

# 高等量子力学（第七章）

## 测量的量子理论与量子力学诠释

孙昌璞

中物院研究生院/北京计算科学研究中心



# 内容

- 一、量子测量的唯像描述
- 二、冯·诺意曼量子测量模型
- 三、斯特恩-盖拉赫实验
- 四、量子退相干与薛定谔猫
- 五、环境辅助的量子测量
- 六、量子力学多世界诠释

---

# 一、量子测量的唯像描述

“版权归孙昌璞和中物院研究生院所有”

“寇享学术在线传播专用，未经许可，请勿转载！”

# 测量过程的量子理论

量子系统的测量过程被人为地分割为两部分：  
相互作用导致的么正演化过程和单次测量取得结果的波包塌缩过程。  
后者要求要有量子力学不能描述的经典系统（仪器和观察者）的参与

量子测量问题研究必须回答以下的问题：

1. 什么是量子测量？
2. 如何描述量子测量？
3. 测量后的效果是什么？

# 量子测量的唯象描述

哥本哈根学派推广了波恩关于测量结果的几率解释，补充了“测量后系统状态是什么”的假设——波包塌缩假设

对处于叠加态

$$|\psi\rangle = \sum C_n |n\rangle$$

上的量子系统，测量力学量 $A$ ，其中 $|n\rangle$ 是 $A$ 对应于本征值 $a_n$ 的本征函数。一旦在一次测量中得到确定性的结果 $a_n$ ，则系统波函数变为 $|n\rangle$ ，即

$$|\psi\rangle = \sum C_n |n\rangle \rightarrow |n\rangle$$

# 量子测量的唯象二元论描述

投影假说 (projection) / 波函数约化 (reduction)  
非么正过程, 不能由量子力学的薛定谔方程描述.



冯·诺依曼, 1929

- 量子力学中的演化: 么正 (U过程)
- 投影测量  $|\psi\rangle \rightarrow |n\rangle$ : 非么正 (R过程)

玻尔“量子力学中仪器必须是经典的”

冯诺依曼表述避免玻尔风格表述的歧义

# 波包塌缩的单粒子图象

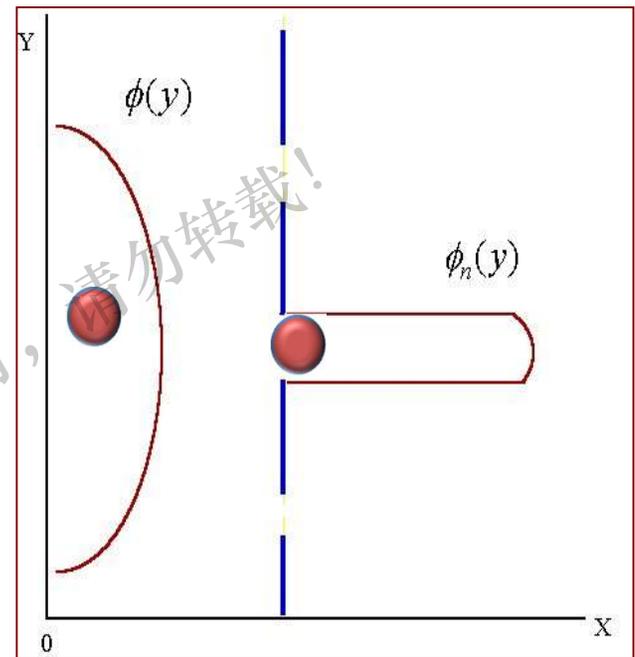
例子：测量波包

$$\phi(y) = \langle y|\psi\rangle$$

的位置，测量后波包变窄为

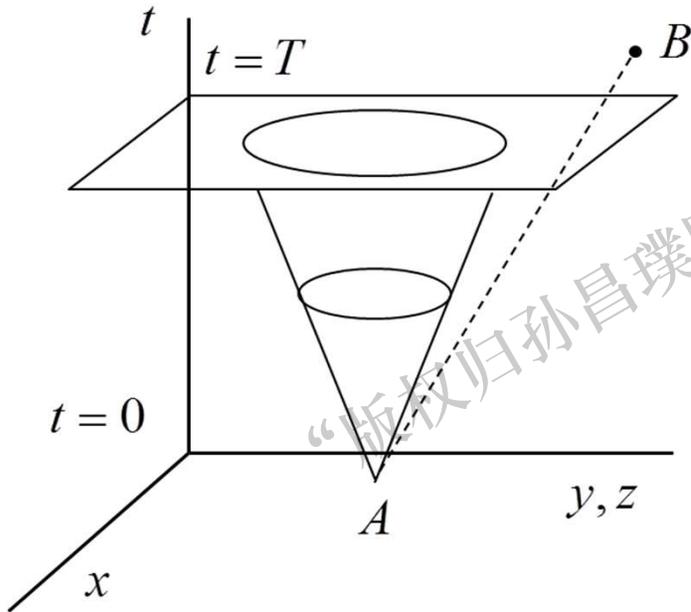
$$\phi_n(y) = \begin{cases} N_n \phi(y), & na \leq y < (n+1)a \\ 0, & na \geq y \text{ or } y \geq (n+1)a \end{cases}$$

$$N_n^{-1} = \sqrt{\int_{na}^{(n+1)a} |\psi(y)|^2 dy}$$



# 波包塌缩与狭义相对论有表观矛盾

“非定域性违背狭义相对论” 暗含了投影假设



$$\phi(0) = \delta(x) \approx \sum_p \exp(ipx)$$

上测量动量，波函数“塌缩”到

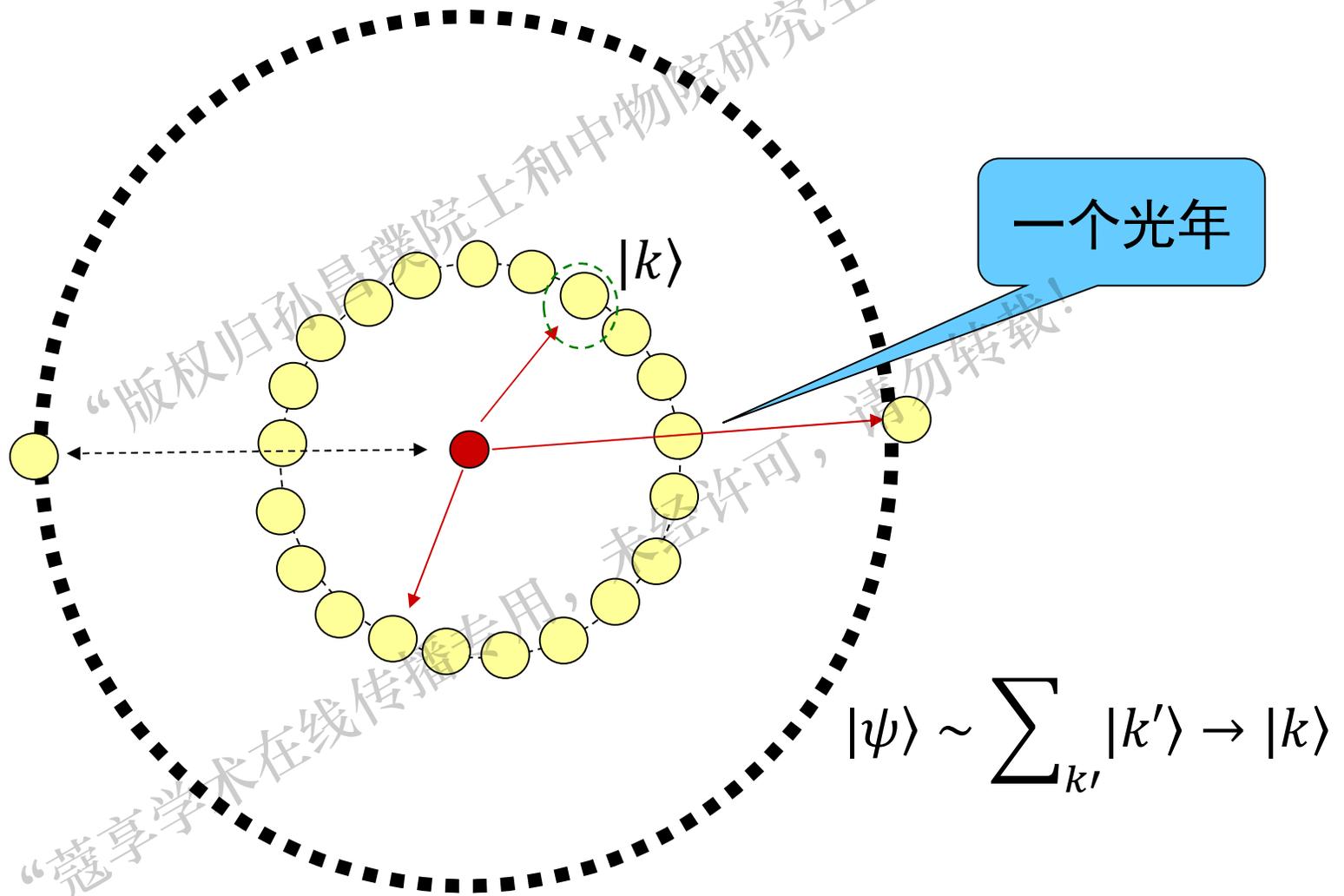
$$\phi(t) = \exp(ipx)$$

上使得类空关联出现

$$G^{(1)}(A, B) = \rho(A, B) = \langle \psi^+(A) \psi(B) \rangle \neq 0, \quad |A - B| > ct$$

事实上，“Bell不等式违背”意味着非定域性存在，  
但没有超光速！

# 波包塌缩：爱因斯坦“光子球”



# 量子测量的唯象描述

投影假说 (projection) / 波函数约化 (reduction)

$$|\psi\rangle = \sum C_n |n\rangle \rightarrow |n\rangle$$

这个假说的出发点，是要保证第一次测量后的后续测量给出相同结果。

根据波恩几率解释，在塌缩的状态  $|n\rangle$  上进行  $A$  的第二次测量，得到确定性结果  $a_n$ 。

需要提醒的是，这种可重复性的定义依赖“什么是测量”和“测量后结果是什么”的假设

# 海森堡：量子测量的唯象描述

测量在系统的叠加态的每一个分支引入随机位相 $\theta_n$

$$|\psi\rangle = \sum C_n |n\rangle \longrightarrow |\psi_f\rangle = \sum C_n e^{i\theta_n} |n\rangle$$

相对位相因子也是随机的

$$e^{i(\theta_n - \theta_m)} \equiv e^{i\Delta_{nm}}$$

$$\langle e^{i\theta_n} \rangle = 0, \quad \langle e^{i\Delta_{mn}} \rangle = 0$$

位相因子的平均为零

# 海森堡：量子测量的唯象描述

$$|\psi\rangle = \sum C_n |n\rangle \longrightarrow |\psi_f\rangle = \sum C_n e^{i\theta_n} |n\rangle$$

平均后的系统的密度矩阵

$$\begin{aligned}\bar{\rho}_f &\equiv \langle \rho_f \rangle = \langle |\psi_f\rangle \langle \psi_f| \rangle \\ &= \sum |C_n|^2 |n\rangle \langle n| + \sum_{m,n} C_m^* C_n |n\rangle \langle m| \langle e^{i\Delta_{mn}} \rangle \\ &= \sum |C_n|^2 |n\rangle \langle n|\end{aligned}$$

测量时的系统完成从相干的状态 到经典的转变

$$\begin{aligned}\rho(0) &= \sum_n |C_n|^2 |n\rangle \langle n| + \sum_{m \neq n} C_m^* C_n |n\rangle \langle m| \\ \Rightarrow \bar{\rho}_f &= \sum_n |C_n|^2 |n\rangle \langle n|\end{aligned}$$

