathbf{d} = -e\mathbf{R}$

两阶导数： $\ddot{\mathbf{d}} = -e\ddot{\mathbf{R}} = -e\dot{\mathbf{v}}$

定义： $\mathbf{d}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{d}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \Rightarrow \mathbf{d}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{d}(t) e^{-i\omega t} dt$

$$-\int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 \mathbf{d}(\omega) e^{i\omega t} d\omega = -e\dot{\mathbf{v}} \Rightarrow -\int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-i\omega' t} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 \mathbf{d}(\omega) e^{i\omega t} d\omega = -\int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-i\omega' t} e\dot{\mathbf{v}}(t)$$

$$-\int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 \mathbf{d}(\omega) d\omega \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega - \omega')t} dt = -2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 \mathbf{d}(\omega) \delta(\omega - \omega') d\omega = -2\pi \omega'^2 \mathbf{d}(\omega')$$

$$-\omega^2 \mathbf{d}(\omega) = -\frac{e}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{\mathbf{v}} e^{-i\omega t} dt$$

第四章：全电离等离子体中电子与光子的能量交换

偶极矩为： $\mathbf{d} = -e\mathbf{R}$

两阶导数： $\ddot{\mathbf{d}} = -e\ddot{\mathbf{R}} = -e\dot{\mathbf{v}}$

做Fourier变换： $-\omega^2 \mathbf{d}(\omega) = -\frac{e}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{\mathbf{v}} e^{-i\omega t} dt$ $\mathbf{d}(\omega) = \frac{e}{2\pi\omega^2} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{\mathbf{v}} e^{-i\omega t} dt$

定义碰撞时间： $\tau = \frac{b}{v}$

定性上，碰撞参数越大，电子运动受到离子的加速越弱，辐射频越低；
碰撞参数无穷大时，电子不受离子影响，直线运动，辐射频率为零。

第四章：全电离等离子体中电子与光子的能量交换

$$\mathbf{d}(\omega) = \frac{e}{2\pi\omega^2} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{\mathbf{v}} e^{-i\omega t} dt \quad \mathbf{d}(\omega) \sim \begin{cases} \frac{e}{2\pi\omega^2} \Delta\mathbf{v}, & \omega\tau \ll 1 \\ 0, & \omega\tau \gg 1 \end{cases}$$

$\Delta\mathbf{v}$ 是碰撞前后电子速度改变。

有了偶极矩，可以给出一个电子、与离子碰撞一次辐射的能谱为

$$\frac{dW}{d\omega} = \frac{8\pi\omega^4}{3c^3} |\mathbf{d}(\omega)|^2 \sim \begin{cases} \frac{2e^2}{3\pi c^3} |\Delta\mathbf{v}|^2, & \omega\tau \ll 1 \\ 0, & \omega\tau \gg 1 \end{cases}$$

第四章：全电离等离子体中电子与光子的能量交换

$$|\Delta \mathbf{v}| = 2v \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \approx \frac{2Ze^2}{bm_e v}$$

$$\frac{dW}{d\varpi} = \begin{cases} \frac{8Z^2 e^6}{3\pi c^3 m_e^2 b^2 v^2}, & b \ll v/\varpi \\ 0, & b \gg v/\varpi \end{cases}$$

“版权归朱少平研究员和中物院研究生院所有”
“共享学术在线传播专用，未经许可，请勿转载！”

第四章：全电离等离子体中电子与光子的能量交换

假定等离子体的离子数密度为 N_i ，电子数密度为 N_e ，电子速度固定为 v 。在碰撞参数处于 $b \rightarrow b + db$ 之间的圆环面积为 $2\pi b db$ 。

单位时间电子运动的长度为 v ，所以单位时间、一个电子与处于碰撞参数 $b \rightarrow b + db$ 之间的离子发生碰撞的次数为

$$N_i v 2\pi b db$$

碰撞参数越小，碰撞次数越少，也就是频率高的光子数越少。所以，韧致辐射的强度应该随着频率增高而减小。

第四章：全电离等离子体中电子与光子的能量交换

对碰撞参数积分，得到单位时间、单位频率、一个电子与等离子体中离子发生碰撞辐射出的光子能量

$$\frac{dW}{d\omega dt} = N_i 2\pi v \int_{b_{\min}}^{\infty} \frac{dW(b)}{d\omega} b db$$

采用低频近似

$$\frac{dW}{d\omega dt} = \frac{16e^6}{3c^3 m_e^2 v} Z^2 N_i \int_{b_{\min}}^{b_{\max}} \frac{1}{b} db = \frac{16e^6}{3c^3 m_e^2 v} Z^2 N_i \ln \frac{b_{\max}}{b_{\min}}$$

第四章：全电离等离子体中电子与光子的能量交换

引入Gaunt因子

$$g_{ff}(\nu, \varpi) = \frac{\sqrt{3}}{\pi} \ln \frac{b_{\max}}{b_{\min}}$$

$$\frac{dW}{d\varpi dt} = \frac{16\pi e^6}{3\sqrt{3}c^3 m_e^2 \nu} Z^2 N_i g_{ff}(\nu, \varpi)$$

将频率由圆频率 ω 换成角频率 ν

$$\frac{dW}{d\nu dt} = \frac{32\pi^2 e^6}{3\sqrt{3}c^3 m_e^2 \nu} Z^2 N_i g_{ff}(\nu, \nu)$$

第四章：全电离等离子体中电子与光子的能量交换

对于韧致辐射，光子的最大能量等于电子的动能即

$$h\nu_{\max} = E$$

“版权归朱少平研究员和物理学院研究生所有”
“薅享学术在线传播专用，未经许可，请勿转载！”

