

注意由于我们研究零偏压的直流约瑟夫森效应，因此所使用的格林函数都是时间差 $t - t'$ 的函数。

此外，由于是零偏压情形下的平衡体系，因此可使用涨落耗散定理来化简格林函数计算。因此我们有关系 $G_{dL}^<(E) = -f(E)(G_{dL}^r(E) - G_{dL}^a(E))$ 和 $G_{RL}^<(E) = -f(E)(G_{RL}^r(E) - G_{RL}^a(E))$ ，其中 $f(E) = 1/\{\exp[(E - E_F)/k_B T] + 1\}$ 是费米狄拉克分布。电流表达式变为

$$I = \frac{-4e}{\hbar} \int \frac{dE}{2\pi} f(E) \text{Re}[(G_{dL}^r - G_{dL}^a)t_L + t^*(G_{RL}^r - G_{RL}^a)]_{11} \quad (4.3)$$

下面我们来计算推迟格林函数 $G_{dL}^r(E)$ 和 $G_{RL}^r(E)$ 。在Nambu表象下，未耦合的孤立超导导线和量子点的推迟格林函数写为[25]: $g_\alpha^r(E) = -\pi\rho(E) \begin{pmatrix} \beta(E) & \beta_0(E) \\ \beta_0(E) & \beta(E) \end{pmatrix}$ and $g_{dd}^r(E) = \begin{pmatrix} 1/(E - \varepsilon_d + i\eta) & 0 \\ 0 & 1/(E + \varepsilon_d + i\eta) \end{pmatrix}$ ，其中 $\rho(E)$ 是正常导线的态密度， η 是无穷小实数， $\beta_0(E) = \beta\Delta/E$ 。这里当 $|E| < \Delta$ 时， $\beta(E) = E/\sqrt{\Delta^2 - E^2}$ ；而当 $|E| > \Delta$ 时， $\beta(E) = i|E|/\sqrt{E^2 - \Delta^2}$ 。Nambu表象下耦合系数可表示 2×2 的矩阵： $t_\alpha = t_\alpha \begin{pmatrix} e^{i\theta_\alpha/2} & 0 \\ 0 & -e^{-i\theta_\alpha/2} \end{pmatrix}$ 和 $t_{LR} = t \begin{pmatrix} e^{i\varphi/2} & 0 \\ 0 & -e^{-i\varphi/2} \end{pmatrix}$ 。在以下的计算中，为了处于方便考虑，我们取左右导线与量子点之间的耦合相等 $t_L = t_R$ 。利用Dyson方程，孤立量子点的格林函数 \tilde{g}^r 写为： $\tilde{g}_{LL}^r = (g_L^{r-1} - t_{LR}g_R^r t_{LR}^*)^{-1}$ ， $\tilde{g}_{RR}^r = (g_R^{r-1} - t_{LR}^*g_L^r t_{LR})^{-1}$ ，其中 $\tilde{g}_{LR}^r = g_L^r t_{LR} \tilde{g}_{RR}^r = \tilde{g}_{LL}^r t_{LR} g_R^r$ 。整个体系的推迟格林函数写为： $G_{dL}^r = G_{dd}^r(t_L^* \tilde{g}_{LL}^r + t_R^* \tilde{g}_{RL}^r)$ ， $G_{RL}^r = \tilde{g}_{RL}^r + (\tilde{g}_{RR}^r t_R + \tilde{g}_{RL}^r t_L)G_{dd}^r(t_L^* \tilde{g}_{LL}^r + t_R^* \tilde{g}_{RL}^r)$ 和 $G_{dd}^r = (g_{dd}^{-1} - \Sigma^r)^{-1}$ 。推迟自能 Σ^r 表示为： $\Sigma^r = t_L^* \tilde{g}_{LL}^r t_L + t_R^* \tilde{g}_{RR}^r t_R + t_L^* \tilde{g}_{LR}^r t_R + t_R^* \tilde{g}_{RL}^r t_L$ 。

求解了推迟格林函数 G^r 以后，通过体系的约瑟夫森电流可以表示为：

$$I = \frac{-4e}{\hbar} \int \frac{dE}{2\pi} f(E) \text{Im} \left\{ \frac{2x\beta_0^2 \sin \varphi}{\mathcal{D}} - \frac{\Gamma\beta}{\Xi} (Q_{11}A_{11} + Q_{12}A_{12}) + \frac{\Gamma\sqrt{x}\beta^2 e^{-i\frac{\theta+\varphi}{2}}}{\mathcal{D}\Xi} [A_{11}^2 Q_{11} + A_{12}^2 Q_{22} + 2A_{11}A_{12}Q_{12}] \right\} \quad (4.4)$$

其中 $\mathcal{D} = 1 + x^2 + 2x(E^2 - \Delta^2 \cos \varphi)/(E^2 - \Delta^2)$ ，

$$\begin{aligned} \Xi &= [(E + i\eta)\mathcal{D} + \Gamma\beta(1 + x)]^2 \\ &- [\varepsilon_d \mathcal{D} - \Gamma\sqrt{x}(x - \beta^2) \cos \frac{\theta + \varphi}{2} \\ &- \Gamma\sqrt{x}\beta_0^2 \cos \frac{\theta - \varphi}{2}]^2 - \Gamma^2 \beta_0^2 [\cos \frac{\theta}{2} + x \cos(\frac{\theta}{2} + \varphi)]^2 \end{aligned} \quad (4.5)$$

这里 $x \equiv t^2 \pi^2 \rho^2$ 表示超导导线之间的直接耦合， $\Gamma \equiv 2\pi \rho t_\alpha^2$ 表示量子点和超导导线之间的耦合系数。在宽带近似下 x 和 Γ 都不依赖于能量 E 。方程4.5中的因

子A和Q表示如下:

$$\begin{cases} A_{11} = (1+x) + \frac{\sqrt{x}}{\beta}(x+\beta^2)e^{i\frac{\theta+\varphi}{2}} - \frac{\sqrt{x}}{\beta}\beta_0^2 e^{i\frac{\theta-\varphi}{2}} \\ A_{12} = -\frac{\Delta}{E}e^{i\theta/2}(1+xe^{i\varphi}) + 2i\sin\frac{\varphi}{2}\frac{\Delta}{E}\beta\sqrt{x} \\ A_{21} = \frac{\Delta}{E}e^{-i\theta/2}(1+xe^{-i\varphi}) - 2i\sin\frac{\varphi}{2}\frac{\Delta}{E}\beta\sqrt{x} \\ A_{22} = -(1+x) + \frac{\sqrt{x}}{\beta}(x+\beta^2)e^{-i\frac{\theta+\varphi}{2}} - \frac{\sqrt{x}}{\beta}\beta_0^2 e^{-i\frac{\theta-\varphi}{2}} \end{cases}$$

和

$$\begin{cases} Q_{11} = ED + \varepsilon_d D - \Gamma\beta\text{Re}(A_{22}) \\ Q_{12} = \Gamma\beta\text{Re}(A_{12}) \\ Q_{21} = \Gamma\beta\text{Re}(A_{12}) \\ Q_{22} = ED - \varepsilon_d D + \Gamma\beta\text{Re}(A_{11}) \end{cases}$$

方程4.5的第一项表示电子直接隧穿的贡献。第二项和第三项表示电子经过量子点和直接耦合臂的干涉项。事实上经过体系的约瑟夫森电流可以分成两部分: 能量处于超导能隙 Δ 外部的电子连续谱贡献的连续部分 I_{con} 和超导能隙 Δ 内部由Andreev束缚态贡献的离散部分 I_{dis} 。