# 量子测量的唯象描述

非对角消逝过程叫量子退相干（Quantum decoherence），它使得波函数描述的“量子概率”变成了经典概率。

波恩几率第二描述——“观测结果是期望值”  
则有第二次测量时的期望值

$$\bar{A}_f = \text{tr}(A\rho_f) = \sum_n |C_n|^2 \langle n|A|n\rangle$$

与开始测量期望值一样

$$\bar{A}(0) = \text{tr}(A(0)\rho(0)) = \sum_n |C_n|^2 \langle n|A|n\rangle$$

海森堡的假设与波包塌缩假设都能满足可重复性的要求；  
可重复性要求并不能排除波包塌缩以外的其它假设

# 量子退相干随机位相描述

$$|\psi\rangle = \alpha|\psi_1\rangle + \beta|\psi_2\rangle \xrightarrow{\theta_1 - \theta_2 = \theta} |\psi\rangle = \alpha e^{i\theta_1} |\psi_1\rangle + \beta e^{i\theta_2} |\psi_2\rangle$$

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi| \rightarrow \rho' = |\psi'\rangle\langle\psi'|$$

$$\rho' = |\alpha|^2 |\psi_1\rangle\langle\psi_1| + |\beta|^2 |\psi_2\rangle\langle\psi_2| + \beta^* \alpha |\psi_1\rangle\langle\psi_2| e^{-i\theta} + \text{h. c.}$$

对A求平均:

$$\bar{A}' = \text{tr}(\rho' A)$$

$$= |\alpha|^2 \langle\psi_1|A|\psi_1\rangle + |\beta|^2 \langle\psi_2|A|\psi_2\rangle + \beta^* \alpha e^{i\theta} \langle\psi_2|A|\psi_1\rangle + \text{c. c.}$$

在纯态上, A非对角元对期望值有贡献

平均值  $\bar{A}$  包含A的非对角元

# 混合态的密度矩阵计算期望值

真正的期望值还应当包含对 $\bar{A}'$ 中随机变量进一步求平均

$$\begin{aligned}\langle \bar{A}' \rangle &= |\alpha|^2 \langle \psi_1 | A | \psi_1 \rangle + |\beta|^2 \langle \psi_2 | A | \psi_2 \rangle + \beta^* \alpha \langle \psi_2 | A | \psi_1 \rangle \langle e^{i\theta} \rangle + \text{c. c.} \\ &= |\alpha|^2 \langle \psi_1 | A | \psi_1 \rangle + |\beta|^2 \langle \psi_2 | A | \psi_2 \rangle\end{aligned}$$

对密度矩阵直接平均

$$\bar{\rho}' = \langle \rho' \rangle = |\alpha|^2 |\psi_1\rangle \langle \psi_1| + |\beta|^2 |\psi_2\rangle \langle \psi_2|$$

然后计算 $A$ 的平均值

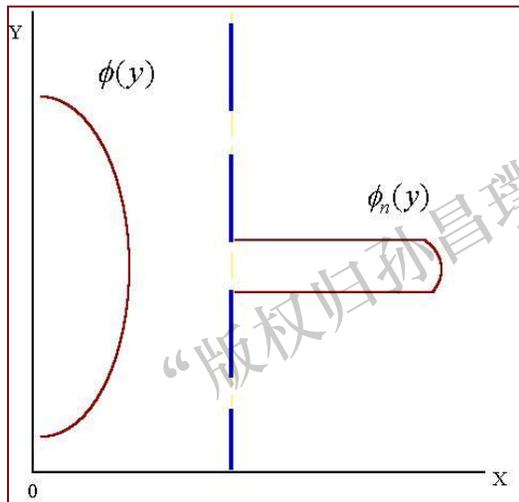
$$\text{tr}(\bar{\rho}' A) = |\alpha|^2 \langle \psi_1 | A | \psi_1 \rangle + |\beta|^2 \langle \psi_2 | A | \psi_2 \rangle$$

上述密度矩阵非对角元消逝的现象称为量子退相干，它是今天研究的量子计算物理实现的主要障碍

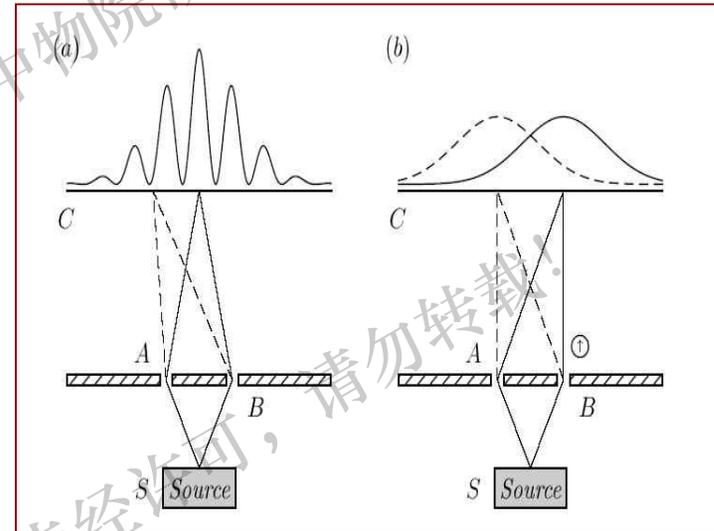


# 实验无法区分波包塌缩还是退相干

“波”到“粒子”的跃变



中子的双缝干涉



$$|\psi\rangle = \sum_n c_n |n\rangle \rightarrow |n\rangle \quad |\psi\rangle\langle\psi| \rightarrow \sum_n |c_n|^2 |n\rangle\langle n|$$

波包塌缩和退相干均导致相同重复测量结果

# 波包塌缩导致重复测量结果相同

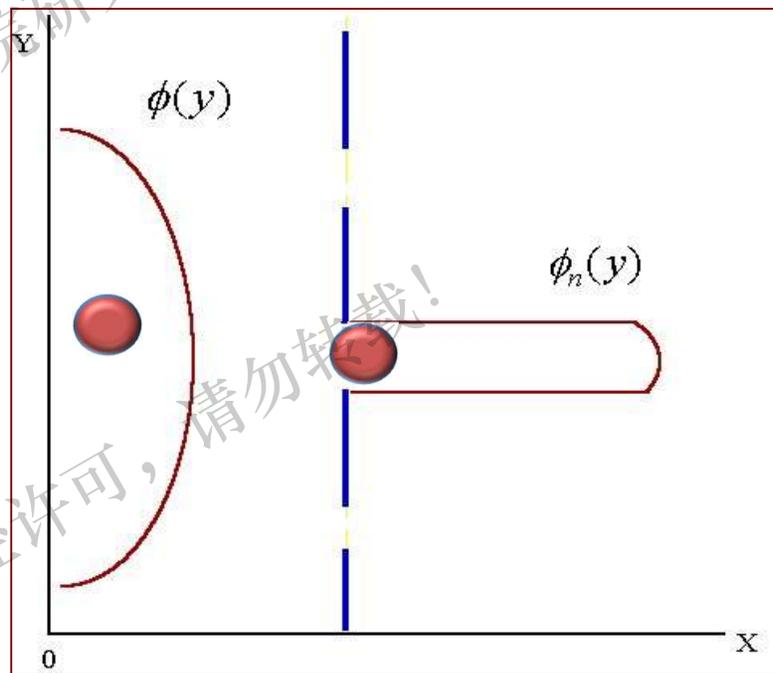
## 波包塌缩 (WPC)

第一次测量:

$$|\psi\rangle = \sum C_n |n\rangle \rightarrow |n\rangle, A|n\rangle = a_n |n\rangle$$

第二次重复测A也得到相同结果

$$A|n\rangle = a_n |n\rangle$$



# 退相干导致重复测量结果相同

退相干 (Decoherence)

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi| \rightarrow \rho_d = \sum_m |c_m|^2 |m\rangle\langle m|$$

第一次测量：

$$\bar{A} = \text{tr}(\rho A) = \sum_m \langle m | \rho A | m \rangle = \sum_m a_m |c_m|^2$$

第二次重复测A也得到相同结果

$$\bar{A}' = \text{tr}(\rho_d A) = \text{tr} \left( \sum_m |c_m|^2 |m\rangle\langle m| A \right) = \sum_m a_m |c_m|^2$$

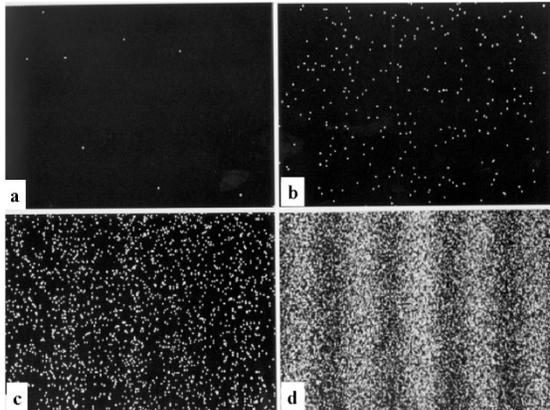
# 系综诠释或几率诠释？

爱因斯坦的“第一观点”：“预言的是事件出现的频率”

“函数无论如何也不能描述单个粒子的状态，它涉及了多个系统，从统计力学角度就是系综”

《爱因斯坦文集》第一集

“玻恩假说”：“预言的是单个体系测量结果的几率”



玻恩观点的演变：

“量子描述...并不回答...某个粒子在特定时刻的位置...回答的只是提出的统计问题” “分歧不是实质性的，只是语言上的”

电子衍射实验涉及到稳定的系统：时间平均=系综平均  
因而不能区分二者

# 量子相干的密度矩阵描述

密度矩阵

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi| = \sum_n c_m^* c_n |n\rangle\langle m|$$

密度矩阵非对角项 = 量子相干性

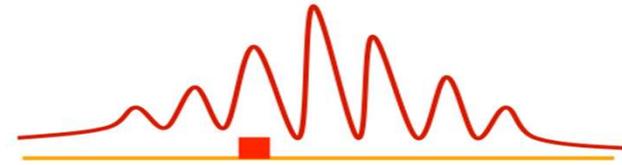
$$\langle x|\psi\rangle = \sum_n c_n \phi_n(x) = c_1 \phi_1(x) + c_2 \phi_2(x)$$

$$\rho(x, x) = |c_1|^2 |\phi_1(x)|^2 + |c_2|^2 |\phi_2(x)|^2 + c_1^* c_2 \phi_1^*(x) \phi_2(x) + \text{c. c.}$$

强度叠加



干涉条纹:



# 量子退相干(Decoherence)

量子几率到经典几率的转换

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi| = \sum_n c_m^* c_n |n\rangle\langle m| \rightarrow \rho_M = \sum_n |c_n|^2 |n\rangle\langle n|$$

$$\langle x|\psi\rangle = \sum_n c_n \phi_n(x) = c_1 \phi_1(x) + c_2 \phi_2(x)$$

实空间描述：测量导致密度矩阵非对角项消失

$$\rho(x, x) \Rightarrow \rho_M(x, x) = |c_1|^2 |\phi_1(x)|^2 + |c_2|^2 |\phi_2(x)|^2$$

干涉条纹消失

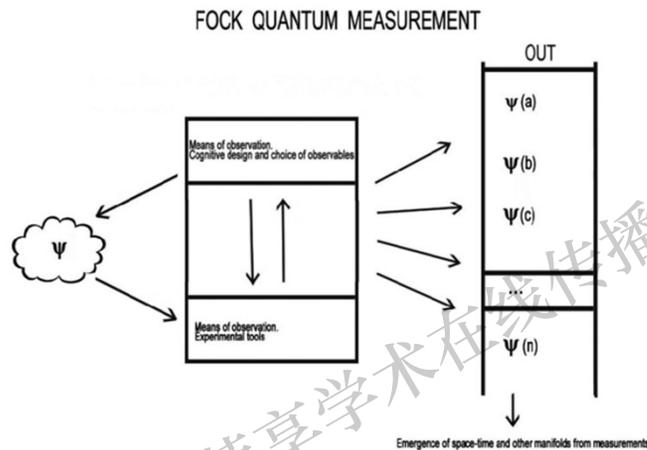


# 冯·诺意曼量子测量模型

冯·诺意曼把测量考虑为系统和仪器相互作用的结果

- 被测系统 $S$ 和测量仪器 $D$ 构成封闭系统，服从量子么正演化定律
- 对 $S$ 中的力学量 $A$ 测量，要求 $A$ 是 $S$ （哈密顿量 $H_S$ ）的守恒量，即 $[H_S, A] = 0$
- 仪器 $D$ （哈密顿量 $H_d$ ）与 $S$ 的相互作用 $V$ 不影响系统的演化，即

$$[H_S, V] = 0$$



总体哈密顿量

$$H = H_S + H_d + V$$

# 冯·诺意曼量子测量模型

$H_S$ 和 $A$ 的共同波函数记为 $|n\rangle$ ，即

$$A|n\rangle = a_n|n\rangle$$

$$H_S|n\rangle = E_n|n\rangle$$

与相互作用的对易性要求进一步给出

$$V|n\rangle = V_n(D)|n\rangle$$

其中 $V_n = V_n(D)$ 代表了对仪器 $D$ 的状态分支指标的依赖。

# 冯·诺意曼量子测量模型

总体系开始时处于预测量初态

$$|\psi(0)\rangle = \left( \sum c_n |n\rangle \right) \otimes |D\rangle$$

$|D\rangle$ 是仪器初始化状态，测量过程中

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= e^{-i(H_S+H_d+V)t} \sum c_n |n\rangle \otimes |D\rangle \\ &= \sum e^{-iE_n t} c_n |n\rangle \otimes e^{-i(H_d+V_n(D))t} |D\rangle \\ &\equiv \sum c_n |n(t)\rangle \otimes |D_n(t)\rangle \end{aligned}$$