第四章：全电离等离子体中电子与光子的能量交换

等离子体的韧致辐射

考虑等离子体系统，单位体积的电子数为 N_e ，单位体积的离子数为 N_i ，电子的分布函数为 $f_e(\mathbf{v})$ ，单位体积、速度 $\mathbf{v}$ 处空间 $d^3\mathbf{v}$ 中的电子数目为，

$$N_e f_e(\mathbf{v}) d^3\mathbf{v}$$

所以单位时间、单位体积、单位频率等离子体辐射的光子能量为

$$\frac{dW}{d\nu dV dt} = \int_{v_{\min}}^{\infty} \frac{dW}{d\nu dt} \cdot N_e f_e(\mathbf{v}) d^3\mathbf{v}$$

$$v_{\min} = \sqrt{\frac{2h\nu}{m_e}}$$

第四章：全电离等离子体中电子与光子的能量交换

假定电子分布函数为Maxwell

$$f_e(\mathbf{v}) = \left(\frac{m_e}{2\pi k_B T_e} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m_e \mathbf{v}^2}{2k_B T_e}\right)$$

则单位体积、单位时间、频率 ν 处 $d\nu$ 范围内辐射的光子能量

$$\begin{aligned} J_\nu d\nu &= \int_{\nu_{\min}}^{\infty} \frac{dW}{d\nu dt} \cdot N_e f_e(\mathbf{v}) d^3\mathbf{v} \cdot d\nu = \int_{\nu_{\min}}^{\infty} \frac{32\pi^2 e^6}{3\sqrt{3} c^3 m_e^2 \nu} Z^2 N_i \cdot N_e f_e(\mathbf{v}) d^3\mathbf{v} \cdot d\nu \\ &= N_i N_e \int_{\nu_{\min}}^{\infty} \frac{32\pi^2}{3\sqrt{3}} \frac{Z^2 e^6}{c^3 m_e^2} \frac{1}{\nu} \left(\frac{m_e}{2\pi k_B T_e} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m_e \mathbf{v}^2}{2k_B T_e}\right) 4\pi \nu^2 d\nu \cdot d\nu \\ &= N_i N_e \cdot \frac{32\pi^2}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{Z^2 e^6}{m_e^2 c^3} \cdot \left(\frac{m_e}{2\pi k_B T_e} \right)^{3/2} \cdot \frac{4\pi k_B T_e}{m_e} \exp\left(-\frac{h\nu}{k_B T_e}\right) d\nu = N_i N_e \cdot \frac{64\pi^2}{3\sqrt{6}\pi} \cdot \frac{Z^2 e^6}{m_e^2 c^3} \cdot \left(\frac{m_e}{k_B T_e} \right)^{1/2} \exp\left(-\frac{h\nu}{k_B T_e}\right) d\nu \end{aligned}$$

第四章：全电离等离子体中电子与光子的能量交换

单位体积、单位时间辐射的光子能量

$$\begin{aligned} J &= \int J_\nu d\nu = N_i N_e \cdot \frac{32\pi\sqrt{2\pi}}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{Z^2 e^6}{m_e c^3 h} \cdot \left(\frac{k_B T_e}{m_e} \right)^{1/2} \\ &= \frac{32\pi\sqrt{2\pi}}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{(4.8 \times 10^{-10})^6 \cdot \sqrt{10^3 \times 1.6 \times 10^{-12}}}{(9.11 \times 10^{-28})^{3/2} \cdot (3 \times 10^{10})^3 \cdot 6.626 \times 10^{-27}} \cdot \sqrt{T_e} \rho^2 Z^2 n_i n_e \\ &= 4.82 \times 10^{-31} Z^2 \sqrt{T_e} \rho^2 n_i n_e \frac{J}{\text{cm}^3 \cdot \text{sec}} = 4.82 \times 10^{-31} Z^2 \sqrt{T_e} \rho^2 n_i n_e \frac{W}{\text{cm}^3} \end{aligned}$$

T_e : keV; $n_{e,i} = N_{e,i} / \rho$, 单位质量粒子数

第四章：全电离等离子体中电子与光子的能量交换

单位体积、单位时间辐射的光子能量

$$J = \int J_\nu d\nu = 4.82 \times 10^{-31} Z^2 \sqrt{T_e} \rho^2 n_i n_e \frac{W}{cm^3}$$

全电离氦等离子体

$Z = 2,$
 $n_{He} = 1.5 \times 10^{23} g^{-1}$
 $n_e = 2n_{He}$

$$J = 8.7 \times 10^{16} \sqrt{T_e} \rho^2 \frac{W}{cm^3}$$

T_e ρ	1	5	10
0.1×10^{-3}	$8.7 \times 10^8 W/cm^3$	$1.9 \times 10^9 W/cm^3$	$2.8 \times 10^9 W/cm^3$
1×10^{-3}	$8.7 \times 10^{10} W/cm^3$	$1.9 \times 10^{11} W/cm^3$	$2.8 \times 10^{11} W/cm^3$
1×10^{-2}	$8.7 \times 10^{12} W/cm^3$	$1.9 \times 10^{13} W/cm^3$	$2.8 \times 10^{13} W/cm^3$

第四章：全电离等离子体中电子与光子的能量交换

根据量子力学理论，除了自发辐射以外，还存在诱导辐射，诱导辐射与自发辐射之比等于一个量子态上的光子数。光子有两个互相独立的极化方向，体积为 h^3 的相空间内包含有两个量子态。

体积为 $d^3\mathbf{x}d^3\mathbf{p}$ 的相空间内包含的量子态数为

$$2 \frac{d^3\mathbf{x}d^3\mathbf{p}}{h^3} = 2d^3\mathbf{x}d^3\mathbf{k}, \quad |\mathbf{k}| = \frac{\nu}{c}$$

一个量子态上的光子数： $f(\mathbf{k})$

单位体积中动量 $\mathbf{p}$ 处 $d^3\mathbf{k}$ 中的光子数： $dn = 2 f(\mathbf{k})d^3\mathbf{k}$

第四章：全电离等离子体中电子与光子的能量交换

如果系统各向同性，也就是每个方向的光子数相同，则有频率间隔 $d\nu$ 内的光子数为

$$dn = 2 f(\mathbf{k}) d^3\mathbf{k} = 8\pi f(k) k^2 dk = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} f(\nu) d\nu = I_\nu d\nu$$