数值计算中连续电流部分 I_{con} 通过对方程4.5的能量积分得到, 由于被积函数的分母包含了有限大小的虚部, 所以无穷小虚部 $i\eta$ 被忽略。而离散部分 I_{dis} , 被积函数的分母由一个实数加上一个无穷小虚部组成, 因此我们需要处理一个Delta函数的积分得到。使用积分技巧 $\lim_{E \rightarrow E_0} \int dE/f(E) = -i\pi/f'(E_0)$, 这里 E_0 是Andreev束缚态的位置, 它可以由数值计算得出且 $f(E_0) = 0$ 。通常电流的离散部分贡献要远大于连续部分的贡献。因子 Ξ 在能隙内有两对零点 $E_{1,2}^{\pm}$ ($E_{1,2}^+ = -E_{1,2}^-$), 这四个值就是Andreev束缚态的位置。这两对Andreev束缚态源于干涉环两个路径, 量子点和直接耦合臂中的束缚态的耦合, 它们分别是 E_{QD}^{\pm} 和 E_0^{\pm} 。其中 $E_0^{\pm} = \pm\Delta\sqrt{1 - \frac{4x}{(1+x)^2} \sin^2(\varphi/2)}$ 直接耦合臂的束缚态位置[26], 而 E_0^{\pm} 同时也是因子 D 的零点位置。 E_{QD}^{\pm} ($E_{QD}^+ = -E_{QD}^-$)是超导导线-量子点-超导导线体系的Andreev束缚态的能量值。

4.2.2 约瑟夫森电流-超导位相关系

从此节开始我们将给出数值计算的结果, 包括约瑟夫森电流-超导位相关系, 约瑟夫森电流跃变条件, 临界电流的Fano特征, 和临界电流对磁通的依赖关系。数值计算中我们取超导能隙做能量单位。

首先讨论一下通过AB-Fano干涉环的超导电流-位相关系 $I-\theta$ 。图4.1中我们给出了不同参数下的约瑟夫森电流-超导位相关系。当 $x = 0$ 时, 体系化简为

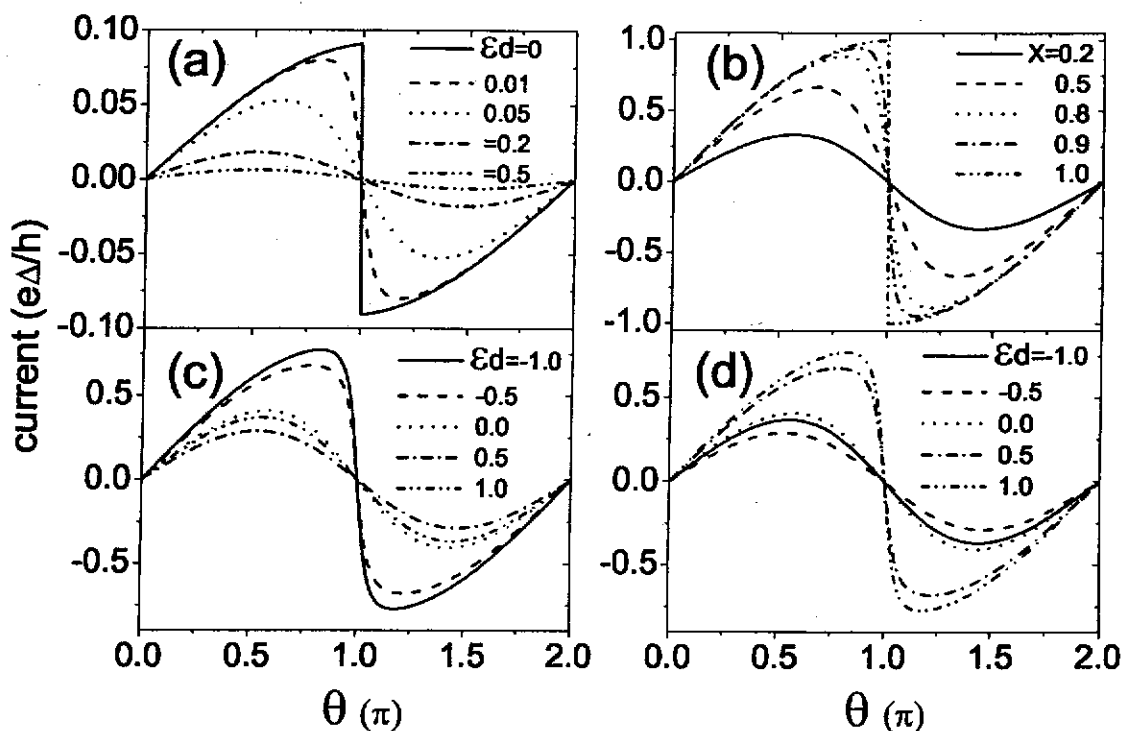


图 4.1 约瑟夫森电流 I 随超导位相 θ 在不同参数下的曲线: (a) $\Phi = 0, x = 0, \Gamma = 0.1$ 对不同量子点能级 ϵ_d ; (b) $\Phi = 0, \Gamma = 0$ 对不同耦合系数 x ; (c) 和 (d) $x = \Gamma = 0.5$, (c) 中 $\Phi = 0$, (d) 中 $\Phi = \pi$ 对不同量子点能级 ϵ_d .

一个量子点耦合在两个超导导线上。当 ϵ_d 远离费米面附近时, $I-\theta$ 关系是典型的正弦曲线, 而当 $\epsilon_d = 0$ 时, 如图 4.1 (a) 所示, 电流会在 $\theta = \pi$ 的地方有一个不连续的跳跃发生, 在此情况下, 量子点的一对 Andreev 束缚态在费米面简并 $E_{QD}^+ = E_{QD}^- = 0$ [27-29]。反之, 当 $\Gamma = 0$ 时, 体系变成了两个超导导线直接耦合的模型。如图 1 (b) 所示, $I-\theta$ 关系在耦合系数 x 远大于 1 或者远小于 1 时呈现正弦关系, 而在 $x = 1$ 时电流跳跃发生于 $\theta = \pi$, 此时一对 Andr 束缚态也在费米面简并: $E_0^+ = E_0^- = 0$ [10, 26]。当耦合系数 x 和 Γ 都不等于零的时候, AB-Fano 体系形成, 电子输运此时可以被干涉环中的磁通所控制。此时, 分别隶属于量子点和直接隧穿的两对 Andreev 束缚态, E_0^+ 和 E_{QD}^+ , 发生杂化, 从而形成两对新的束缚态 $E_{1,2}^{\pm}$ 。这两对束缚态承载了约瑟夫森电流的输运。此时, 电流-位相关系 $I-\theta$ 通常不是正弦关系 (某些特殊情况除外, 比如磁通位相 $\Phi = 0$ 和 π)。当 $\Phi = 0$ 和 π 时, $I-\theta$ 关系依然是正弦关系。在图 4.1 (c) 和 (d) 中我们给出了超导电流在 $\theta = 0$ 和 π 时的关系。在某些特殊的参数关系下, 电流的跳跃依然可以

发生，这一点我们会在后边详述。在这里我们从图4.1 (c) 和 (d) 中注意到了如下关系： $I(\epsilon_d, \Phi) = I(-\epsilon_d, \Phi + \pi)$ 。换句话说，如果我们把量子点能级从 ϵ_d 变为 $-\epsilon_d$ ，同时把磁通位相从 Φ 变为 $\Phi + \pi$ ，电流 I 不会发生任何变化。这个关系源于电子空穴对称性，换句话说，倘若在哈密顿中我们把 $(d_\sigma, d_{k\sigma, \alpha})$ 变成 $(\tilde{d}_\sigma, \tilde{d}_{k\sigma, \alpha}^\dagger)$ ，同时把参数 (ϵ_d, Φ) 变成 $(-\epsilon_d, \Phi + \pi)$ ，哈密顿 H 是不变的。

当磁通位相 Φ 不等于0或者 π 时，电流-位相关系通常不是正弦关系，而电流在 $\theta = 0$ 时也不等于零。再写特殊的参数条件下，电流会在 $\theta \in [0, \pi]$ 是取负值，这正是约瑟夫森 π 结的特性。比如，如果2 (a) 所示，通过适当的参数选择， $\epsilon_d = 0.5$ ， $\Gamma = 0.45$ ， $\Phi = 0.6\pi$ ， $x = 0.4 \sim 0.9$ ，电流就会在 $\theta \in [0, \pi]$ 时去负值。当时确切地讲，这并不是一个严格的约瑟夫森 π 结，因为电流并不是在区域 $\theta \in [\pi, 2\pi]$ 内都取正值[29]。由于磁通位相改变了原来电子的干涉关系，所以我们实现了近似约瑟夫森结的 π 结。在图4.2 (b) 中我们取 $\Phi = \pi/2$ ，得出的电流在大部分 $\theta \in [0, \pi]$ ($[\pi, 2\pi]$) 区域内是负的 (正的)。并且电流为负的位相取值区间并不等于电流为正的位相取值区间。在图4.2 (a) 的所有曲线个图4.2 (b) 的大部分曲线的电流为负的位相取值区间大于电流为正的取值区间。