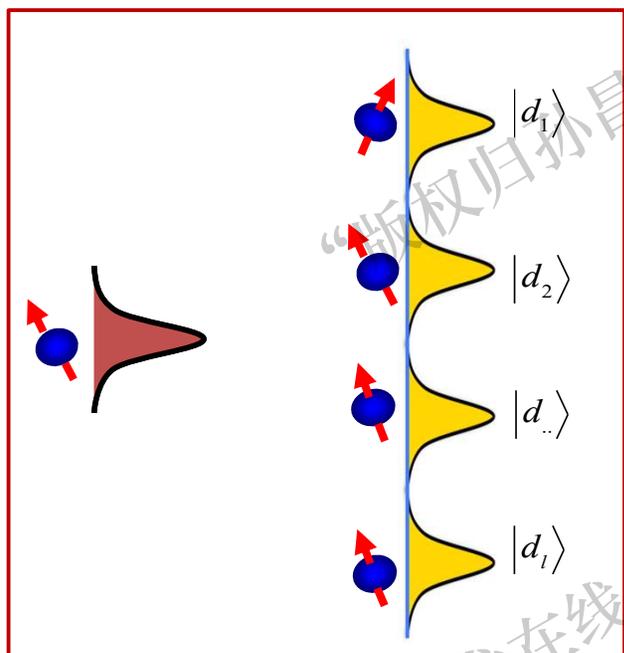
$|D_n(t)\rangle = e^{i(H_d+V_n)t} |D\rangle$ 代表对应着 $|n\rangle$ 的仪器状态

# 量子预测量——Schmidt 分解

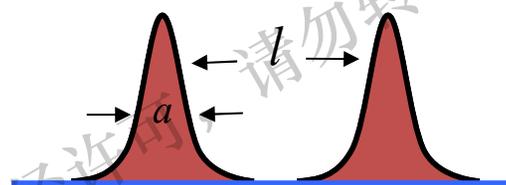
Schmidt 分解

$$|\psi\rangle = \sum c_{sk} |s\rangle \otimes |k\rangle = \sum c_n |s_n\rangle \otimes |d_n\rangle$$

退相干因子 = 仪器关联态重叠积分

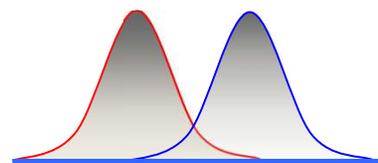


$$\langle d_m | d_n \rangle = \delta_{mn}$$



$$\langle d_1 | d_2 \rangle = 0$$

理想测量



$$\langle d_1 | d_2 \rangle \neq 0$$

非理想测量

# 量子测量退相干模型——小结

测量引起仪器和系统的纠缠。第三者研究被测量系统，他/她将不介意系统以外的状态是什么。这种“忽视”意味着对系统以外自由度求迹，于是得到系统的末态

$$\begin{aligned}\rho_S(t) &= \text{tr}_D(|\psi(x,t)\rangle\langle\psi(x,t)|) \\ &= \sum_n |C_n|^2 |n\rangle\langle n| + \sum_{m \neq n} C_m^* C_n |n\rangle\langle m| \otimes F_{mn}(t)\end{aligned}$$

系统外部波函数的重叠积分——退相干因子

$$F_{mn}(t) = \langle D_m(t) | D_n(t) \rangle$$

对于理想测量

$$F_{mn}(t) \rightarrow 0$$

测量会导致退相干产生

---

## 三、斯特恩-盖拉赫实验

“版权归孙昌璞院士和中物院研究生院所有”

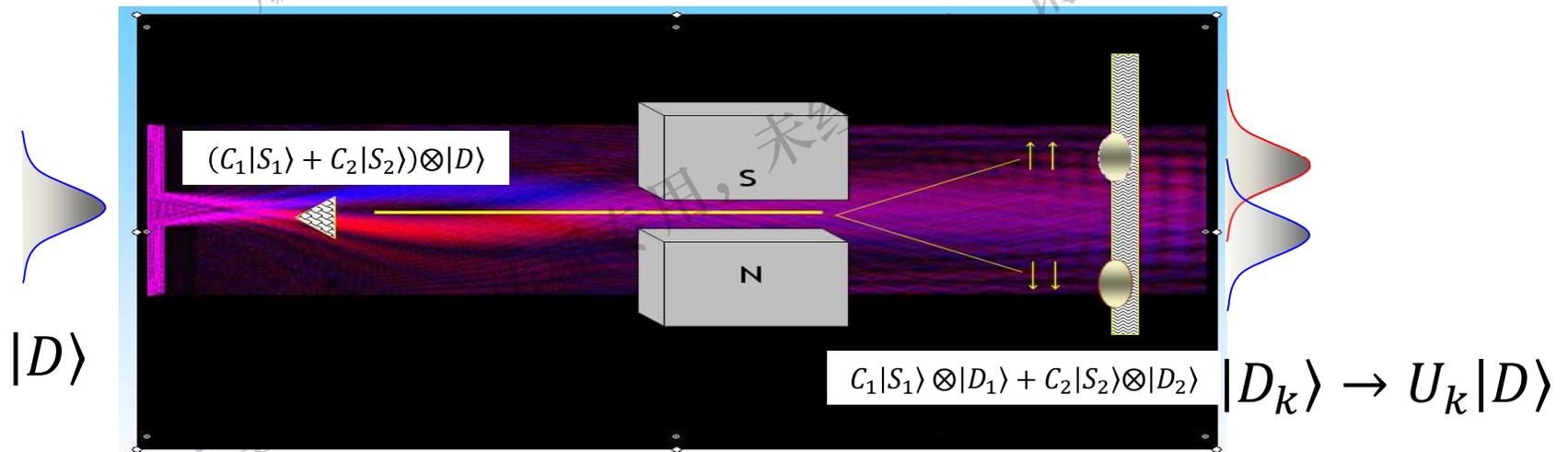
“寇享学术在线传播专用，未经许可，请勿转载！”

# 投影测量：从仪器读系统

R-过程：波包塌缩、冯·诺依曼投影

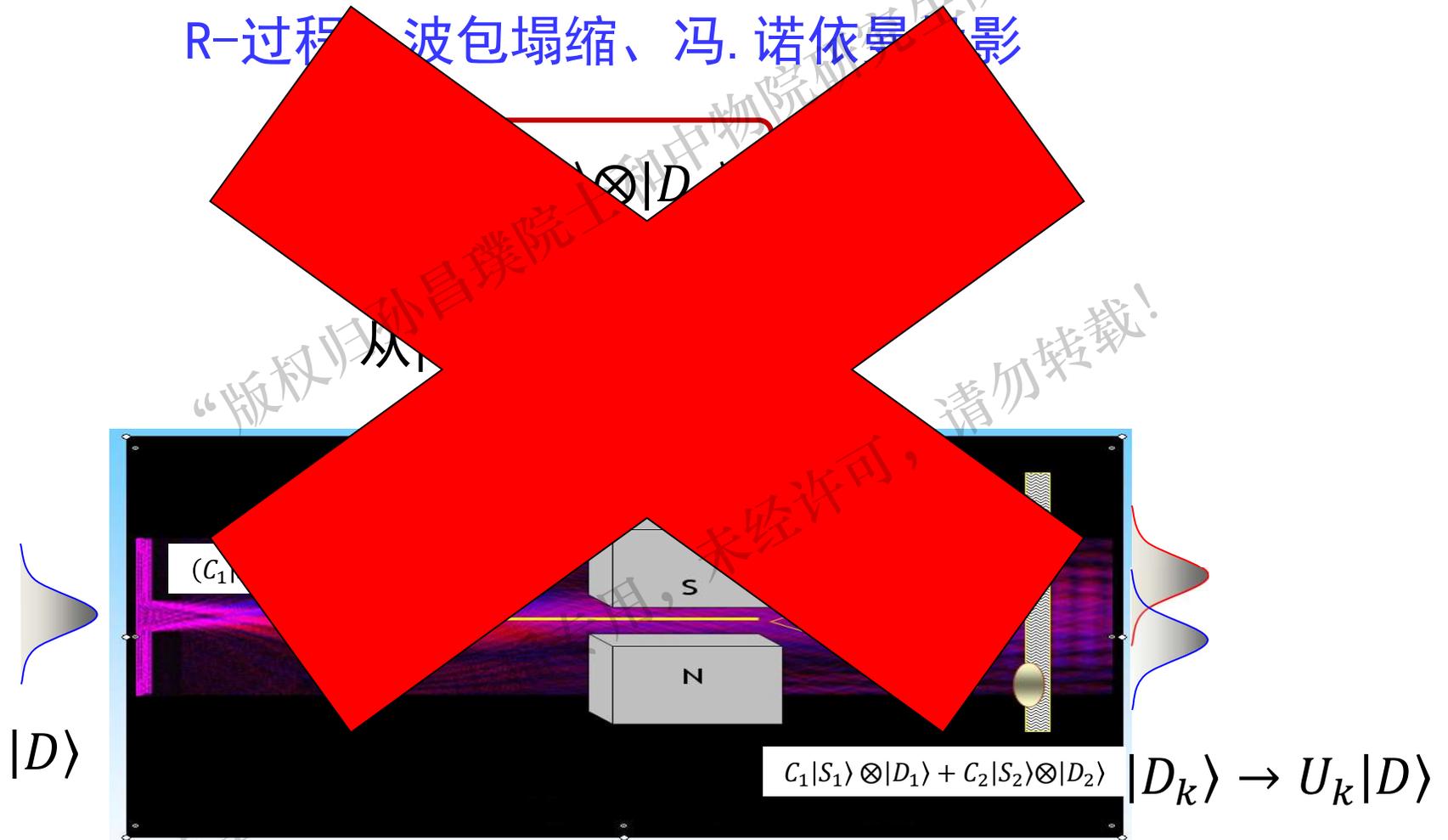
$$|\psi_i\rangle \rightarrow |S_k\rangle \otimes |D_k\rangle$$