频率间隔 $d\nu$ 内的光子能量为

$$U_\nu d\nu = h\nu dn = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} f(\nu) d\nu = h\nu I_\nu d\nu$$

$$f(\nu) = f_p(\nu) = \frac{1}{e^{h\nu/k_B T} - 1},$$

$$I_\nu = I_{p\nu} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3 (e^{h\nu/k_B T} - 1)},$$

$$U_\nu = U_{p\nu} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3 (e^{h\nu/k_B T} - 1)}$$

第四章：全电离等离子体中电子与光子的能量交换

诱导辐射与自发辐射相加，得到单位体积、单位时间韧致辐射的总光子能量

$$\begin{aligned} J'_\nu d\nu &= J_\nu(1+f)d\nu \\ &= N_i N_e \cdot \frac{64\pi^2}{3\sqrt{6}\pi} \cdot \frac{Z^2 e^6}{m_e^2 c^3} \cdot \left(\frac{m_e}{k_B T_e} \right)^{1/2} \exp\left(-\frac{h\nu}{k_B T_e}\right) (1+f) d\nu \end{aligned}$$

第四章：全电离等离子体中电子与光子的能量交换

韧致辐射的弛豫过程

令频率为 ν 的光子被韧致吸收过程吸收的单位长度吸收系数为

$$\mu_\nu$$

则单位时间、单位体积中被吸收的光子能量为

$$c\mu_\nu U_\nu$$

由于韧致辐射和韧致吸收过程，单位时间、单位体积中光子能谱的变化为

第四章：全电离等离子体中电子与光子的能量交换

$$\frac{dU_\nu}{dt} = J'_\nu - c\mu_\nu U_\nu = J_\nu(1+f) - c\mu_\nu U_\nu$$

$$= N_i N_e \cdot \frac{64\pi^2}{3\sqrt{6}\pi} \cdot \frac{Z^2 e^6}{m_e^2 c^3} \cdot \left(\frac{m_e}{k_B T_e} \right)^{1/2} \exp\left(-\frac{h\nu}{k_B T_e}\right) (1+f) - c\mu_\nu U_\nu$$

平衡时： $\frac{dU_\nu}{dt} = 0$

$$\mu_\nu = \frac{1}{cU_{p\nu}} N_i N_e \cdot \frac{64\pi^2}{3\sqrt{6}\pi} \cdot \frac{Z^2 e^6}{m_e^2 c^3} \cdot \left(\frac{m_e}{k_B T_e} \right)^{1/2} \exp\left(-\frac{h\nu}{k_B T_e}\right) \left(1 + \frac{c^3 U_{p\nu}}{8\pi h\nu^3}\right)$$

$$= N_i N_e \cdot \frac{4\sqrt{2}\pi}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{Z^2 e^6}{h\nu^3 m_e^2 c} \cdot \left(\frac{m_e}{k_B T_e} \right)^{1/2} = \frac{4\sqrt{2}\pi}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{e^6 h^2}{m_e \sqrt{m_e} c} \cdot Z^2 \rho^2 n_i n_e \cdot \left(\frac{1}{k_B T_e} \right)^{7/2} \cdot \frac{1}{x^3}$$

$x = h\nu / k_B T_e$

第四章：全电离等离子体中电子与光子的能量交换

$$\begin{aligned}\frac{dU_\nu}{dt} &= N_i N_e \cdot \frac{64\pi^2}{3\sqrt{6}\pi} \cdot \frac{Z^2 e^6}{m_e^2 c^3} \cdot \left(\frac{m_e}{k_B T_e} \right)^{1/2} \exp\left(-\frac{h\nu}{k_B T_e}\right) (1+f) - c\mu_\nu U_\nu \\ &= N_i N_e \cdot \frac{64\pi^2}{3\sqrt{6}\pi} \cdot \frac{Z^2 e^6}{m_e^2 c^3} \cdot \left(\frac{m_e}{k_B T_e} \right)^{1/2} e^{-x} \\ &\quad - U_\nu (1-e^{-x}) \cdot \frac{4\sqrt{2}\pi}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{e^6 h^2}{m_e \sqrt{m_e}} \cdot Z^2 \rho^2 n_i n_e \cdot \left(\frac{1}{k_B T_e} \right)^{7/2} \cdot \frac{1}{x^3} \\ &= J_\nu - cK_\nu (1-e^{-x}) U_\nu = J_\nu - cK'_\nu U_\nu \\ &= cK'_\nu (U_{p\nu} - U_\nu)\end{aligned}$$

第四章：全电离等离子体中电子与光子的能量交换

$$\begin{aligned} K_\nu &= \frac{4}{3} \cdot \frac{e^6 Z^2}{ch m_e \nu^3} \cdot \rho^2 n_i n_e \cdot \left(\frac{2\pi}{3m_e k_B T_e} \right)^{1/2} \\ &= \frac{4\sqrt{2\pi}}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{e^6 h^2}{cm_e \sqrt{m_e}} \cdot Z^2 \rho^2 n_i n_e \cdot \left(\frac{1}{k_B T_e} \right)^{7/2} \cdot \frac{1}{\chi^3} (cm^{-1}) \end{aligned}$$