然而，无论体系参数如何调节，电流为正的位相取值总是存在，换句话说，我们不可能让电流在全区间 $\theta \in [0, 2\pi]$ 内都去正值或者负值。此外，如图4.2 (b) 所示，当 $\epsilon_d = 0$ 时，电流-位相关系有一个跃变在 $\theta = \pi$ 处发生。我们将在后边详细讨论电流不连续的细节问题。

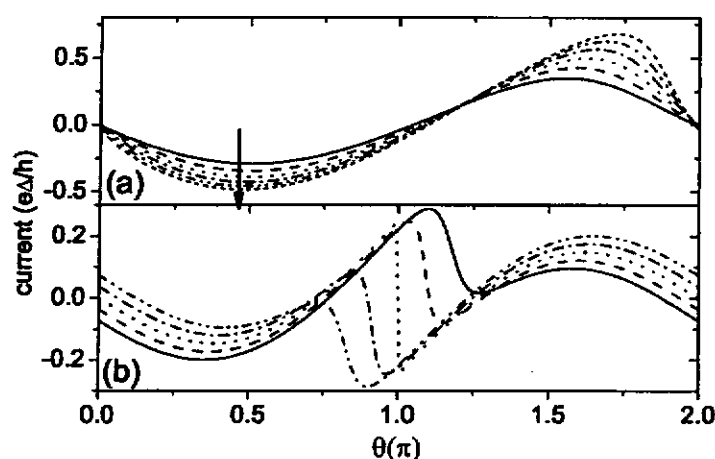


图 4.2 电流 I 随着位相 θ 在不同参数下的变化(a) $\epsilon_d = -0.5$ ， $\Gamma = 0.45$ ， $\Phi = 0.6\pi$ ， x 在图是箭头方向从0.4以0.1为间隔变到0.9；(b) $x = 0.5$ ， $\Gamma = 0.1$ ， $\Phi = 0.5\pi$ ， $\epsilon_d = -0.1$ (实线)， -0.05 (虚线)， 0 (点线)， 0.05 (虚线-点线间隔线)， 0.1 (虚线-点线-点线间隔线)。

4.2.3 电流跃变发生的条件

事实上，组成总电流的连续部分 I_{con} ($|E| > \Delta$)总是连续的。电流的不连续来源于Andr束缚态贡献的电流离散部分 I_{dis} 。当某一对Andreev束缚态 $E_{1,2}^{\pm}$ 与费米面持平时 $E_F = 0$ (亦即 $E_i^+ = E_i^- = 0$)，电流的离散部分 I_{dis} 就会发生跳跃，从而总的电流 $I = I_{con} + I_{dis}$ 也有一个跃变。跃变的条件是 $\Xi(E = 0) = 0$ 。当 $E = 0$ 时， $\beta = 0$ ， $\beta_0 = 1$ ，所以方程4.5中的 Ξ 变为：

$$\Xi = - [\epsilon_d D - \Gamma x \sqrt{x} \cos \Phi - \Gamma \sqrt{x} \cos(\theta - \Phi)]^2 - \Gamma^2 [\cos(\theta/2) + x \cos(2\Phi - \theta/2)]^2$$

因此条件 $\Xi(E = 0) = 0$ 化简为：

$$\begin{cases} \epsilon_d D - \Gamma x \sqrt{x} \cos \Phi - \Gamma \sqrt{x} \cos(\theta - \Phi) = 0 \\ \Gamma [\cos \frac{\theta}{2} + x \cos(2\Phi - \theta/2)] = 0 \end{cases} \quad (4.6)$$

当以上两个条件满足时，电流不连续的跳跃就会发生。比如，(1)当 $\Gamma = 0$ 时，方程4.6变为 $x = 1$ 且 $\theta = \pi$ 。这个情形和图4.1 (b) 中描述的符合；(2)当 $x = 0$ 时，方程4.6变为 $\epsilon_d = 0$ 且 $\theta = \pi$ ，这则与图4.1 (a) 的描述吻合。通常情况下 x 和 Γ 都不为零，此时方程4.6变成：

$$\theta = -2 \arctan \left[\frac{1 + x \cos 2\Phi}{x \sin 2\Phi} \right] \quad (4.7)$$

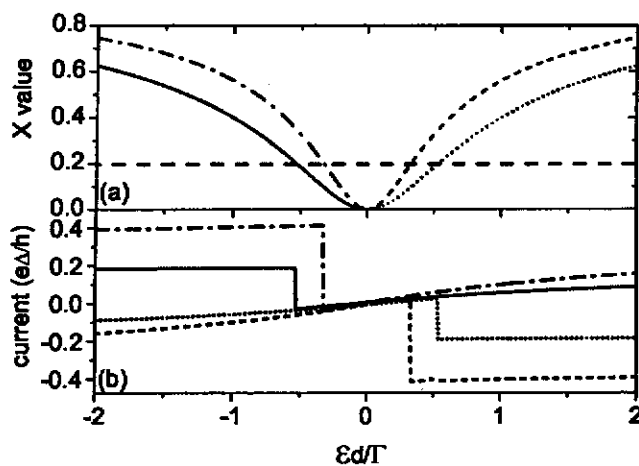


图 4.3 上图：参数空间 $(x, \epsilon_d/\Gamma)$ 电流跃变发生的条件。曲线从左到右依次为 $\Phi = 0.1\pi, 0.3\pi, 0.7\pi, 0.9\pi$ 。下图：电流 I 随着量子点能级 ϵ_d 的变化，其它参数为 $x = 0.2, \theta = -2 \arctan[(1 + x \cos 2\Phi)/(x \sin 2\Phi)]$ 。不同曲线对应的磁通位相的取值 Φ 与上图一致。

and

$$\varepsilon_d = -\frac{\Gamma\sqrt{x}\cos\Phi}{1-x} \quad (4.8)$$

特别地, 当 $\Phi = \pi/2$, 我们有 $\theta = \pi$ 和 $\varepsilon_d = 0$, 这与图4.2 (b) 描述的情形一致。图4.3中我们给出了在参数空间 (x, ε_d) 电流跃变发生的条件。当体系的参数选择处在图4.3 (a) 的曲线上时, 电流跳跃就会发生。图4.3 (b) 给出了电流随着量子点能级 ε_d/Γ 的关系其它参数为 $x = 0.2$ 和 $\Gamma = 0.5$ 。它清楚地表明对于图4.3 (a) 上曲线和横线的交点上的参数所导致的电流的跳跃。

4.2.4 临界电流的Fano特征

在实验上, 约瑟夫森结可以测到的是临界电流, 因此在这一小节中我们重点讨论临界电流的性质。事实上, 我们研究的体系和加上小偏压的正常电流通过的AB-Fano干涉环有一定的相似特征。为此, 我们先回忆一下正常电流通过AB-Fano干涉环的性质。电子通过此体系的隧穿系数 T 可以用类似于我们上述体系的参数来描述为[4, 6]:

$$T(E) = \frac{4x}{(1+x)^2} + \frac{4\Gamma(1-x)\sqrt{x}\cos\Phi}{(1+x)^3} \text{Re}G^r(E) - \frac{\Gamma[(1+x)^2 - 4x(1+\cos^2\Phi)]}{(1+x)^3} \text{Im}G^r(E) \quad (4.9)$$

其中 $G^r(E) = E - \varepsilon_d + \Gamma\sqrt{x}\cos\Phi/(1+x) - i\Gamma/(1+x)$ 是耦合后的量子点的推迟格林函数, 其它参数 $(\varepsilon_d, \Gamma, \Phi, x)$ 的意思与我们上述超导模型的意思一致。从方程4.9, 我们得到隧穿系数干涉增强发生于:

$$\varepsilon_d = -\frac{\Gamma\sqrt{x}\cos\Phi}{1-x} \quad (4.10)$$

而干涉相消发生于:

$$\varepsilon_d = \frac{(1+x\cos 2\Phi)\Gamma}{2\sqrt{x}(1+x)\cos\Phi} \quad (4.11)$$