从 $|D_k\rangle$ 读出 $|S_k\rangle$



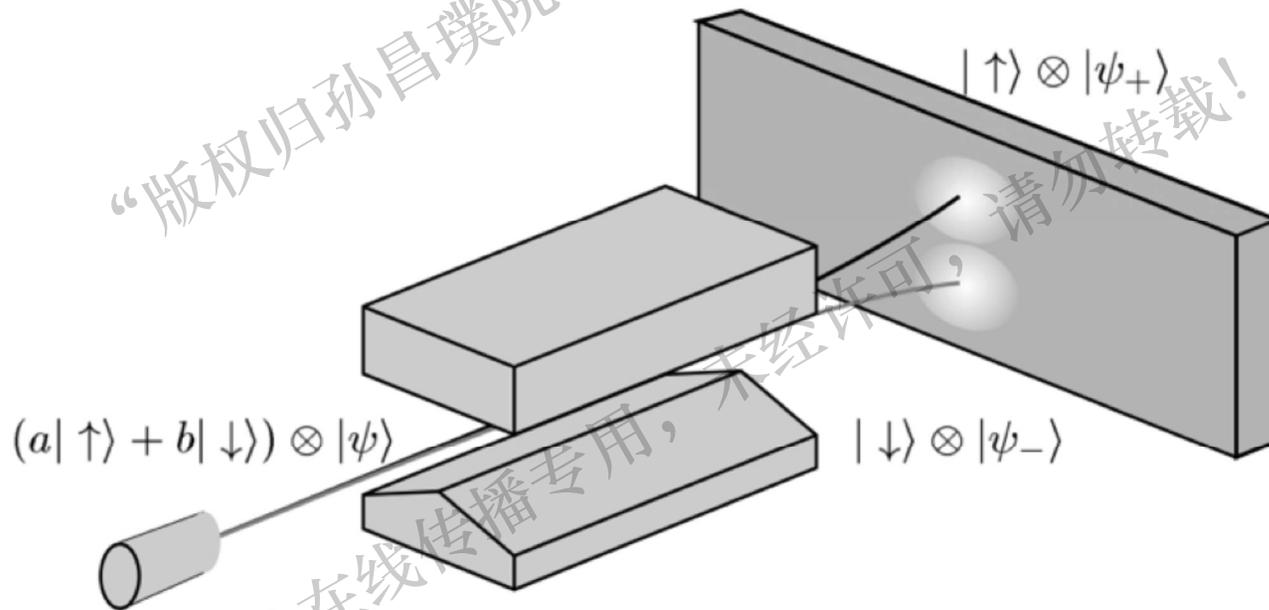
# 量子测量可否不需要投影？

R-过程 波包塌缩、冯·诺依曼投影



# 斯特恩-盖拉赫实验

SG实验反映了这样一种关联，即从原子的空间分布（在胶片上的两个斑点）读出内部状态自旋的存在



# 斯特恩-盖拉赫实验

斯特恩-盖拉赫实验：由空间部分测量银原子自旋

预测量过程：产生纠缠态

初态：

$$|\psi(0)\rangle = (C_{\uparrow}|\uparrow\rangle + C_{\downarrow}|\downarrow\rangle) \otimes |\psi(0)\rangle$$

预测量

纠缠态：

$$|\psi(t)\rangle = C_{\uparrow}|\uparrow\rangle \otimes |\psi_{\uparrow}(x, t)\rangle + C_{\downarrow}|\downarrow\rangle \otimes |\psi_{\downarrow}(x, t)\rangle$$

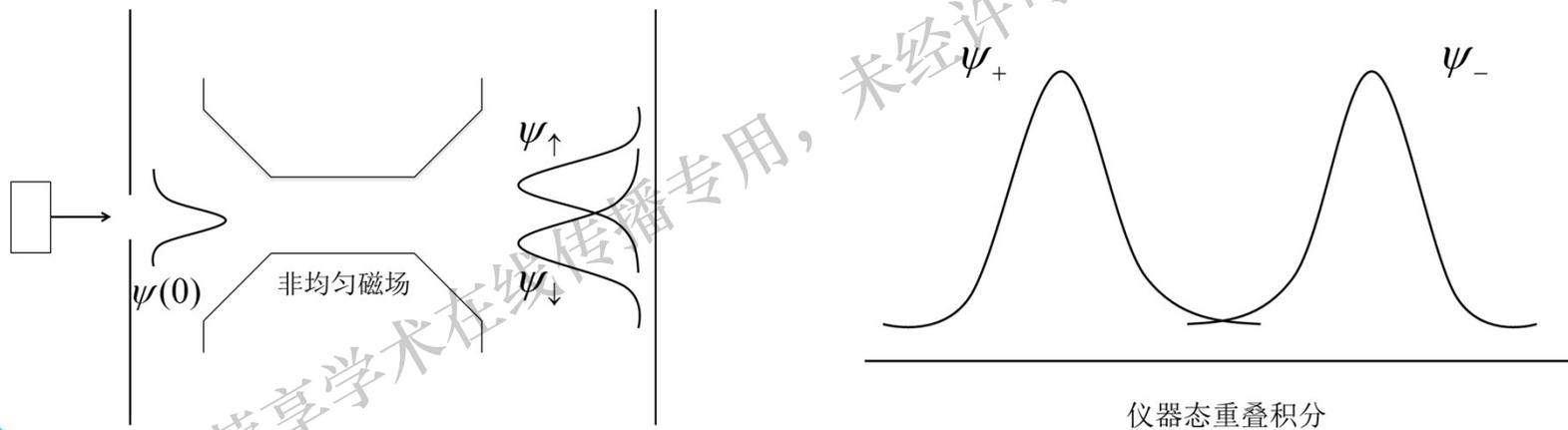
# 斯特恩-盖拉赫实验

原子从装置中出射，初态近似为一个高斯波包，在非均匀磁场下分为两个波包。

理想测量的条件

$$\langle \psi_{\uparrow} | \psi_{\downarrow} \rangle \rightarrow 0$$

意味着在底片上空间波函数 $\psi_{\uparrow}(x, t)$ 和 $\psi_{\downarrow}(x, t)$ 的重叠积分为零



# 斯特恩-盖拉赫实验

粒子磁矩 $\mu$ ，质量 $m$ ，在 $x$ 方向非均匀磁场中运动

$$H = \frac{p^2}{2m} - \mu B(x) \sigma_3$$

$$B(x) \approx \left. \frac{\partial B(x)}{\partial x} \right|_{x=0} x$$

$$H = \frac{p^2}{2m} - f x \sigma_3$$

其中

$$f = \mu \frac{\partial}{\partial x} B(x)$$

代表磁矩在非均匀磁场中的受力。

# 斯特恩-盖拉赫实验

初态是一个高斯波包

$$\langle x|\psi(0)\rangle = (c_+|\uparrow\rangle + c_-|\downarrow\rangle) \otimes \psi(x)$$

$$\psi(x) = \left(\frac{1}{2\pi a^2}\right)^{1/4} e^{-\frac{x^2}{4a^2}}$$

在磁场中，处在自旋态 $|\downarrow\rangle$ 和 $|\uparrow\rangle$ 的粒子将受到方向相反的力 $\pm f$ 的作用分裂为两束，即两个高斯波包。

$$\begin{aligned} |\Psi(t)\rangle &= e^{-iHt} |\Psi(0)\rangle \\ &= c_+|\uparrow\rangle \otimes e^{-i\left(\frac{p^2}{2m}-fx\right)t} |\psi\rangle + c_-|\downarrow\rangle \otimes e^{-i\left(\frac{p^2}{2m}+fx\right)t} |\psi\rangle \end{aligned}$$

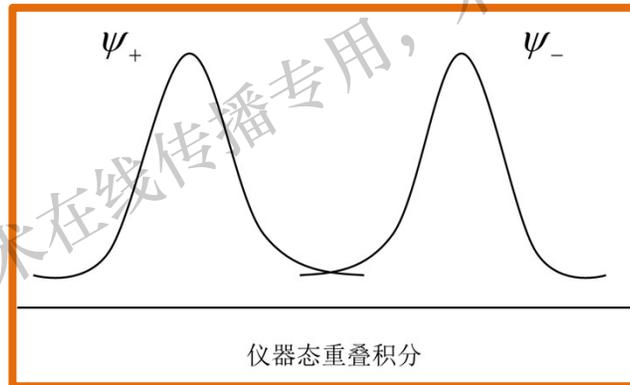
# 斯特恩-盖拉赫实验

## 坐标表象波函数

$$\langle x|\Psi(t)\rangle = c_+|\uparrow\rangle \otimes \psi_+(x) + c_-|\downarrow\rangle \otimes \psi_-(x)$$

$$\psi_{\pm} = \frac{(a^2/2\pi)}{\sqrt{a^2 + it/2m}} \exp\left(-\frac{ift^3}{6m} - \frac{\left(x \mp \frac{ft^2}{2m}\right)^2}{4\left(a^2 + \frac{it}{2m}\right)} \pm iftx\right)$$

是分别与 $|\downarrow\rangle$ 和 $|\uparrow\rangle$ 相关联的空间分布。



# 斯特恩-盖拉赫实验

理想的测量要求能很好地区分 $\psi_+(x)$ 和 $\psi_-(x)$ ，重叠积分为零。

$$\langle \psi_+ | \psi_- \rangle = 0$$

则称测量为理想的；

$$\langle \psi_+ | \psi_- \rangle \neq 0$$

则称测量为非理想的。

$$|F(t)| = |\langle \psi_+ | \psi_- \rangle| = \exp\left(-2a^2 f^2 t^2 - \frac{f^2 t^4}{8a^2 m^2}\right)$$

经过足够长的时间， $\langle \psi_+ | \psi_- \rangle \rightarrow 0$ ，即SG实验可以实现一个理想的量子测量。

# 斯特恩-盖拉赫实验

密度矩阵描述SG实验：

自旋自由度的约化密度矩阵

$$\begin{aligned}\rho_s &= \text{Tr}_d (|\Psi(t)\rangle\langle\Psi(t)|) \\ &= |c_+|^2 |\uparrow\rangle\langle\uparrow| + |c_-|^2 |\downarrow\rangle\langle\downarrow| + (c_+^* c_- |\downarrow\rangle\langle\uparrow| F(t) + \text{h.c.})\end{aligned}$$

$F(t) \rightarrow 0$ ,  $\rho_s$  变成一个混合态, SG实验无法看到 $|\uparrow\rangle$ 和 $|\downarrow\rangle$ 的干涉。

空间自由度约化密度矩阵对角元

$$\langle x|\rho|x\rangle = \text{Tr}_s (\langle x|\Psi\rangle\langle\Psi|x\rangle) = |\psi_+(x)| + |\psi_-(x)|^2$$

不存在干涉条纹, 这种结果是相当自然的。

# 同位旋的斯特恩-盖拉赫实验

现实中人们从未能看到中子和质子之间的干涉，因为它们分别对应于正交的同位旋态，对于中子-质子构成的同位旋系统而言，可以类比

中子  $\rightarrow |\uparrow\rangle$ , 质子  $\rightarrow |\downarrow\rangle$

---

## 四、量子退相干理论与薛定谔猫

“版权归孙昌璞院士和中物院研究生院所有”

“寇享学术在线传播专用，未经许可，请勿转载！”