有效吸收系数： $K'_\nu = K_\nu (1 - e^{-x})$

低频光子： $x \ll 1$ ，诱导辐射影响可以忽略。

高频光子： $x \gg 1$ ，诱导辐射影响明显。

第四章：全电离等离子体中电子与光子的能量交换

仅有韧致辐射和吸收过程的系统的光子能谱

$$U_{\nu} = U_{p\nu} (1 - e^{-cK'_{\nu}t})$$

$$K'_{\nu} \propto \frac{1}{\nu^3}$$

对于低频光子，趋于平衡分布的弛豫过程快；对于高频光子，趋于平衡分布的弛豫时间长。

第四章：全电离等离子体中电子与光子的能量交换

光子能量的增加来自于电子能量的减少，由于韧致辐射与韧致吸收过程电子的能量耗散，

$$\begin{aligned}\frac{dE_e}{dt} &= \frac{d}{dt}(\rho C_V T_e) = -\int_0^\infty \frac{dU_\nu}{dt} d\nu = \int_0^\infty cK'_\nu (U_\nu - U_{p\nu}) d\nu = -\int_0^\infty cK'_\nu U_{p\nu} e^{-cK'_\nu t} d\nu \\&= -\int_0^\infty cK'_\nu U_{p\nu} e^{-cK'_\nu t} d\nu = -\int_0^\infty J_\nu e^{-cK'_\nu t} d\nu = -N_i N_e \cdot \frac{64\pi^2}{3\sqrt{6}\pi} \cdot \frac{Z^2 e^6}{m_e^2 c^3} \cdot \left(\frac{m_e}{k_B T_e}\right)^{1/2} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{h\nu}{k_B T_e}\right) e^{-cK'_\nu t} d\nu \\&= -J \int_0^\infty e^{-x - \frac{x_0^4}{3x^3}(1-e^{-x})} dx \\x_0^4 &= \frac{4\sqrt{2}\pi}{\sqrt{3}} \cdot \frac{e^6 h^2}{m_e \sqrt{m_e}} \cdot Z^2 \rho^2 n_i n_e \cdot \left(\frac{1}{k_B T_e}\right)^{7/2} t\end{aligned}$$

第四章：全电离等离子体中电子与光子的能量交换

单位体积的光子能量

$$E_{\gamma} = \int_0^{\infty} U_{\nu} d\nu = \int_0^{\infty} U_{p\nu} (1 - e^{-cK_{\nu}t}) d\nu = aT_e^4 \left[1 - \frac{15}{\pi^4} \int_0^{\infty} \frac{x^3 e^{-x - \frac{x_0^4}{3x^3}} (1 - e^{-x})}{1 - e^{-x}} dx \right]$$

长时间情况下，系统达到平衡

$$E_{\gamma} = aT_e^4$$

上式右边积分中，主要贡献来自下 $x > 1$,

$$E_{\gamma} = aT_e^4 \left[1 - \frac{15}{\pi^4} \int x^3 e^{-x - \frac{x_0^4}{3x^3}} dx \right]$$

第四章：全电离等离子体中电子与光子的能量交换

康普顿散射与逆过程

“版权归朱少平研究员和中物院研究生院”
“薅享学术在线传播专用，未经许可，请勿转载”

第四章：全电离等离子体中电子与光子的能量交换

康普顿散射是光子与电子之间的碰撞，过程中发生动量和能量交换，但是粒子数不变。

物理直观上讲，光子与电子发生碰撞，光子能量高、电子能量低时，光子损失能量、电子获得能量，这称为**康普顿散射**；反之，光子能量低、电子能量高时，光子获得能量、电子损失能量，这称为**逆康普顿散射**；逆康普顿散射实际上是相对论电子的一种辐射机制。

第四章：全电离等离子体中电子与光子的能量交换

两个坐标系：实验室坐标系和电子静止坐标系，用符号 “ $\sim$ ” 标记在电子静止坐标系中的物理量。

散射前和散射后：用上标 “ $'$ ” 标记散射后的物理量。

第四章：全电离等离子体中电子与光子的能量交换

光子能量： $h\nu$ ，光子波数矢量： $\mathbf{k}$

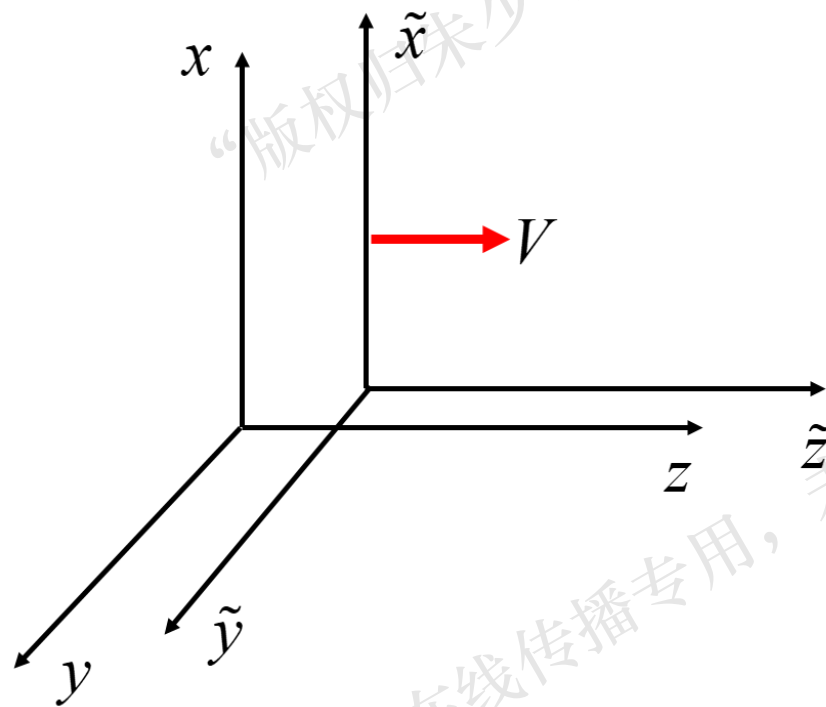
光子动量： $\mathbf{p} = h\mathbf{k} = h\nu\mathbf{\Omega} / c$ ， $\mathbf{\Omega}$ 为单位矢量，表征光子的传播方向

“版权归陈少平研究员和中物院研究生院所有”
“共享学术在线传播专用，未经许可，请勿转载”

第四章：全电离等离子体中电子与光子的能量交换

相对论变换：

考虑两个惯性标系 K 与 $\tilde{K}$



$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = 0$$

$$\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + \tilde{z}^2 - c^2 \tilde{t}^2 = 0$$

第四章：全电离等离子体中电子与光子的能量交换

$$\tilde{x} = x$$

$$\tilde{y} = y$$

$$\tilde{z} = \frac{z - Vt}{\gamma}, \gamma = \sqrt{1 - \beta^2}, \beta = V / c$$

$$\tilde{t} = \frac{t - \frac{V}{c^2} z}{\gamma}$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \\ ict \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\gamma} & \frac{i\beta}{\gamma} \\ 0 & 0 & -\frac{i\beta}{\gamma} & \frac{1}{\gamma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ ict \end{pmatrix}$$