在这里我们得到的干涉相长的条件与我们在超导-AB-超导体系统中用来描述超导电流跳跃的方程4.8是一致的。其中正常体系的曲线 $I-\varepsilon_d$ 当 $x = 0$ 是一个对称结构, 而当 x 不为零, 磁通位相 $\Phi = 0$ 时, 表现出明显的非对称Fano特征。此外 $I-\varepsilon_d$ 曲线可以被磁通位相 Φ 所影响, 当 $\Phi = \pi/2$ 时, 曲线是对称的[6]。

接下来我们研究约瑟夫森临界电流通过AB-Fano干涉环的性质。在数值计算中, 我们取在位相差 θ 一个位相周期 2π 内电流的最大值作为临界电流。由于电子通过两条路径的干涉效应, 电子隧穿系数能实现干涉相长或者干涉相消, 临界电流 I_c 随着量子点能级 ε_d 通常会显示出Fano特征。为了研究Fano效应的细节, 我们在图4.4 (a) (b) 中当磁通位相 $\Phi = 0$ 时分别对于小 x 值和大的 x 给出了临界电

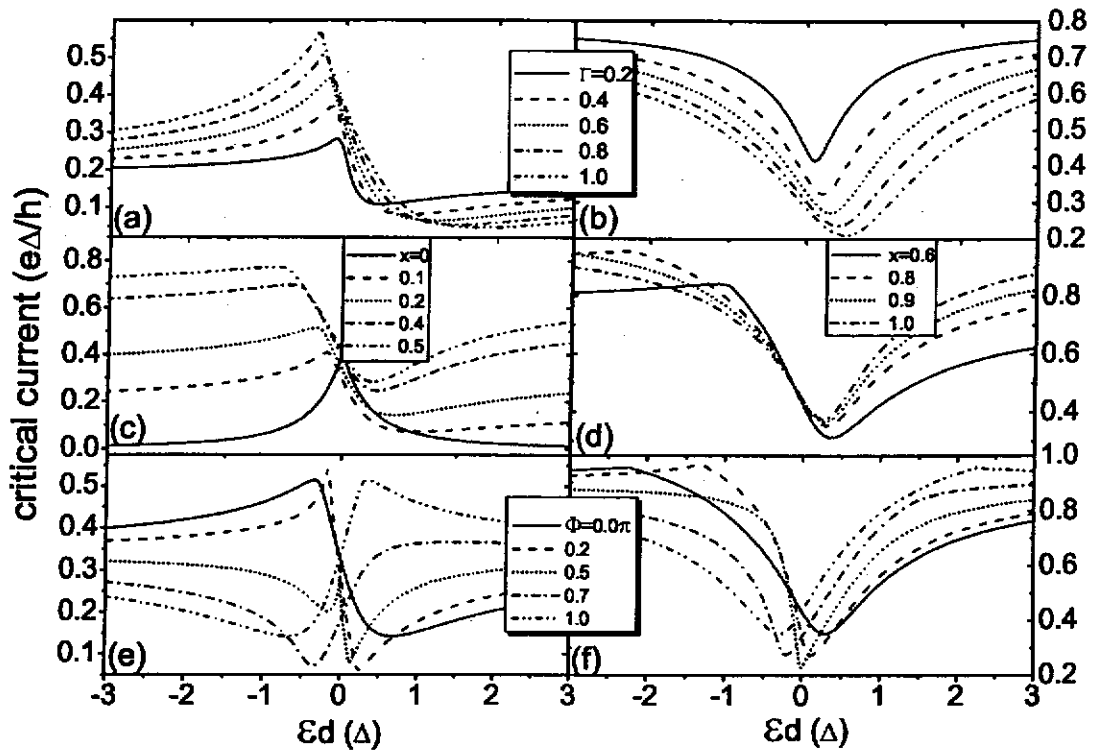


图 4.4 临界电流 I_c 随着 ϵ_d 在不同参数下的变化 (a) $x=0.1, \Phi=0$; (b) $x=1.0, \Phi=0$; (c) 和 (d) $\Gamma = 0.5, \Phi=0$; (e) $\Gamma = 0.5, x = 0.2$; (f) $\Gamma = 0.5, x = 0.8$.

流 I_c 随量子点能级 ϵ_d 的变化曲线。对于小 x 情形 (比如 $x = 0.1$)， I_c 为一个典型的 Fano 共振曲线，其中峰值位置对应于 $\epsilon_d = -\Gamma\sqrt{x}/(1-x)$ ，而波谷位置则对应于 $\epsilon_d = \Gamma/(2\sqrt{x})$ 。波峰和波谷的位置分别与方程 4.10 和 4.11 描述的位置吻合。而两个体系描述的物理过程则不同，前者是零偏压下约瑟夫森临界电流，而后者则描述普通电流在小偏压下的输运性质。事实上，即便通过以上两个体系的电流一个是超导电流一个是普通电流，在 AB 环内发生输运散射的电子都是正常的单电子而非库柏对。在约瑟夫森结中，库柏对从超导导线中由于 Andreev 散射的存在非分成两个孤立的电子进入干涉环。两个体系中电子在干涉环内的干涉和散射行为是一样的。所以我们就为此两个体系中得到相似的干涉行为而不感到奇怪了。随着 Γ 取值的增大， $I_c-\epsilon_d$ 曲线表现出更多的 Breit-Wigner 对称线形特征，临界电流的大小在 ϵ_d 为负的时候增大，在 ϵ_d 为正的时候减小。是对于较大的 x 取值，(比如 $x = 1.0$ ，如图 4.4 (b) 所示)，干涉相消效应占了主导地位， $I_c-\epsilon_d$ 曲线对于小的 Γ 值是对称的且在 $\epsilon_d = \Gamma/2$ 处有一个显著的 Fano 谷。当 $x = 1.0$ 时，如方程 4.10 所

描述的, Fano峰被移到了无穷远处, 所以我们在图4.4 (b) 中看不到峰结构的出现。随着 Γ 的进一步增大, 经过量子点的透射几率进一步增大, 两个路径的干涉相消发生, 从而谷的位置更低, 而 $I_c-\epsilon_d$ 曲线更加不对称。

接下在我们研究直接隧穿系数 x 对临界电流 I_c 的影响。在图4.4 (c) 和 (d) 中, 我们给出了临界电流 I_c 在不同 x 值下随着量子点能级 ϵ_d 的变化曲线, 其它参数为 $\Gamma = 0.5$, $\Phi = 0$ 。当 $x = 0$ 时, 直接耦合被关闭, 临界电流 I_c 随 ϵ_d 的曲线完全是一个对称图形, 且对称中心为 $\epsilon_d = 0$, 而谷的位置 $\epsilon_d = \infty$, 这与方程4.10和4.11的描述一致。当 x 增加时, 峰的位置从费米面 $E_F = 0$ 开始偏离, 而谷的位置从无穷远处向费米面移动, $I_c-\epsilon_d$ 曲线开始显示出Fano特征。当 x 取值较大时, 曲线的Fano特征是最明显的。当 x 接近于1时, 直接耦合被完全打开, 峰的位置被移动到无穷远处, $I_c-\epsilon_d$ 也变成了对称谷的形状。