# 量子退相干(Decoherence)理论

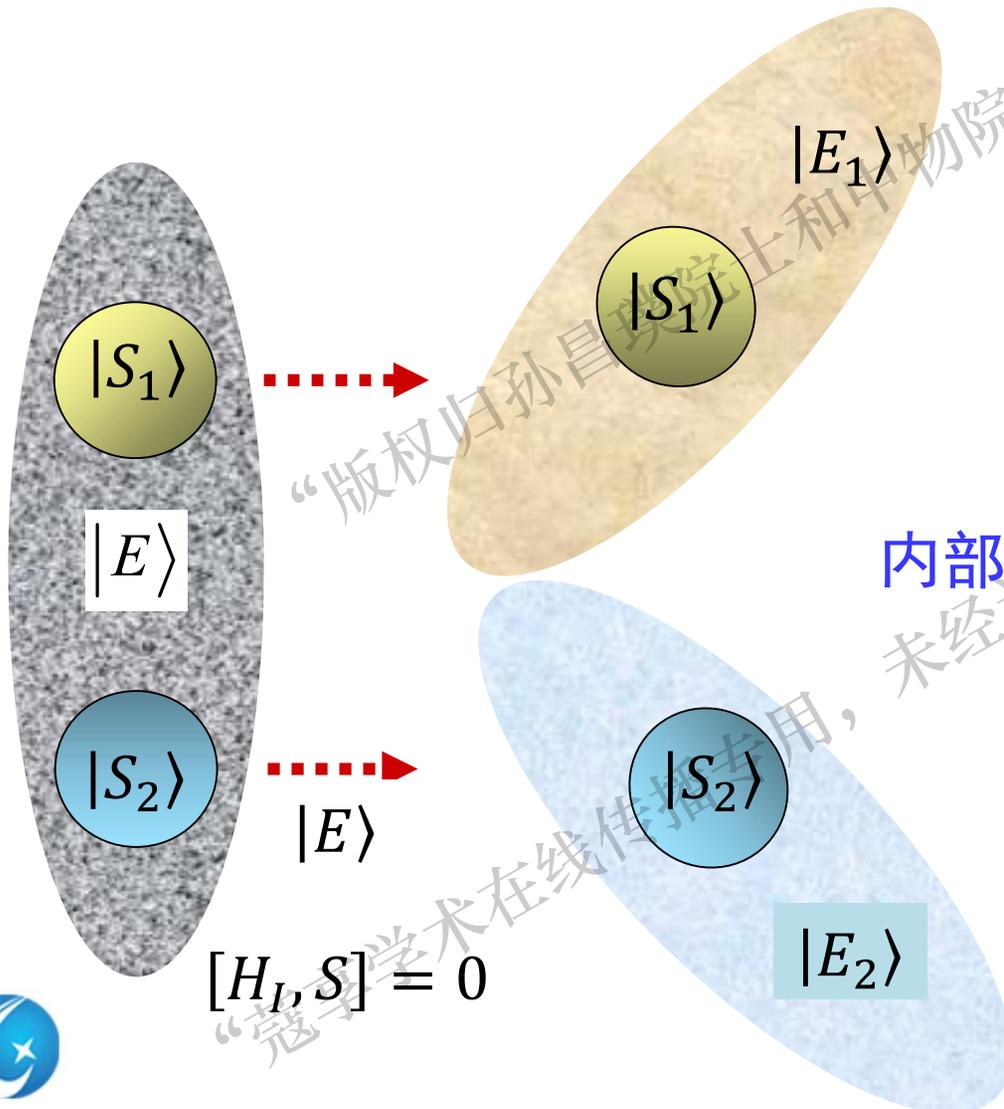


量子退相干理论创立者迪特尔·泽(Dieter Zeh, 左)和他的学生埃里希·朱斯(Erich Joos, 右)

1. Zeh H D. *Foundations of Physics*, 1970, 1(1): 69-76
2. Joos E, Zeh H D. *Zeitschrift Für Physik B Condensed Matter*, 1985, 59(2): 223-243
3. Joos E, Zeh H D, Kiefer C *et al.* *Decoherence and the Appearance of a Classical World in Quantum Theory*. Berlin: Springer-Verlag, 2003

# 与外部环境的纠缠导致宏观物体退相干

Wigner 1967; Zeh, 1970; Joos, Zeh, 1985



外部环境中粒子散射

$$|S\rangle \otimes |E\rangle \xrightarrow{H_I} |S\rangle \otimes |E_S\rangle$$

内部自由度与集体自由度耦合

R. Omnes, 2001

孙昌璞, 1993, 2001

因子化结构与宏观热力学极限

# 环境诱导退相干的约化密度矩阵描述

$$|\psi_i\rangle = \left( \sum c_n |S_n\rangle \right) \otimes |E\rangle \rightarrow \sum c_n |S_n\rangle \otimes |E_n\rangle = |\psi_f\rangle$$

$$\rho_S = \text{tr}_D(|\psi_f\rangle\langle\psi_f|)$$

$$= \sum_n |c_n|^2 |S_n\rangle\langle S_n| + \sum_{n \neq m} c_m c_n |S_n\rangle\langle S_m| F_{mn}$$

退相干因子

$$F_{mn} = \langle E_m | E_n \rangle$$

如果环境的关联态是正交的，完全退相干，  
实现量子几率到经典几率的跃变



$$\rho_S = \text{tr}_D(|\psi_f\rangle\langle\psi_f|) \Rightarrow \sum_n |c_n|^2 |S_n\rangle\langle S_n|$$

# 退相干的程度：定域率

*The emergence of classical properties through interaction with environment, Joos, Zeh, 1985*

$$\rho(x, x', t) = \rho(x, x', 0) \exp[-\Lambda t(x - x')^2]$$

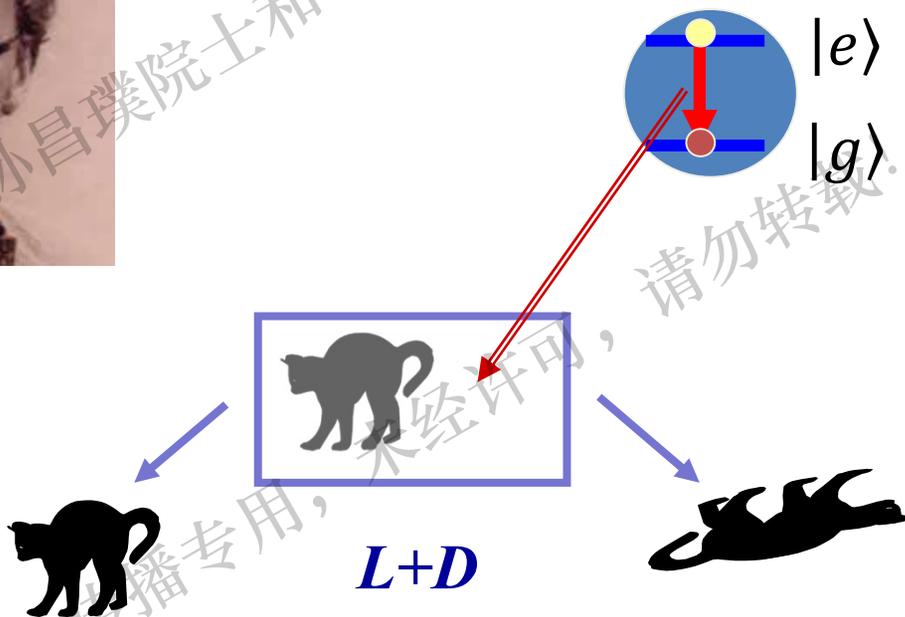
$$\Lambda = \frac{q^2 N \nu \sigma_{\text{eff}}}{V}$$

$$\sigma_{\text{eff}} = \frac{4\pi^2}{3} \int d \cos \theta (1 - \cos \theta) |f(q, q')|^2$$

# 不同情况的定域率

定域率 $\Lambda$ ( $\text{cm}^{-2}\text{s}^{-1}$ )	$10^{-3}\text{cm}$ 尘埃	$10^{-5}\text{cm}$ 尘埃	$10^{-6}\text{cm}$ 大分子
宇宙背景辐射	$10^6$	$10^{-6}$	$10^{-12}$
300K光子	$10^{19}$	$10^{12}$	$10^6$
地球表面阳光	$10^{21}$	$10^{17}$	$10^{13}$
空气分子	$10^{36}$	$10^{32}$	$10^{30}$
实验室真空 ( $10^3$ 颗粒/ $\text{cm}^3$ )	$10^{23}$	$10^{19}$	$10^{17}$

# 常规条件下为什么不存在宏观量子态？



薛定谔猫

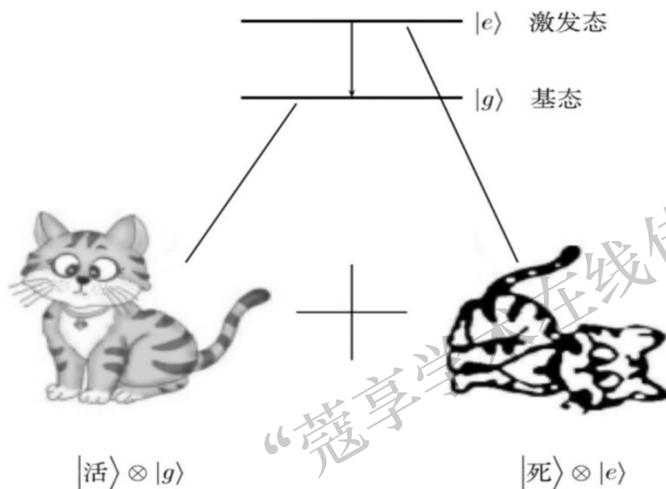
# 薛定谔猫佯谬的严格表述

设想一个封闭的盒子里放一只猫和具有激发态 $|e\rangle$ 和基态 $|g\rangle$ 的放射性粒子。当处于 $|e\rangle$ 态时，就会产生辐射衰变把猫杀死；处于 $|g\rangle$ 态时，就不会辐射，猫仍然活着。根据量子力学的态叠加原理，粒子可以处于 $|e\rangle$ 和 $|g\rangle$ 的叠加态

$$|\psi\rangle = \alpha|g\rangle + \beta|e\rangle$$

在打开盒子观察猫的死活以前，猫会处于一个半死不活的状态，即会有具有量子纠缠的总体波函数

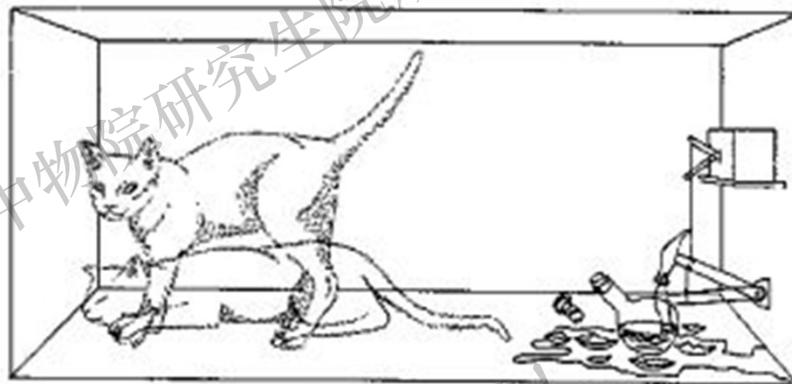
$$|\psi_{\text{总}}\rangle = \alpha|g\rangle \otimes |\text{活}\rangle + \beta|e\rangle \otimes |\text{死}\rangle$$



与现实的观察是矛盾的：宏观的猫可以处在 $|\text{死}\rangle$ 和 $|\text{活}\rangle$ 的线性叠加的非死非活，半死半活的怪态上。根据量子测量的哥哈根解释，处在这种怪态上，猫的生死不依赖打开盒子前的“客观存在”，而是决定于打开盒子后的“观察”。这看上去是不合理的，因而称之为薛定谔猫佯谬。

# 量子的“生死”之间

$$|\text{猫态}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\text{死}\rangle + |\text{活}\rangle)$$



1. 什么是常态宏观物体—薛定谔猫？

答：由大于阿伏伽德罗常数个粒子组成。

2. 猫的“死”与“活”内涵是什么？

答：“死”与“活”是集体自由度（质心）的两个状态。

3. 是否存在“死”与“活”的相干叠加？

# 环境辅助的量子退相干与薛定谔猫

薛定谔猫为一个多自由度系统，猫的死与活代表了两种集体自由度，内部自由度相当于环境。薛定谔猫的状态应该写成

$$|\text{猫态}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( |\text{死}\rangle \otimes \prod_{j=1}^N |d_j\rangle + |\text{活}\rangle \otimes \prod_{j=1}^N |l_j\rangle \right)$$

忽略猫的内部状态，则约化密度矩阵

$$\begin{aligned} \rho &= \text{tr}_E(|\text{猫态}\rangle\langle\text{猫态}|) \\ &= \frac{1}{2} (|\text{死}\rangle\langle\text{死}| + |\text{活}\rangle\langle\text{活}|) + (|\text{死}\rangle\langle\text{活}|F + |\text{活}\rangle\langle\text{死}|F^*) \end{aligned}$$

退相干因子

$$F = \prod_{j=1}^N \langle d_j | l_j \rangle, \quad |\langle d_j | l_j \rangle| \leq 1$$

在宏观极限时

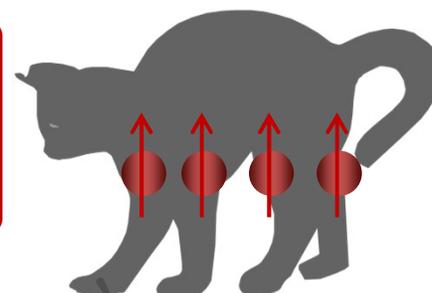
$$N \rightarrow \infty, \quad F \rightarrow 0$$