第四章：全电离等离子体中电子与光子的能量交换

$$x = \tilde{x}$$

$$y = \tilde{y}$$

$$z = \frac{\tilde{z} + V\tilde{t}}{\gamma}$$

$$t = \frac{\tilde{t} + \frac{V}{c^2}\tilde{z}}{\gamma}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ ict \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\gamma} & -\frac{i\beta}{\gamma} \\ 0 & 0 & \frac{i\beta}{\gamma} & \frac{1}{\gamma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \\ ic\tilde{t} \end{pmatrix}$$

第四章：全电离等离子体中电子与光子的能量交换

$$dx = d\tilde{x}$$

$$dy = d\tilde{y}$$

$$dz = \frac{d\tilde{z} + Vd\tilde{t}}{\gamma}$$

$$dt = \frac{d\tilde{t} + \frac{V}{c^2} d\tilde{z}}{\gamma}$$

$$u_x = \frac{dx}{dt} = \gamma \frac{d\tilde{x}}{d\tilde{t} + \frac{V}{c^2} d\tilde{z}} = \gamma \frac{\tilde{u}_x}{1 + \frac{V}{c^2} \tilde{u}_z}$$

$$u_y = \frac{dy}{dt} = \gamma \frac{d\tilde{y}}{d\tilde{t} + \frac{V}{c^2} d\tilde{z}} = \gamma \frac{\tilde{u}_y}{1 + \frac{V}{c^2} \tilde{u}_z}$$

$$u_z = \frac{dz}{dt} = \frac{d\tilde{z} + Vd\tilde{t}}{d\tilde{t} + \frac{V}{c^2} d\tilde{z}} = \frac{\tilde{u}_z + V}{1 + \frac{V}{c^2} \tilde{u}_z}$$

第四章：全电离等离子体中电子与光子的能量交换

对于电磁波 $E \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)$

$\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t$ 是相对论不变量

$(\mathbf{x}, ict)$ 是四维矢量

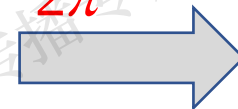


$\left(\mathbf{k}, i\frac{\omega}{c}\right)$ 也是四维矢量



$\left(\frac{\mathbf{k}}{2\pi}, i\frac{\nu}{c}\right)$ 也是四维矢量

$\frac{\mathbf{k}}{2\pi} \rightarrow \mathbf{k}$



$\left(\mathbf{k}, i\frac{\nu}{c}\right)$ 也是四维矢量

第四章：全电离等离子体中电子与光子的能量交换

$$\begin{pmatrix} \tilde{k}_x \\ \tilde{k}_y \\ \tilde{k}_z \\ i\frac{\tilde{v}}{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\gamma} & \frac{i\beta}{\gamma} \\ 0 & 0 & -\frac{i\beta}{\gamma} & \frac{1}{\gamma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \\ i\frac{v}{c} \end{pmatrix}$$

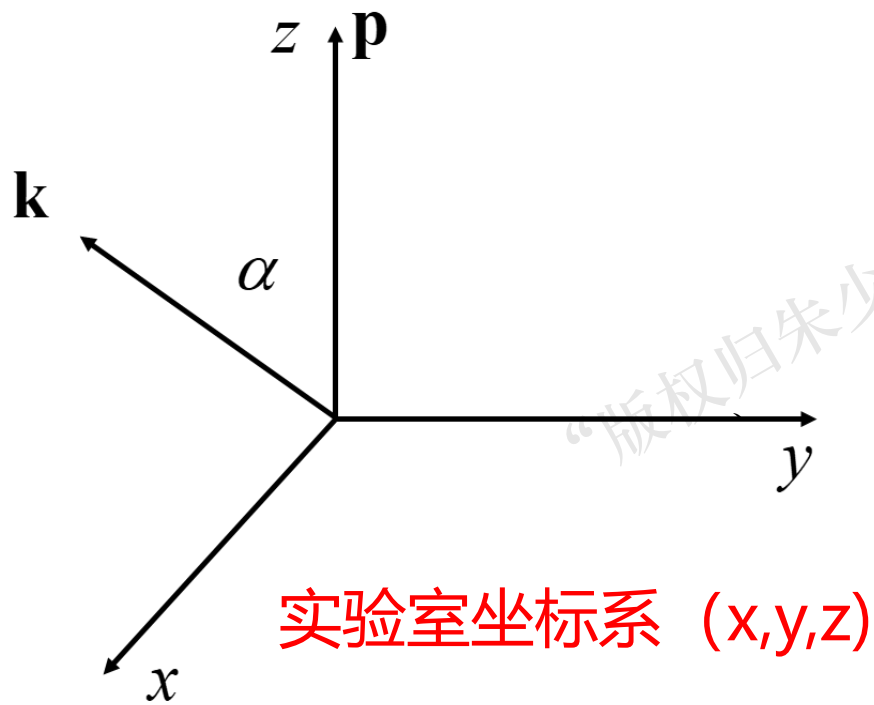
$$\tilde{k}_x = k_x$$

$$\tilde{k}_y = k_y$$

$$\tilde{k}_z = \frac{k_z - \beta k}{\gamma}$$

$$\tilde{k} = \frac{k - \beta k_z}{\gamma}$$

第四章：全电离等离子体中电子与光子的能量交换



在实验室坐标系中，散射前电子动量为 $\mathbf{p}$

速度为 $\mathbf{V} = \mathbf{p}\gamma / m_e$, $\gamma = \sqrt{1 - \beta^2}$, $\beta = \frac{V}{c}$