在上述的 $I_c-\epsilon_d$ 关系讨论中, 我们取了磁通位相 Φ 为零。在正常电流通过AB-Fano干涉环时, $I-\epsilon_d$ 关系会被磁通位相 Φ 所调制。因此以下我们讨论约瑟夫森电流通过AB-Fano干涉环的 $I_c-\epsilon_d$ 的曲线为磁通位相 Φ 的影响。在图4.4 (e) 和 (f) 中我们分别给出了 $I_c-\epsilon_d$ 在 $\Gamma > x$ 和 $\Gamma < x$ 两种情况下的关系。 $\Gamma > x$ 和 $\Gamma < x$ 这两种情况分别对应于是量子点还是直接隧穿在输运中处于主导位置。当 $\Gamma > x$ 时, $I_c-\epsilon_d$ 关系强烈地受到磁通位相 Φ 的调制。当磁通位相 Φ 由0增加时, Fano线形变得更加明显, 但是峰值在 $\pi/2$ 时被明显削弱, 随着 Φ 的进一步增大, 如图4.4 (e) 所示, Fano峰开始增大, Fano线形在 $\Phi = \pi$ 时再次变得非常明显。反之, 当 $\Gamma < x$ 时, 如图4.4 (f) 所示, $I_c-\epsilon_d$ 曲线则不会被 Φ 的变化明显改变。我们强调以下三点: (1) 临界电流 I_c 符合以下关系: $I_c(\epsilon_d, \Phi) = I_c(-\epsilon_d, \Phi + \pi)$, 这个关系源于电子空穴的对称性和关系 $I(\epsilon_d, \Phi) = I(-\epsilon_d, \Phi + \pi)$ 。由于关系 $I_c(\epsilon_d, \Phi) = I_c(-\epsilon_d, \Phi + \pi)$ 的成立, 临界电流 I_c 在 $\epsilon_d = 0$ 时是磁通位相 Φ 的周期函数, 且周期为 π 。(2) 当 $\Phi = \pi/2$ 时, 临界电流-位相关系 $I_c-\epsilon_d$ 依然是非对称的, 这与正常电流通过的AB-Fano体系性质不同; (3) 在电流通过的正常Fano体系中, 透射电流总可以在适当参数下干涉相消取得零值, 然而约瑟夫森临界电流在干涉相消时总不会取得零值。

4.2.5 临界电流-磁通位相关系

最后我们来研究临界电流 I_c 随磁通位相 Φ 变化的关系。在图4.5中, 我们给出了临界电流 I_c 在 $\epsilon_d = 0$ 时, 对不同 x 值随着磁通位相 Φ 的关系。图中有以下几个明显特征: (1) 临界电流 I_c 在 $\epsilon_d \neq 0$ 时随着磁通位相 Φ 呈现周期函数且周期为 2π , 在 $\epsilon_d = 0$ 时以 π 为周期; (2) 对于小 x 值, 由于直接耦合几乎被关闭, 临界电流 I_c 随 Φ 变化几乎是个常数。而对于较大 x 值, $I_c-\Phi$ 曲线也开始振荡剧烈。然而由

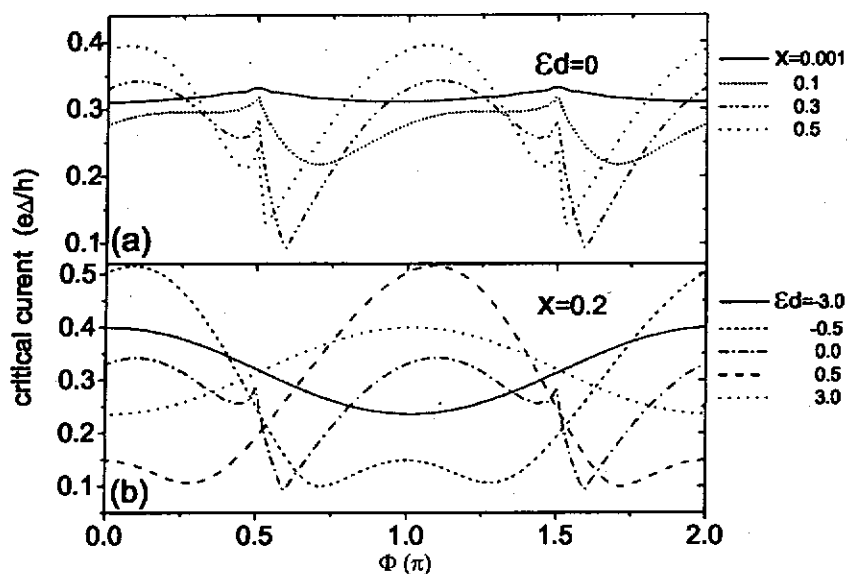


图 4.5 上图: 临界电流 I_c 在不同参数 x 下随着磁通位相 Φ 的变化。其它的参数为 $\epsilon_d = 0$, $\Gamma = 0.5$ 。下图: 临界电流 I_c 在不同量子点能级 ϵ_d 下随磁通位相 Φ 的变化。其它参数为 $x = 0.2$, $\Gamma = 0.5$ 。

于 $\epsilon_d = 0$, 高阶的散射影响强烈, I_c - Φ 曲线并非正弦或者余弦函数; (3) 临界电流 I_c 在 $\Phi = (2n + 1)\pi/2$ 处有峰值; 其中 n 为整数, 这与方程4.7和4.10的描述相同。

图4.5 (b) 中我们给出了临界电流 I_c 当 $x = 0.2$ 时对于不同量子点能级 ϵ_d 随磁通位相 Φ 的变化。当 ϵ_d 远离费米面, I_c - Φ 表现为标准的 $\sin \Phi$ 或 $\cos \Phi$ 行为, 这是应为对于小的 x 值和 $|\epsilon_d| \gg 0$, 电子在干涉环内的高阶散射被抑制。但是对于 ϵ_d 取正值和取负值的临界电流 I_c 却差一个位相 π 。此为相差源于量子点的隧穿系数位相 θ_{QD} 。当 $\epsilon_d \gg 0$ 时, $\theta_{QD} = \pi/2$, 而当 $\epsilon_d \ll 0$ 时, $\theta_{QD} = -\pi/2$ 。当 ϵ_d 接近费米面时, I_c - Φ 曲线振荡加剧, 逐渐偏离 $\sin \Phi$ 或 $\cos \Phi$ 图像, 峰值出现在 $\Phi = \pi/2$ 和 $3\pi/2$ 处。

4.3 约瑟夫森电流通过T型量子点的Fano效应

在这一节, 我们先给出研究体系的哈密顿以及用非平衡格林函数方法推到电流表达式的详细过程。随后给出主要的数值结果, 包括电流-位相关系, Andreev束缚态-位相关系, 临界电流的干涉增强和干涉相消, 以及临界电流的Fano效应。

4.3.1 模型和公式

如图4.6所示, 我们考虑一个T型双量子点结构连接在两根超导导线上, 量子点1分别以耦合系数 t_L , t_R 直接耦合于左右两个超导导线, 量子点2则以耦合系数 t_c 直接耦合于量子点1上。体系的哈密尔顿可表示为几部分之和:

$$H = \sum_{\alpha=L,R} H_{\alpha} + \sum_{i=1,2} H_i + H_t \quad (4.12)$$

其中 H_{α} 和 H_i 分别是第 α 超导导线和第 i 量子点的哈密尔顿。 H_t 是耦合项, 包括量子点1和超导导线之间的耦合以及两个量子点之间的耦合。方程4.12的第一项表示为:

$$\begin{aligned} H_{\alpha} &= \sum_{k\sigma} \epsilon_k C_{k\sigma,\alpha}^{\dagger} C_{k\sigma,\alpha} \\ &\quad + \sum_k \Delta (C_{k\downarrow,\alpha} C_{-k\uparrow,\alpha} + C_{-k\uparrow,\alpha}^{\dagger} C_{k\downarrow,\alpha}^{\dagger}) \\ H_i &= \sum_{\sigma} \epsilon_i d_{i\sigma}^{\dagger} d_{i\sigma} \\ H_t &= \sum_{k,\sigma,\alpha} (t_{\alpha} e^{\frac{i\theta_{\alpha}}{2}} C_{k\sigma,\alpha}^{\dagger} d_{1\sigma} + t_{\alpha} e^{-\frac{i\theta_{\alpha}}{2}} d_{1\sigma}^{\dagger} C_{k\sigma,\alpha}) \\ &\quad + t_c (d_{1\sigma}^{\dagger} d_{2\sigma} + d_{2\sigma}^{\dagger} d_{1\sigma}) \end{aligned} \quad (4.13)$$

这里 Δ 和 θ_{α} 分别是超导电极的能隙和位相。如前一节的做法, 我们对体系的哈密尔顿作么正变换[15], 可将超导位相 θ_{α} 转移到方程4.13中的耦合系数 H_t 上去。我们考虑单能级的量子点, 所以 ϵ_i 表示第 i 个量子点的能级。我们在此忽略量子点之间的电子-电子相互作用。事实上, 如果体系所处的环境温度高度量子点的近藤温度, 电子-电子相互作用只会是电子能谱展宽, 而不会会我们计算的结果有显著的影响。