# 薛定谔猫与宏观物体退相干的因子化模型

内部“环境”诱导退相干的因子化模型：孙昌璞（1992）



$$|\text{Cat}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( |D\rangle \otimes \prod_{j=1} |d_j\rangle + |L\rangle \otimes \prod_{j=1} |l_j\rangle \right)$$



$$\rho = \text{tr}(|\text{Cat}\rangle\langle\text{Cat}|) = \frac{1}{2} |D\rangle\langle D| + \frac{1}{2} |L\rangle\langle L| + \langle d|l\rangle |L\rangle\langle D| + \text{h.c.}$$

$$\langle d|l\rangle = \prod_{j=1}^N \langle d_j|l_j\rangle \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$$

产生内部“环境”和集体自由度的耦合机制是什么？

# 宏观性与薛定谔猫

质疑：为什么不同的集体态 $|死\rangle$ 和 $|活\rangle$ 会与不同的内部状态相关联？

一般讲来，由于薛定谔猫是一个宏观物体，它具有非常大的希尔伯特空间和特别密的能谱。由于能级间隔很小，内部状态即便经历了一个很小的扰动，也很容易跃迁到不同的状态上。从而，集体自由度在不同的状态上会对不同的内部状态产生不同的影响。

上述不稳定性会导致 $|死\rangle$ 与 $|活\rangle$ 关联的内部状态不一样。

---

## 五、环境辅助的量子测量

“版权归孙昌璞院士和中物院研究生院所有”

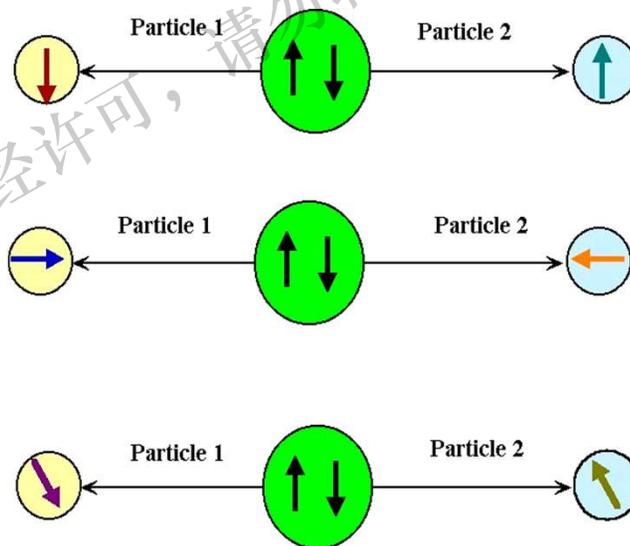
“寇享学术在线传播专用，未经许可，请勿转载！”

# 量子测量偏好基 (preferred Basis) 困难

$$|\psi_f\rangle = \sum c_n |s_n\rangle \otimes |d_n\rangle = \sum c'_n |s'_n\rangle \otimes |d'_n\rangle$$

量子纠缠与EPR佯谬:

$$\begin{aligned} |\text{EPR}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} [|\uparrow, \downarrow\rangle - |\downarrow, \uparrow\rangle] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} [|\rightarrow, \leftarrow\rangle - |\leftarrow, \rightarrow\rangle] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} [|\vec{n}, -\vec{n}\rangle - |-\vec{n}, \vec{n}\rangle] \end{aligned}$$



# 量子测量偏好基困难

量子测量需要在经典世界中实现信号认知，希望相互作用导致仪器和被测系统的经典关联，即

$$|\psi(0)\rangle = \sum C_n |n\rangle \otimes |D\rangle \Rightarrow \rho_f = \sum |C_n|^2 |n, D_n\rangle \langle n, D_n|$$

量子纠缠纯态具有基矢选择的不确定性。

# 量子测量偏好基困难

在S-G实验中，若自旋初态是等几率叠加

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle) \otimes |\phi\rangle$$

描述测量过程的状态为

$$|\phi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle \otimes |\phi_{\uparrow}\rangle - |\downarrow\rangle \otimes |\phi_{\downarrow}\rangle)$$

# 量子测量偏好基困难

如果选择系统的基矢

$$|\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle \pm |\downarrow\rangle)$$

状态可重新表达为

$$|\phi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+\rangle \otimes |\phi_+\rangle - |-\rangle \otimes |\phi_-\rangle)$$

$$|\phi_{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\phi_{\uparrow}\rangle \pm |\phi_{\downarrow}\rangle)$$

同样的 $|\phi(t)\rangle$ 可以解读为两种不同的关联  
这就是“人选基” (preferred basis) 问题。

# 环境辅助的量子测量

计入系统-仪器构成的二元系统以外“环境”测量被描述成产生三重纠缠的么正过程

$$|\psi(0)\rangle = \sum C_n |n\rangle \otimes |D\rangle \otimes |E\rangle$$

$|E\rangle$ 是环境初态，总体系“宇宙”状态变为

$$|\psi(t)\rangle = \sum C_n |n\rangle \otimes |D_n\rangle \otimes |E_n\rangle$$

二元子系统（系统+仪器）状态约化为

$$\begin{aligned} \rho_{sd} &= \text{Tr}_E(|\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|) \\ &= \sum |C_n|^2 |n, D_n\rangle\langle n, D_n| + \sum_{m \neq n} C_m^* C_n F_{mn} |n, D_n\rangle\langle m, D_n| \end{aligned}$$

退相干因子

$$F_{mn} = \langle E_m | E_n \rangle$$

# 宏观环境的退相干因子

环境是由宏观多粒子系统组成。很多情况下环境态因子化

$$|E_n\rangle = \prod_{j=1}^N \otimes |E_n(j)\rangle$$

退相干因子也因子化

$$\langle E_m | E_n \rangle = \prod_{j=1}^N \langle E_m(j) | E_n(j) \rangle \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$$

环境的宏观性会导致经典关联产生。

# 基于环境诱导退相干的量子测量



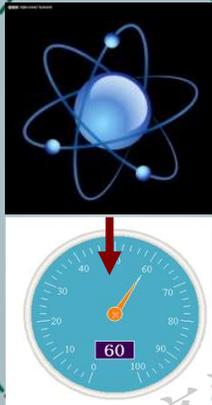
W. H. Zurek, 2006 “Decoherence” in Beijing

1. 避免使用“波包塌缩”
2. 引入“第三者”——环境
3. 环境选择了特定的基矢 (preferred basis)

1983年：环境选择了仪器的指针态

$$|\Psi_i\rangle = \sum C_n |S_n\rangle \otimes |D\rangle \otimes |E\rangle \rightarrow |\psi_{\text{pre}}\rangle = \sum C_n |S_n\rangle \otimes |D_n\rangle \otimes |E\rangle$$
$$\rightarrow |\psi_f\rangle = \sum C_n |S_n\rangle \otimes |D_n\rangle \otimes |E_n\rangle$$

环境



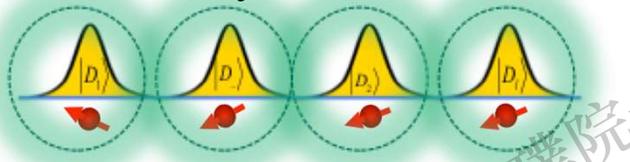
特定环境态的正交性

$$\langle E_n | E_m \rangle = \delta_{nm}$$

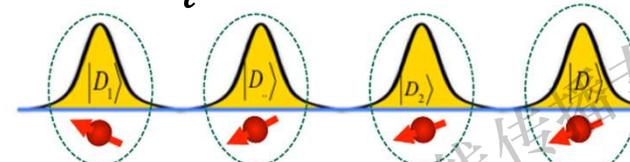
$$|\Psi_{\text{pre}}\rangle = \sum C_n |S_n\rangle \otimes |D\rangle \rightarrow \rho_d = \text{Tr}_E(|\psi_f\rangle\langle\psi_f|) = \sum |C_n|^2 |S_n, D_n\rangle\langle S_n, D_n|$$

系统和仪器形成经典关联

# 量子测量的定义：仪器-系统形成经典关联

$$|\psi_i\rangle = \left[ \sum_l C_l |s_l\rangle \right] \otimes |D\rangle$$




$$\rho_D = \sum_l |c_l|^2 |s_l, D_l\rangle \langle s_l, D_l|$$


天气预报=经典关联:

天晴或下雨与观察者看到的(R, S) 是确定性的——对应。

但量子力学不必回答经典概率事件如何发生

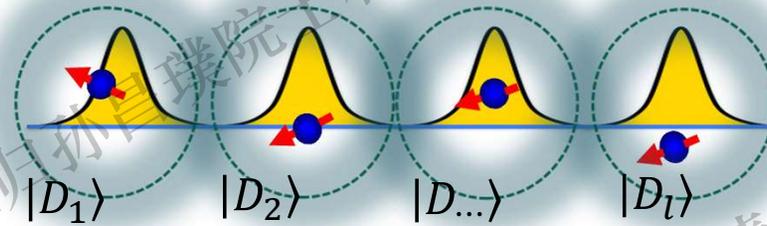


$$\rho_{\text{tomorrow}} = 70\% |\text{rain}, R\rangle \langle \text{rain}, R| + 30\% |\text{sunny}, S\rangle \langle \text{sunny}, S|$$

# 实现量子测量的两个步骤

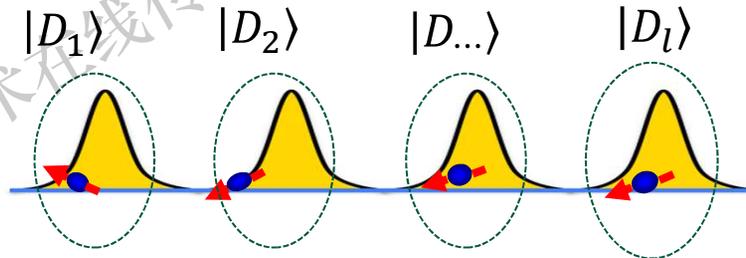
1. 预测量：被测系统和仪器之间形成理想量子纠缠

$$|\psi_i\rangle = \left[ \sum_l c_l |s_l\rangle \right] \otimes |D\rangle \rightarrow |\psi_f\rangle = \sum_l c_l |s_l\rangle \otimes |D_l\rangle \equiv \sum_l c_l |s_l, D_l\rangle$$



2. 经典关联：被测系统和仪器之间形成理想的经典关联

$$|\psi_i\rangle = \left[ \sum_l c_l |s_l\rangle \right] \otimes |D\rangle \rightarrow \rho_d = \sum_l |c_l|^2 |s_l, D_l\rangle \langle s_l, D_l|$$



---

## 六、量子力学多世界诠释

“版权归孙昌璞院士和中物院研究生院所有”

“寇享学术在线传播专用，未经许可，请勿转载！”

# 冯·诺意曼量子测量模型与斯特恩-盖拉赫实验

对于仪器-系统相互作用形成的两者量子纠缠态的预测量，进一步的解释有：

波包塌缩假设

量子退相干模型

多世界理论

# 冯·诺意曼量子测量模型与斯特恩-盖拉赫实验

## 波包塌缩假设

在纠缠态 $|\psi(t)\rangle = \sum C_n |n\rangle \otimes |D_n\rangle$ 上，由于 $|D_n\rangle$ 是一个宏观态，一旦观察到 $|D_n\rangle$ ，则总体便塌缩到 $|n\rangle \otimes |D_n\rangle$ ，由此推断出系统在 $|n\rangle$ 上。

那么，怎么判断仪器在 $|D_n\rangle$ 上？必须有第二个仪器 $D(2)$ 测量第一个仪器 $D(1) = D$

依次下来，就有一个**仪器链**

链的末端是什么？



# 冯·诺意曼量子测量模型与斯特恩-盖拉赫实验

## 波包塌缩假设

### 链的末端是什么？

威格纳等：一个有意识的观察者。

测量得到结果的过程是一个有观察者介入的过程，由多个测量确定下来的微观量子系统的性质是不能独立于人的意识而存在的。

这个结论显然有悖于常识，其实本质采用了是波包塌缩假设。

# 冯·诺意曼量子测量模型与斯特恩-盖拉赫实验

## 多世界理论

对预测量产生仪器和系统纠缠态的第二种解读是不在量子力学基本框架外做任何假设，认为每一个分支都是“客观”存在的。

例如在SG实验中，两个分支

$$|\downarrow\rangle \otimes |\psi_{\downarrow}(x, t)\rangle$$

和

$$|\uparrow\rangle \otimes |\psi_{\uparrow}(x, t)\rangle$$

都是存在的，只是把 $|\psi_{\uparrow}(x, t)\rangle$ 和 $|\psi_{\downarrow}(x, t)\rangle$ 理解为除了系统以外所有部分的状态