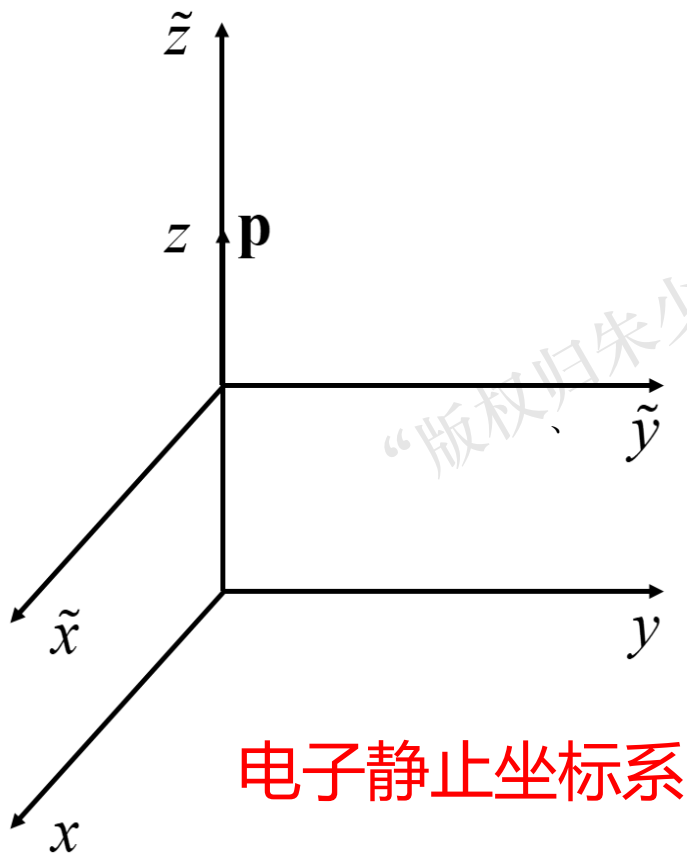
光子动量 $h\mathbf{k} = h\nu\boldsymbol{\Omega} / c$

构建实验室坐标系 (x,y,z) , $\mathbf{p}$ 沿坐标系的 Z 轴方向, $(\mathbf{p}, \mathbf{k})$ 处于 (x,z) 平面。光子运动方向与 Z 轴的夹角为 α 。

散射前光子的动量-能量四维矢量为 $(h\mathbf{k}, h\nu) = (hk \sin \alpha, 0, hk \cos \alpha, h\nu)$

散射后光子的动量-能量四维矢量为 $(h\mathbf{k}', h\nu') = (hk' \sin \alpha' \cos \varphi', hk' \sin \alpha' \sin \varphi', hk' \cos \alpha', h\nu')$

第四章：全电离等离子体中电子与光子的能量交换



在实验室坐标系中，散射前电子动量以速度 v 沿着 z 轴方向运动。

构建电子静止坐标系 $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$
坐标系以速度 v 沿着实验室坐标系的 Z 轴运动。

散射前光子的动量-能量四维矢量为 $(h\tilde{\mathbf{k}}, h\tilde{\nu}) = (h\tilde{k} \sin \tilde{\alpha}, 0, h\tilde{k} \cos \tilde{\alpha}, h\tilde{\nu})$

散射后光子的动量-能量四维矢量为 $(h\tilde{\mathbf{k}}', h\tilde{\nu}') = (h\tilde{k}' \sin \tilde{\alpha}' \cos \tilde{\varphi}', h\tilde{k}' \sin \tilde{\alpha}' \sin \tilde{\varphi}', h\tilde{k}' \cos \tilde{\alpha}', h\tilde{\nu}')$

第四章：全电离等离子体中电子与光子的能量交换

从实验室至电子静止坐标系，得电子静止坐标系下康普顿散射前光子的四维动量-能量（取光速 $c=1$ ）

$$\begin{pmatrix} \tilde{k}_x \\ \tilde{k}_y \\ \tilde{k}_z \\ i\tilde{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\gamma} & \frac{i\beta}{\gamma} \\ 0 & 0 & -\frac{i\beta}{\gamma} & \frac{1}{\gamma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \\ ik \end{pmatrix}$$
$$\begin{aligned} \tilde{k}_x &= \tilde{k} \sin \tilde{\alpha} = k_x = k \sin \alpha, \\ \tilde{k}_y &= k_y = 0, \\ \tilde{k}_z &= \tilde{k} \cos \tilde{\alpha} = \frac{k_z - k\beta}{\gamma} = \frac{k}{\gamma} (\cos \alpha - \beta) \\ \tilde{k} &= \frac{k - k_z\beta}{\gamma} = \frac{k}{\gamma} (1 - \beta \cos \alpha), \quad \tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\gamma} (1 - \beta \cos \alpha) \end{aligned}$$

第四章：全电离等离子体中电子与光子的能量交换

电子静止坐标系下，散射前光子运动方向与 $\tilde{z}$ 轴的夹角 $\tilde{\alpha}$ 满足：

$$\tilde{k}_x = \tilde{k} \sin \tilde{\alpha} = k_x = k \sin \alpha,$$

$$\tilde{k}_y = k_y = 0,$$

$$\tilde{k}_z = \tilde{k} \cos \tilde{\alpha} = \frac{k_z - k\beta}{\gamma} = \frac{k}{\gamma} (\cos \alpha - \beta)$$

$$\tilde{k} = \frac{k - k_z \beta}{\gamma} = \frac{k}{\gamma} (1 - \beta \cos \alpha), \quad \tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\gamma} (1 - \beta \cos \alpha)$$

$$\cos \tilde{\alpha} = \frac{\tilde{k}_z}{\tilde{k}} = \frac{\cos \alpha - \beta}{1 - \beta \cos \alpha},$$

$$\sin \tilde{\alpha} = \frac{\tilde{k}_x}{\tilde{k}} = \frac{\gamma \sin \alpha}{1 - \beta \cos \alpha},$$

$$\operatorname{tg} \tilde{\alpha} = \frac{\gamma \sin \alpha}{\cos \alpha - \beta}$$