仿照前一节的做法, 我们对 α 导线内的粒子数 $N_{\alpha} = \sum_{k\sigma} C_{k\sigma,\alpha}^{\dagger} C_{k\sigma,\alpha}$ 做时间的导数来得到电流[18, 19],

$$\begin{aligned} I_{\alpha} &= -e \langle \dot{N} \rangle \\ &= \frac{4e}{\hbar} \text{Re} \int \frac{dE}{2\pi} t_{\alpha} e^{\frac{i\theta_{\alpha}}{2}} G_{1\alpha,11}^{<}(E) \end{aligned} \quad (4.14)$$

这里推迟格林函数 $G_{1\alpha}^{<}(E)$ 是 $G_{1\alpha}^{<}(t-t')$ 的傅里叶变换, 在Nambu表象下

$$G_{1\alpha}^{<}(t-t') \equiv i \sum_k \begin{pmatrix} \langle C_{k\uparrow,\alpha}^{\dagger}(t') d_{1\uparrow}(t) \rangle \langle C_{-k\downarrow,\alpha}(t') d_{1\downarrow}(t) \rangle \\ \langle C_{k\uparrow,\alpha}^{\dagger}(t') d_{1\downarrow}^{\dagger}(t) \rangle \langle C_{-k\downarrow,\alpha}(t') d_{1\downarrow}^{\dagger}(t) \rangle \end{pmatrix}$$

在平衡条件下同样使用涨落耗散定理 $G_{1\alpha}^{<} = -f(E)(G_{1\alpha}^r(E) - G_{1\alpha}^a(E))$ 我们可以化简计算。

使用Dyson方程, 耦合推迟格林函数 $G_{1\alpha}^r(E)$ 可以写为 $G_{1\alpha}^r = G_1^r t_{\alpha}^* g_{\alpha}^r$, 而量子

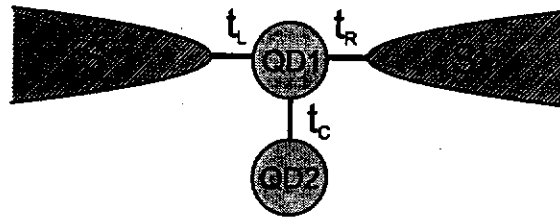


图 4.6 T型双量子点示意图：量子点1分别以耦合系数 t_L 和 t_R 直接连接在两个超导导线上，量子点2以耦合系数 t_c 连接在量子点1上。

点1的格林函数 G_1^r 可以由 $G_1^r = (g_1^{-1} - \Sigma^r)^{-1}$ 得到。其中推迟自能 $\Sigma^r = t_L^* g_L^r t_L + t_R^* g_R^r t_R + t_c^* g_2^r t_c$ 包含了量子点1和左右导线以及量子点2的耦合。为出于表述及计算的方便考虑，我们假定 $t_L = t_R$ ， $\theta_L = -\theta_R = \theta/2$ 。

最后我们得到了电流的表达式：

$$I_\alpha = \frac{-2e}{\hbar} \int \frac{dE}{2\pi} f(E) \frac{\beta_0^2 \Gamma^2 \sin \theta}{\text{Im}\{B\}} \quad (4.15)$$

其中 $B = (E - \frac{Et_c^2}{E^2 - \epsilon_1^2} + i\Gamma\beta)^2 - (\epsilon_1 + \frac{\epsilon_2 t_c^2}{E^2 - \epsilon_2^2})^2 - \Gamma^2 \beta_0^2 \cos^2 \frac{\theta}{2}$ 线宽函数 $\Gamma \equiv 2\pi\rho t_\alpha^2$ 在宽带近似下与能量无关，包含了量子点1和左右导线以及量子点2的耦合。

4.3.2 约瑟夫森电流和Andreev束缚态与超导位相关系

自本小节开始，我们将给出主要的数值计算结果，包括约瑟夫森电流-位相关系，与之对应的Andreev束缚态-位相关系，临界电流的干涉增强与干涉相消以及临界电流的Fano特征。

在图4.7中，在不同的参数下，我们给出了电流-位相关系 ($I-\theta$) 和相应的Andreev束缚态-位相关系 ($E_i^\pm-\theta$)。这两个关系由关系 $I_{dis} = -\frac{2e}{\hbar} \sum_{i,\pm} f(E_i^\pm) \frac{\partial E_i^\pm}{\partial \theta}$ 连接[20, 39]。由于能隙内的Andreev束缚态关于费米面对称，为此我们在此只显示了半个能隙内的束缚态 $[-\Delta, 0]$ 。首先，我们去掉量子点2的耦合，在图4.7中给出了超导-量子点-超导的电流-位相关系。当 $\epsilon_1 = 0$ 时，电流-位相关系 $I-\theta$ 在 $\theta = \pi$ 处有不连续的跳跃发生，同时，Andreev束缚态在 $\pm E_0$ 处简并[22-24]。如图4.7 (c) 所示，当考虑量子点2的耦合时， $I-\theta$ 关系通常是正弦曲线，且当 t_c 增加时电流被抑制。在此情况下，Andreev束缚态离开费米面 $E_F = 0$ ，这样共振隧穿被破坏，体系电流被抑制[见图4.7 (d)]。在图4.7 (e) 中，我们

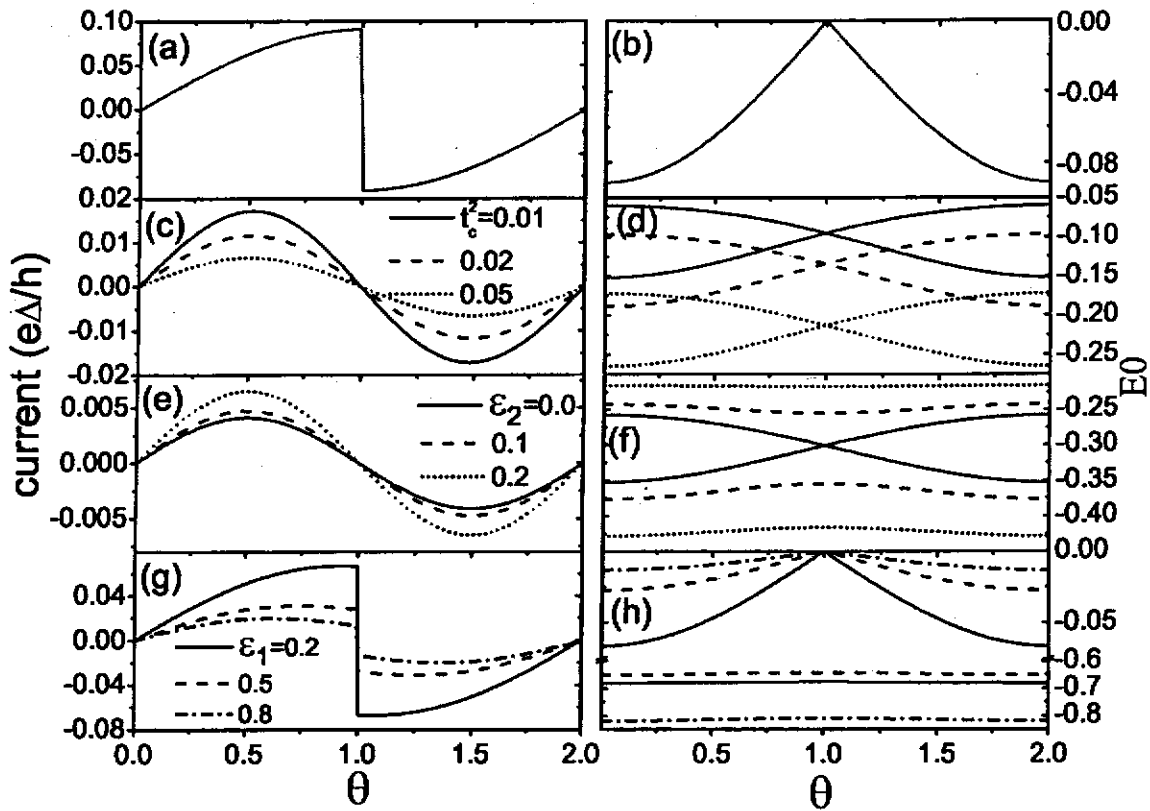


图 4.7 左图: 约瑟夫森 I 随超导位相 θ 在不同参数下的曲线: (a) $t_c = 0$, $\Gamma = 0.1$, $\varepsilon_1 = 0$; (c) $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$, $\Gamma = 0.1$ 对于不同 t_c ; (e) $\varepsilon_1 = 0$, $\Gamma = t_c^2 = 0.1$ 对不同 ε_2 取值; (g) $\Gamma = t_c^2 = 0.1$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ 满足 $\varepsilon_1 \varepsilon_2 = t_c^2$ 。右图: Andreev 束缚态随超导位相 θ 的变化曲线, 所取参数与左边相同。