# 冯·诺意曼量子测量模型与斯特恩-盖拉赫实验

## 多世界理论

$|\psi_{\uparrow}(x, t)\rangle$ 和 $|\psi_{\downarrow}(x, t)\rangle$ 描述了仪器、观察者和环境构成的外部世界。

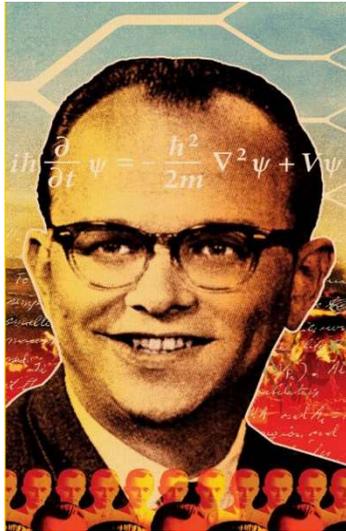
这时，实验测得自旋向上，是因为观察者正好在这个分支中

这个解释是由Everett II 1955年指出，后来被命名为“多世界理论”，这引起了很多误解。

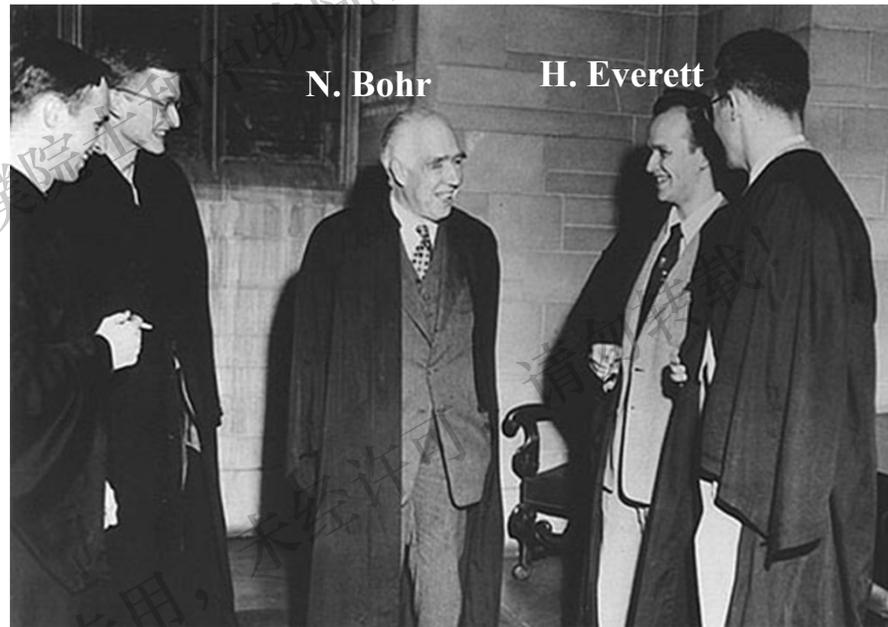
# 量子力学多世界诠释

Hugh Everett, *Rev.Mod. Phys.* 29, (1957)

“本世纪一个保守得最好的机密！”



Hugh Everett



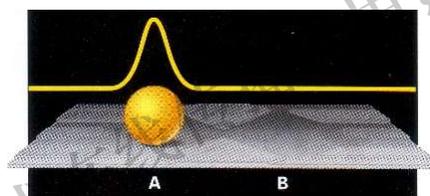
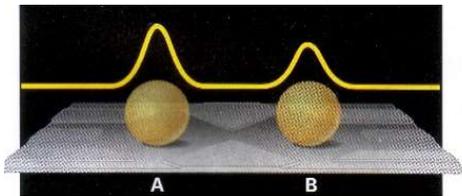
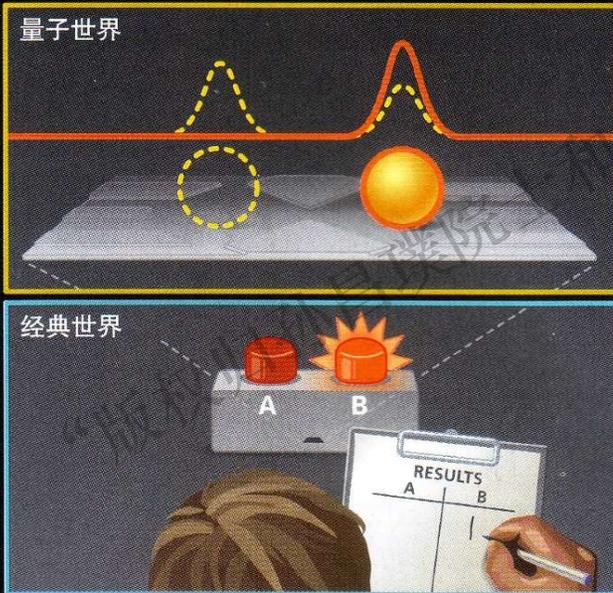
文章发表后被学界冷落多年，1960年代末Bryce Seligman DeWitt在研究量子宇宙学时，重新发现了这个“世界上保守好的秘密”，并把它重新命名为“多世界理论”。这个引人注目的名称复活了埃弗里特沉寂多年的观念，也引起了诸多新的误解和争论。

# 量子力学多世界诠释

“中国科学院所有”

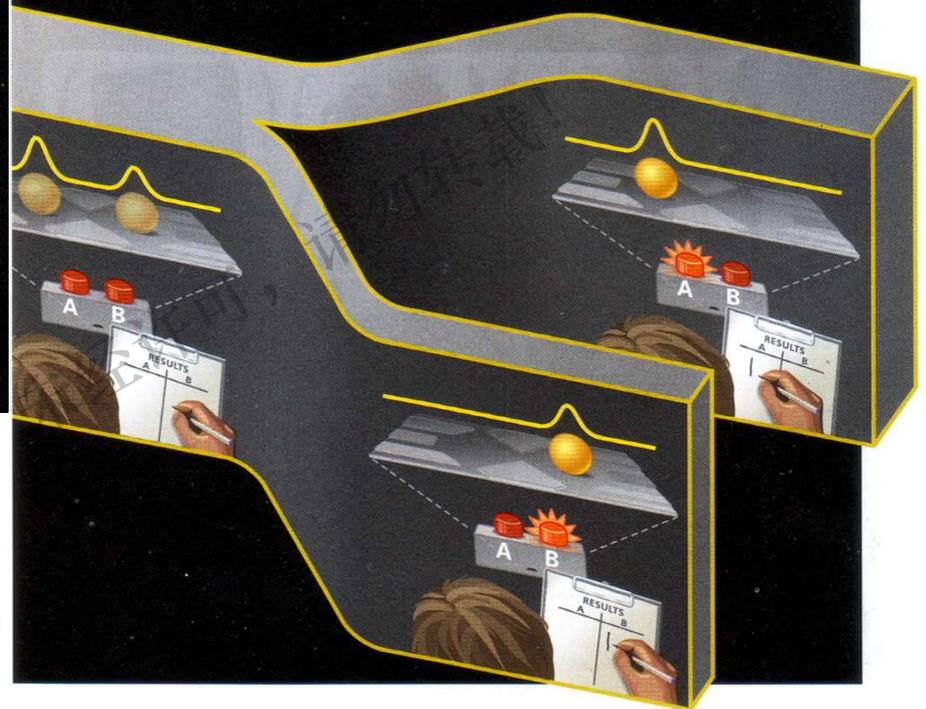
## 哥本哈根诠释

根据玻尔等人的观点，进行测量的仪器（和人）位于经典世界之中，这个世界有别于量子世界。当这样一个经典仪器测量一个叠加态时，会导致量子波函数随机坍缩到某一状态，同时其他状态全部消失。量子力学方程无法解释为何会发生这样的坍缩，坍缩必须作为一个单独的假设人为添加到量子理论之中。



## 多世界诠释

埃弗里特的革命性贡献是，在分析测量的过程中，把仪器（和人）看成是另一个量子体系，它们完全遵循量子力学的方程和原理。通过这样的分析，他得出结论：最终结果将是各种测量结果的叠加态，该叠加态中的每一个测量结果都像是独立分岔出去的一个分支宇宙。我们在宏观世界中无法察觉到这种叠加态，是因为每个分支宇宙中的“分身”，都只能感知自己所在的分支宇宙中的物体。



# 多世界诠释/相对态理论

## Many Worlds Theory or Relative State Approach

**正则波函数**  $|\psi\rangle = \sum_l c_l |s_l\rangle \otimes |d_l\rangle$  的多个分支  $|s_l\rangle \otimes |d_l\rangle$ , ( $l = 1, 2, \dots$ ) 代表了多个实际存在的“世界”。系统状态  $|s_l\rangle$  是由相对于其**环境相对态**  $|d_l\rangle$  而存在，在每一个“世界”中，观察者确定地观察到了系统状态，但不能感知系统在其它世界中的态。

$$|\psi\rangle = \sum c_{sk} |s\rangle \otimes |k\rangle = \sum c_n |s_n\rangle \otimes |d_n\rangle$$

多世界诠释不引入任何附加的假设，更没有假设世界分裂。

“哥本哈根诠释的不完整性是无可救药的，因为它先验地依赖于经典物理……这是一个将‘真实’概念建立在宏观世界、否认微观世界真实性的哲学怪态”

# 多世界诠释/相对态理论

Hugh Everett, *Rev.Mod. Phys.* 29, (1957)

- 解决了量子力学诠释的疑难：非定域性和微观因果律
- 在量子力学自身框架给出波函数自治的诠释，排除经典

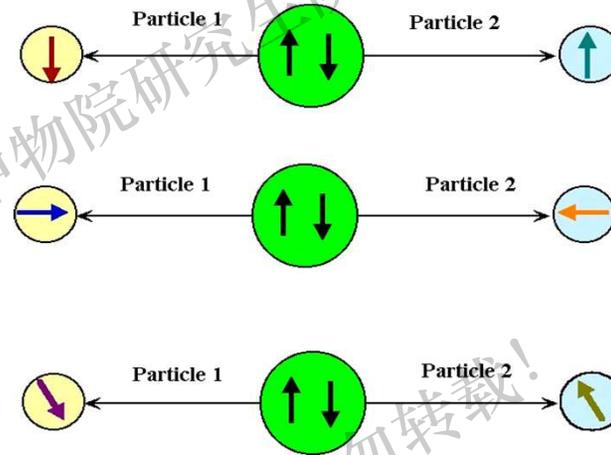
多世界理论常常被误解为假设了世界的“分裂”、替代波包塌缩。事实上，埃弗里特从来没有做过这样假设。多世界理论是在量子力学的基本框架（薛定谔方程或海森堡方程加上玻恩几率诠释）描述测量或观察，不附加任何假设。“分裂”只是理论中间产物的形象比喻。当初，埃弗里特投稿《现代物理评论》遭到了审稿人的严厉批评：测量导致的分支状态共存，意味着世界在多次“观测”中不断地分裂，没有任何观察者在实际中感受到各个分支的共存。

**必须证明世界“分裂”不能够被观察到！**

# 排除了对量子非定域性误解

## 量子非定域性

$$\begin{aligned} |B\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow, \downarrow\rangle - |\downarrow, \uparrow\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|+, -\rangle) \end{aligned}$$