第四章：全电离等离子体中电子与光子的能量交换

实验室坐标系下，散射前光子运动方向与 Z 轴的夹角 α 满足：

$$k_x = k \sin \alpha = \tilde{k}_x = \tilde{k} \sin \tilde{\alpha},$$

$$k_y = \tilde{k}_y = 0,$$

$$k_z = k \cos \alpha = \frac{\tilde{k}_z + \tilde{k}V/c}{\gamma} = \frac{\tilde{k}}{\gamma} (\cos \tilde{\alpha} + \beta)$$

$$k = \frac{\tilde{k} + \tilde{k}_z V/c}{\gamma} = \frac{\tilde{k}}{\gamma} (1 + \beta \cos \tilde{\alpha}), \quad \varepsilon = \frac{\tilde{\varepsilon}}{\gamma} (1 + \beta \cos \tilde{\alpha})$$

$$\cos \alpha = \frac{k_z}{k} = \frac{\cos \tilde{\alpha} + \beta}{1 + \beta \cos \tilde{\alpha}},$$

$$\sin \alpha = \frac{k_x}{k} = \frac{\gamma \sin \tilde{\alpha}}{1 + \beta \cos \tilde{\alpha}},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\gamma \sin \tilde{\alpha}}{\cos \tilde{\alpha} + \beta}$$

第四章：全电离等离子体中电子与光子的能量交换

电子静止坐标系中散射后的光子能量和动量

散射前：电子的动量-能量 $(\tilde{\mathbf{0}}, \tilde{E})$ ，光子的动量-能量 $(h\tilde{\mathbf{k}}, \tilde{\varepsilon} = h\tilde{\nu})$

散射后：电子的动量-能量 $(\tilde{\mathbf{p}}', \tilde{E}')$ ，光子的动量-能量 $(h\tilde{\mathbf{k}}', \tilde{\varepsilon}' = h\tilde{\nu}')$

动量守恒
$$h\tilde{\mathbf{k}} = h\tilde{\mathbf{k}}' + \tilde{\mathbf{p}}', \quad \tilde{\mathbf{p}}'^2 = h^2 (\tilde{\mathbf{k}} - \tilde{\mathbf{k}}')^2 = h^2 (\tilde{\mathbf{k}}^2 + \tilde{\mathbf{k}}'^2 - 2\tilde{\mathbf{k}} \cdot \tilde{\mathbf{k}}')$$

能量守恒
$$h\tilde{\nu} + m_e c^2 = h\tilde{\nu}' + \sqrt{\tilde{\mathbf{p}}'^2 c^2 + m_e^2 c^4}, \quad \tilde{\mathbf{p}}'^2 c^2 + m_e^2 c^4 = (h c \tilde{k} - h c \tilde{k}' + m_e c^2)^2$$

$$\tilde{\mathbf{p}}'^2 = h^2 (\tilde{\mathbf{k}} - \tilde{\mathbf{k}}')^2 = h^2 \tilde{k}^2 + h^2 \tilde{k}'^2 - 2h^2 \tilde{k} \tilde{k}' \cos \tilde{\theta}$$

第四章：全电离等离子体中电子与光子的能量交换

电子静止坐标系中散射后的光子能量和动量

$$c^2 h^2 (\tilde{k}^2 + \tilde{k}'^2 - 2\tilde{k}\tilde{k}' \cos \tilde{\theta}) + m_e^2 c^4 = (hc\tilde{k} - hc\tilde{k}' + m_e c^2)^2$$

$$c^2 h^2 (\tilde{k}^2 + \tilde{k}'^2 - 2\tilde{k}\tilde{k}' \cos \tilde{\theta}) = (hc\tilde{k} - hc\tilde{k}')^2 + 2m_e c^2 (hc\tilde{k} - hc\tilde{k}')$$

$$-2h^2 c^2 \tilde{k}\tilde{k}' \cos \tilde{\theta} = -2h^2 c^2 \tilde{k}\tilde{k}' + 2m_e c^2 hc (\tilde{k} - \tilde{k}')$$

$$\tilde{k}' = \frac{m_e c}{m_e c + h\tilde{k}(1 - \cos \tilde{\theta})} \tilde{k}, \quad \tilde{\varepsilon}' = \frac{\tilde{\varepsilon}}{1 + \frac{\tilde{\varepsilon}}{m_e c^2} (1 - \cos \tilde{\theta})}$$

第四章：全电离等离子体中电子与光子的能量交换

散射前后的能量变化为

$$\tilde{k} - \tilde{k}' = \frac{h\tilde{k}\tilde{k}'(1 - \cos\tilde{\theta})}{m_e c} = \frac{h\tilde{k}^2(1 - \cos\tilde{\theta})}{m_e c + h\tilde{k}(1 - \cos\tilde{\theta})}$$

$$\tilde{\varepsilon} - \tilde{\varepsilon}' = \frac{\tilde{\varepsilon}\tilde{\varepsilon}'(1 - \cos\tilde{\theta})}{m_e c^2} = \frac{\tilde{\varepsilon}^2(1 - \cos\tilde{\theta})}{m_e c^2 + \tilde{\varepsilon}(1 - \cos\tilde{\theta})}$$

$$\cos\tilde{\theta} = \frac{\tilde{\mathbf{k}} \cdot \tilde{\mathbf{k}}'}{\tilde{k}\tilde{k}'} = \sin\tilde{\alpha}\sin\tilde{\alpha}'\cos\tilde{\varphi}' + \cos\tilde{\alpha}\cos\tilde{\alpha}'$$

如果光子能量很低

$$\frac{\tilde{\varepsilon}}{m_e c^2} \ll 1$$

$$\tilde{\varepsilon}' = \tilde{\varepsilon} \quad \text{汤姆孙散射过程}$$

第四章：全电离等离子体中电子与光子的能量交换

非相对论情况下

$$\frac{\tilde{\Delta}}{\tilde{\varepsilon}} = \frac{\tilde{\varepsilon}' - \tilde{\varepsilon}}{\tilde{\varepsilon}} = -\frac{\tilde{\varepsilon}(1 - \cos \tilde{\theta})}{m_e c^2} \left[1 - \frac{\tilde{\varepsilon}(1 - \cos \tilde{\theta})}{m_e c^2} \right]$$