给出了 $I - \varepsilon_2$ 关系。当 ε_2 远离费米面时, 电流增强, 它表明当 $\varepsilon_2 = 0$ 时, 电流是被抑制的。当 $\varepsilon_2 = 0$ 时, Andreev 束缚态在 $\theta = \pi$ 处交叉, 然而当 ε_2 远离费米面时, Andreev 束缚态开始分开。最后, 在图 4.7 (g) 中, 当量子点能级和量子点间的耦合系数满足 $\varepsilon_1 \varepsilon_2 = t_c^2$ 时, 电流在 $\theta = \pi$ 处跳跃。在此条件下, 与其对应的 Andreev 束缚态于图 4.7 (b) 非常相似: 有一对 Andreev 束缚态在 $E = 0$ 处简并, 承载电流的束缚态在 $\theta - \pi$ 时交换, 从而电流方向也改变[25]。我们可以从 B 的表达式中经分析而得到。考虑 Andreev 束缚态简并于 $E = 0$, 通过求解 $B(E = 0) = 0$, 我们可以轻易得到如下关系:

$$\varepsilon_1 \varepsilon_2 = t_c^2, \theta = \pi \quad (4.16)$$

通过对比正常电流和超导电流通过 T 型双量子点体系, 我们得到正常体系中的线性电导的极大值满足条件于方程 4.16 一致。事实上, 该体系中 Andreev 束缚态的位置在弱耦合到超导导线上时于孤立的双量子点分子的能级一致 $\varepsilon^\pm = [(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \pm \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + 4t_c^2}]/2$ [13]。

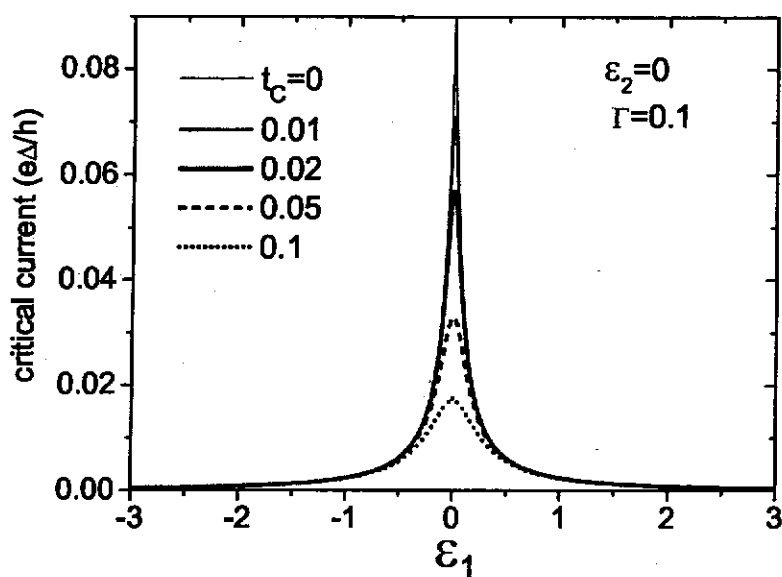


图 4.8 $\varepsilon_2 = 0$ 时, 临界电流 I_c 随 ε_1 在不同 t_c 去之下的变化。

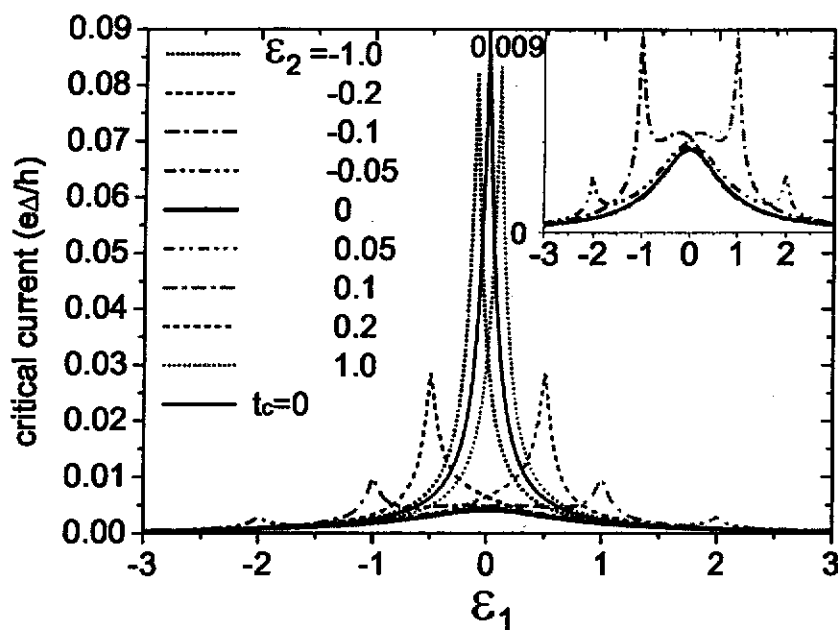


图 4.9 临界电流在不同 ε_2 时随 ε_1 的变化曲线, 其它参数为 $t_c^2 = \Gamma = 0.1$ 。我们也加入参数 $t_c = 0$ 的曲线以作比较。嵌入图: $\varepsilon_2 = 0, \pm 0.05, \pm 0.1$ 对应的放大图。

4.3.3 临界电流的干涉效应

接下来我们研究通过T型量子点的临界电流。在图4.8中我们给出了当 $\varepsilon_2 = 0$ 时, I_c 在不同量子点间的耦合系数 t_c 下随 ε_1 的变化曲线。 I_c 在 $\varepsilon_1 = 0$ 处有一个对称的峰结构, 当 t_c 增大时, 电流的峰值被强烈的抑制了。这个结果可以由电子的干涉效应来理解: 当 ε_1 和费米面持平时, 电子很容易通过体系。然而当量子点2连接上且 $\varepsilon_2 = E_F = 0$ 时, 通过量子点1的电子倾向于停留在量子点2内, 于是电流被抑制。所以当量子点2的能级 ε_2 接近费米面时, 量子点2相当于一个强散射的杂质。

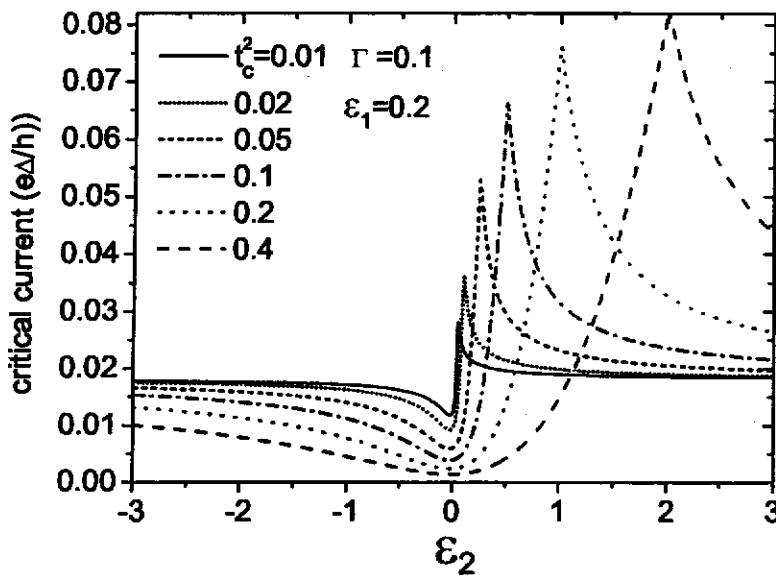


图 4.10 临界电流随量子点能级 ε_2 在不同量子点间耦合参数 t_c 下的曲线。其它参数为 $\varepsilon_1 = 0.2$, $\Gamma = 0.1$ 。