定域性表述1：两个类空事件没有关联

$$[\varphi(x), \varphi^\dagger(y)] \xrightarrow{|x-y| \geq ct} 0$$

定域性表述2：两个类空点的操纵（**测量**）互不影响

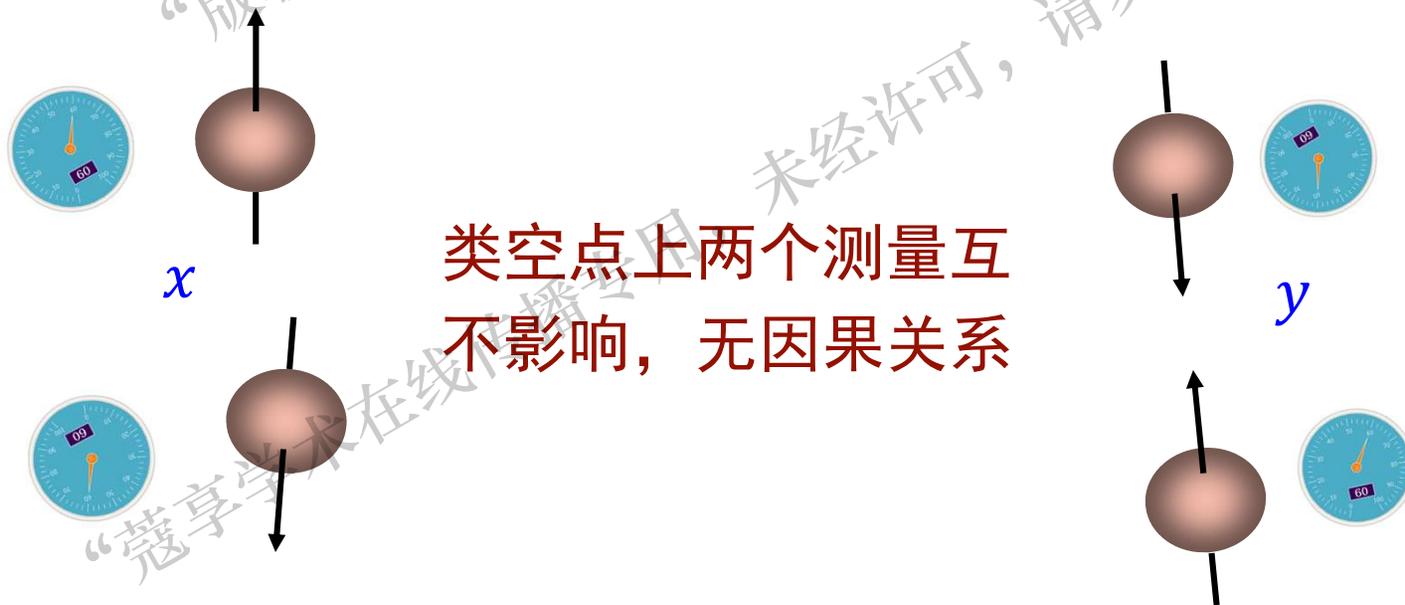
$$[U_x, U_y] \xrightarrow{|x-y| \geq ct} 0$$

# 两个类空点上量子测量和测量顺序无关

$D(x), D(y)$ 代表测量仪器的态,  $U_j = j$ 点上测量( $j = x, y$ )

$$\begin{aligned} U_x U_y |B, D(x), D(y)\rangle &= U_y U_x |B, D(x), D(y)\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow, \downarrow\rangle \otimes |D_\uparrow(x), D_\downarrow(y)\rangle - |\downarrow, \uparrow\rangle \otimes |D_\downarrow(x), D_\uparrow(y)\rangle) \end{aligned}$$

Frank J. Tipler, PNAS (August 5, 2014), vol. 111, 11281-11286



# 非定域性：需要第3个仪器远程比对

当我们把测量仪器用量子力学描述，用来比对自旋方向的仪器将诱导出无因果关系的、经典关联描述的客观测量结果

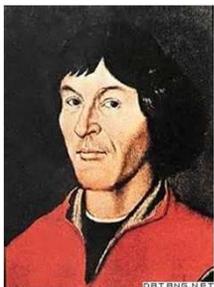


$$U(x, y) |D_{\downarrow/\uparrow}(x)\rangle \otimes |D\rangle = |D_{\downarrow/\uparrow}(x)\rangle \otimes |D(\downarrow/\uparrow)\rangle$$
$$U(x, y) |D_{\downarrow/\uparrow}(y)\rangle \otimes |D\rangle = |D_{\downarrow/\uparrow}(y)\rangle \otimes |D(\downarrow/\uparrow)\rangle$$

## 四体经典关联

$$\rho = \text{tr}_3(|\psi\rangle\langle\psi|)$$
$$= \frac{1}{2} (|\uparrow, D_{\uparrow}(x); \downarrow, D_{\downarrow}(y)\rangle\langle\uparrow, D_{\uparrow}(x); \downarrow, D_{\downarrow}(y)|$$
$$+ |\downarrow, D_{\downarrow}(x); \uparrow, D_{\uparrow}(y)\rangle\langle\downarrow, D_{\downarrow}(x); \uparrow, D_{\uparrow}(y)|)$$

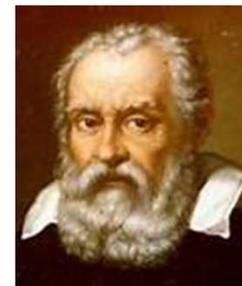
# 多世界诠释合理性的类比：逻辑可证伪



哥白尼

观察导致世界的“分裂”，但分裂是不可观察的。

地球运动不可感受：对比哥白尼的日心地动学说，虽然人们没有直接观察到地在动，但由此发展的牛顿理论可以自洽地解释为什么观察不到“地在动”。



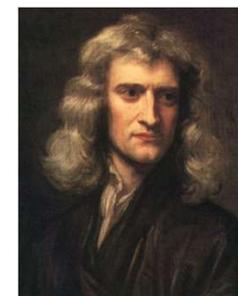
伽利略



盖尔曼

自由夸克不存在：对比夸克的QCD理论，虽然人们没有观察到自由夸克，但基于夸克的QCD理论解释了为什么观察不到自由夸克。

夸克禁闭和渐进自由

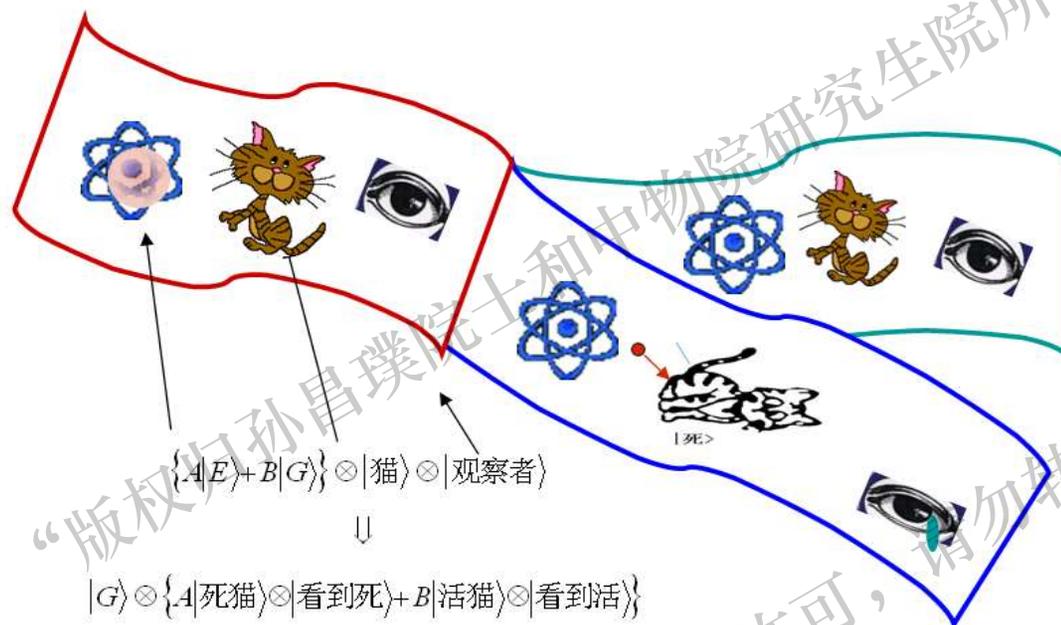


牛顿

The Nobel Prize in Physics 2004  
David J. Gross, H. David Politzer and Frank Wilczek  
"for the discovery of asymptotic freedom in the theory of the strong interaction"



# 必须证明世界“分裂”不能够被观察到！



**DeWitt的多世界：**每一次观察或测量，么正演化导致宇宙正则态的相对态表述，描述了不可观测的一次世界“分裂”，无穷次分裂历史粗粒化自动给出玻恩规则。

## 证明“分裂”不可观察的三个步骤：

1. 先明晰什么是量子力学中的观测或量子测量

2. 再阐明什么是多世界诠释中的“分裂”

3. 最后用**反证法**证明：如果有两个观察者测量同一个量子体系：若观察者2观察到世界“分裂”，则观察者1就不能很好地测量系统。

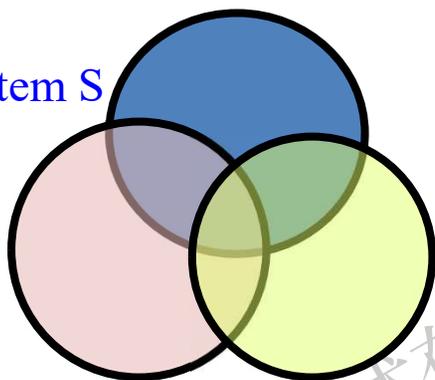
# 基于经典关联明确定义量子测量的客观性

首先明确定义什么是量子测量或观察 (observation)，然后才能在严格的意义上讨论量子测量的客观性

$$|\psi\rangle = \sum_l c_l |s_l\rangle \otimes |D_l(1)\rangle \otimes |D_l(2)\rangle$$

$$\equiv \sum_l c_l |s_l, D_l(1), D_l(2)\rangle$$

System S



仪器 D1

仪器 D2



客观量子测量：所有仪器观察到相同的结果

Found Phys  
https://doi.org/10.1007/s10701-018-0169-9



## Objectivity in Quantum Measurement

Sheng-Wen Li<sup>1,2</sup> · C. Y. Cai<sup>1</sup> · X. F. Liu<sup>3</sup> ·  
C. P. Sun<sup>4</sup>

Received: 10 July 2017 / Accepted: 11 April 2018  
© Springer Science+Business Media, LLC, part of Springer Nature 2018

**Abstract** The objectivity is a basic requirement for the measurements in the classical world, namely, different observers must reach a consensus on their measurement results, so that they believe that the object exists “objectively” since whoever measures it obtains the same result. We find that this simple requirement of objectivity indeed

# 小结：波动力学与玻恩诠释

$$i\hbar \frac{d}{dt} \psi(x, t) = H\psi(x, t)$$

薛定谔方程

波函数

玻恩诠释（规则）

$|\psi(x, t)|^2 =$  发现粒子的几率密度

矩阵力学

不确定性关系  
 $\Delta Q \Delta P \geq \hbar/2$

奇妙的量子效应

# 哥本哈根诠释前后的量子力学

1、系统的量子态用满足薛定谔方程的波函数来表述（薛定谔）。可观察量用服从对易关系的厄米算符表示（海森堡、玻恩、约当，狄拉克）

2、量子系统的描述是概率性的。一个事件的发生概率是波函数的绝对值平方（玻恩），由此推导出不确定性原理（海森堡）

~~3、物质具有波粒二象性：根据互补原理（Complementarity principle），同一个实验可以展示出物质的粒子行为或波动行为，但不能同时展示（玻尔，海森堡）~~

~~4、测量仪器必须是经典的，它的数学描述是波包塌缩（玻尔、冯·诺依曼）~~

# 哥本哈根诠释前后的量子力学

- 1、系统的量子态用满足薛定谔方程的波函数来表述（薛定谔）。可观察量用服从对易关系的厄米算符表示（海森堡、玻恩、约当，狄拉克）
- 2、量子系统的描述是概率性的。一个事件的发生概率是波函数的绝对值平方（玻恩），由此推导出不确定性原理（海森堡）

无需“投影测量”或哥本哈根诠释的量子力学  
量子力学的最小概念框架  
预言BELL不等式描述的非定域现实

# 哥本哈根诠释引发了所谓的“量子测量问题”