对角度求平均

$$\frac{\tilde{\Delta}}{\tilde{\varepsilon}} = \frac{\tilde{\varepsilon}' - \tilde{\varepsilon}}{\tilde{\varepsilon}} = -\frac{\tilde{\varepsilon}}{m_e c^2}$$

第四章：全电离等离子体中电子与光子的能量交换

实验室坐标系中散射后的光子能量和动量

$$\begin{pmatrix} k'_x \\ k'_y \\ k'_z \\ ik' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\gamma} & -\frac{i\beta}{\gamma} \\ 0 & 0 & \frac{i\beta}{\gamma} & \frac{1}{\gamma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{k}'_x \\ \tilde{k}'_y \\ \tilde{k}'_z \\ i\tilde{k}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\gamma} & -\frac{i\beta}{\gamma} \\ 0 & 0 & \frac{i\beta}{\gamma} & \frac{1}{\gamma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{k}'_x \\ \tilde{k}'_y \\ \tilde{k}' \cos \tilde{\alpha}' \\ i\tilde{k}' \end{pmatrix}$$

第四章：全电离等离子体中电子与光子的能量交换

$$\begin{aligned} k' &= \frac{\tilde{k}' + \tilde{k}'_z V / c}{\gamma} = \frac{\tilde{k}'}{\gamma} (1 + \beta \cos \tilde{\alpha}') = \frac{1}{\gamma} \frac{m_e c (1 + \beta \cos \tilde{\alpha}')}{m_e c + h \tilde{k} (1 - \cos \tilde{\theta})} \tilde{k} \\ &= \frac{m_e c k (1 + \beta \cos \tilde{\alpha}') (1 - \beta \cos \alpha)}{\gamma \left[\gamma m_e c + h k (1 - \beta \cos \alpha) (1 - \cos \tilde{\theta}) \right]} \\ \varepsilon' &= \frac{1}{\gamma} \frac{\tilde{\varepsilon} (1 + \beta \cos \tilde{\alpha}')}{1 + \frac{\tilde{\varepsilon}}{m_e c^2} (1 - \cos \tilde{\theta})} = \frac{\varepsilon (1 - \beta \cos \alpha) (1 + \beta \cos \tilde{\alpha}')}{\gamma^2 \left[1 + \frac{\varepsilon}{\gamma m_e c^2} (1 - \beta \cos \alpha) (1 - \cos \tilde{\theta}) \right]} \end{aligned}$$

如果电子是静止的

$$\beta = 0, \gamma = 1 \quad \varepsilon' = \frac{\varepsilon}{1 + \frac{\varepsilon}{m_e c^2} (1 - \cos \tilde{\theta})}$$

第四章：全电离等离子体中电子与光子的能量交换

非相对论情况下

$$\varepsilon' = \varepsilon \left(1 - \beta \cos \alpha + \beta \cos \tilde{\alpha}' + \beta^2 \cos \alpha \cos \tilde{\alpha}' \right) \left[1 + \beta^2 - \frac{\varepsilon}{m_e c^2} \right]$$

对角度求平均

$$\frac{\Delta}{\varepsilon} = \frac{\varepsilon' - \varepsilon}{\varepsilon} = \beta^2 \left(1 + \langle \cos \alpha \cos \tilde{\alpha}' \rangle \right) - \frac{\varepsilon}{m_e c^2}$$

从物理上分析，上式右边第一项应该正比于 $\frac{k_B T_e}{m_e c^2}$ ，假定

$$\frac{\Delta}{\varepsilon} = \frac{\varepsilon' - \varepsilon}{\varepsilon} = \frac{a k_B T_e}{m_e c^2} - \frac{\varepsilon}{m_e c^2}$$

第四章：全电离等离子体中电子与光子的能量交换

忽略诱导散射过程，平衡光子分布函数为

$$f \sim e^{-\frac{h\nu}{k_B T_e}}$$

光子平均能量为

光子能量平方的平均为

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{\int_0^\infty h\nu e^{-\frac{h\nu}{k_B T_e}} \nu^3 d\nu}{\int_0^\infty e^{-\frac{h\nu}{k_B T_e}} \nu^2 d\nu} = 3k_B T_e$$

$$\langle \varepsilon^2 \rangle = \frac{\int_0^\infty h^2 \nu^2 e^{-\frac{h\nu}{k_B T_e}} \nu^4 d\nu}{\int_0^\infty e^{-\frac{h\nu}{k_B T_e}} \nu^2 d\nu} = 12(k_B T_e)^2$$

系统处于平衡状态时，
没有能量从光子转移
至电子

$$\langle \Delta \rangle = \frac{ak_B T_e}{m_e c^2} \langle \varepsilon \rangle - \frac{\langle \varepsilon^2 \rangle}{m_e c^2} = \frac{3(k_B T_e)^2}{m_e c^2} (a - 4) = 0$$

第四章：全电离等离子体中电子与光子的能量交换

光子能量**大于4倍电子温度**时，康普顿散射导致能量从光子转移至电子；反之从电子转移至光子。

“翫享学术在线传播专用，未经许可，请勿转载！”

第四章：全电离等离子体中电子与光子的能量交换

如果电子速度接近光速

$$\beta \approx 1 \quad \gamma \approx 0 \quad \text{同时} \quad \frac{\varepsilon}{\gamma m_e c^2} \ll 1$$

$$\beta = 0.99 \quad \gamma \approx 0.02 \quad \varepsilon \ll 10 \text{keV} \quad \frac{\varepsilon}{\gamma m_e c^2} = \frac{10}{0.02 \times 511} = 1$$

$$\varepsilon' = \frac{\varepsilon (1 - \cos \alpha) (1 + \cos \tilde{\alpha}')}{\gamma^2}$$

光子能量获得了极大的提高，这就是所谓的逆康普顿散射。随着激光技术的发展，利用超强激光加速电子至相对论速度，再利用电子与光子逆康普顿碰撞获得高能光子，是目前的一项重要研究。