图4.9给出了不同 ε_2 下 I_c - ε_1 关系, 同时我们也画出了 $t_c = 0$ 的曲线以作比较。对于给定 t_c , 当 $\varepsilon_2 = 0$ 时, I_c 在 $\varepsilon_1 = 0$ 处有一峰。当 ε_2 远离费米面, 电子干涉增强效应明显, 结果电流有一个明显的峰出现, 且原来位于 $\varepsilon_1 = 0$ 的峰变得不明显了。新出现的峰的位由方程4.16来计算。当 ε_2 逐渐远离费米面, 或者换句话说, 当量子点2逐渐脱离量子点1的耦合时, 电流-位相关系 I_c - ε_1 逐渐变到单个量子点模型(亦即, $t_c = 0$ 对应情形)。

4.3.4 临界电流的Fano效应

下面我们来研究临界电流的Fano效应。图4.10给出了不同量子点间耦合系数时的 $I_c-\varepsilon_2$ 关系。 $I_c-\varepsilon_2$ 曲线在 $\varepsilon_1 \neq 0$ 时显现出明显的Fano非对称结构。正如方程4.16描述的， $I_c-\varepsilon_2$ 曲线在 $\varepsilon_2 = 0$ 处有一明显的Fano谷。随着 t_c 的增大，干涉相长和干涉相消效应更加明显。此时，Fano谷的位置依然处于 $\varepsilon_2 = 0$ ，但是谷处的临界电流更小了，而Fano峰值逐渐远离，临界电流的峰值也更大了。

最后我们发现量子点1的能级可以调制Fano线形，就像Fano干涉环模型中的磁通位相作用一样。图4.11给出了 $I_c-\varepsilon_2$ 关系在不同 ε_1 时的曲线。曲线在 $\varepsilon_2 = 0$ 处有一个谷，也有一个峰在 $\varepsilon_2 = t_c^2/\varepsilon_1$ 处。特别地，通过改变 ε_1 ，Fano峰的位置可以被调制。此外，同上节我们注意到的一样，由于电子空穴对称性，电流满足关系 $I_c(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = I_c(-\varepsilon_1, -\varepsilon_2)$ 。

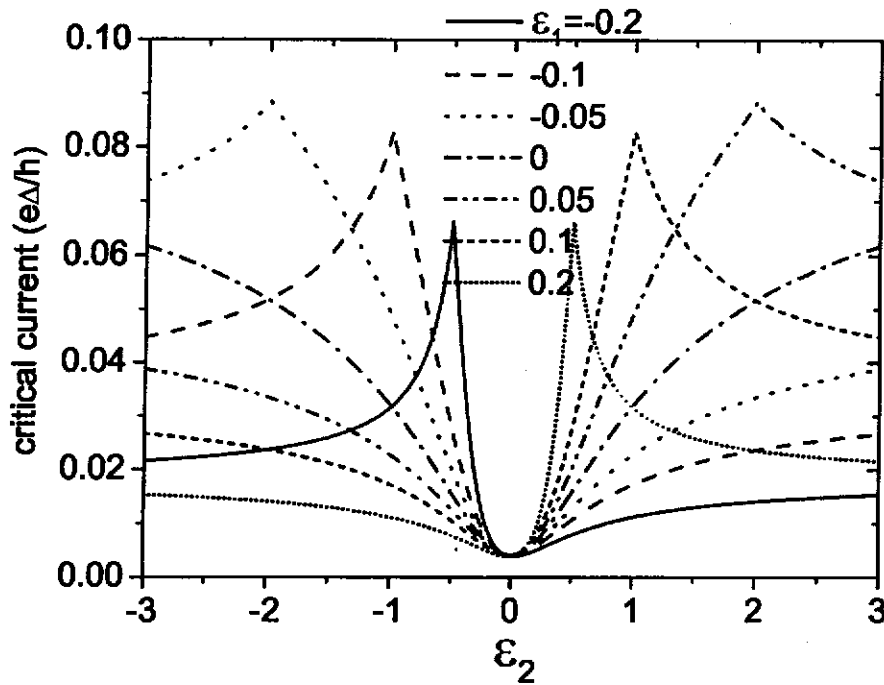


图 4.11 临界电流随 ε_2 在不同量子点能级 ε_1 取值的曲线。其它参数为 $t_c^2 = 0.1$, $\Gamma = 0.1$ 。

4.4 小结

本章中，我们研究了约瑟夫森电流通过两种不同量子点Fano体系的输运性质，包括电流-位相关系，Andreev束缚态-位相关系，临界电流的干涉效应以及临界电流Fano效应。

第一，我们研究了约瑟夫森电流通过含有一个量子点在一臂的Aharonov-Bohm干涉环，且有磁通通过干涉环。我们分析了电流公式，给出了约瑟夫森电流跳跃的精确表达式。特别地，我们发现超导电流不连续的条件，临界电流的峰值条件以及临界电流干涉相消的条件都是一致的。通过调节体系的参数（磁通位相，直接耦合系数），约瑟夫森结可实现 π 结。我们还发现，临界电流的Fano特征和所对应正常电流通过的体系颇为相似，但也有所不同。比如，正常体系的电流在干涉相消处总可以取零值，而约瑟夫森电流在干涉相消处在任何参数下都是正值。此外，当量子点能级与费米面持平时，临界电流随着磁通位相的变化为周期函数且周期为 π ，而当量子点能级远离费米面时，周期为 2π 。

第二，我们研究了约瑟夫森电流通过T型双量子点体系。我们通过改变两个量子点的能级和量子点之间的耦合系数来改变约瑟夫森电流。当 $\varepsilon_1\varepsilon_2 = t_c^2$ 时，电流干涉增强发生，而当 $\varepsilon_2 = 0$ 时，电流干涉相消发生。连接电流随 ε_2 变化呈现Fano共振线形且共振线形由 ε_1 来决定。此外由于电子空穴对称性，约瑟夫森临界电流满足关系 $I_c(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = I_c(-\varepsilon_1, -\varepsilon_2)$ 。

参考文献

- [1] U. Fano, *Effects of Configuration Interaction on Intensities and Phase Shifts*, Phys. Rev. **124**, 1866 (1961).
- [2] K. Kobayashi, H. Aikawa, S. Katsumoto, Y. Iye, *Tuning of the Fano Effect through a Quantum Dot in an Aharonov-Bohm Interferometer*, Phys. Rev. Lett. **88**, 256806 (2002); K. Kobayashi, H. Aikawa, S. Katsumoto, Y. Iye, *Mesoscopic Fano effect in a quantum dot embedded in an Aharonov-Bohm ring*, Phys. Rev. B **68**, 235304 (2003); K. Kobayashi, H. Aikawa, A. Sano, S. Katsumoto, Y. Iye, *Fano resonance in a quantum wire with a side-coupled quantum dot*, Phys. Rev. B **70**, 035319 (2004).
- [3] A. C. Johnson, C. M. Marcus, M. P. Hanson, A.C. Gossard, *Coulomb-Modified Fano Resonance in a One-Lead Quantum Dot*, Phys. Rev. Lett. **93**, 106803 (2004).
- [4] B. R. Bulka, P. Stefański, *Fano and Kondo Resonance in Electronic Current through Nanodevices*, Phys. Rev. Lett. **86**, 5128 (2001); W. Hofstetter, J. König, H. Schoeller, *Kondo Correlations and the Fano Effect in Closed Aharonov-Bohm Interferometers*, Phys. Rev. Lett. **87**, 156803 (2001).
- [5] R. Schuster, E. Buks, M. Heiblum, D. Mahalu, V. Umansky, Hadas Shtrikman, *Phase measurement in a quantum dot via a double-slit interference experiment*, Nature, **385**, 417 (1997); A. Yacoby, M. Heiblum, D. Mahalu, H. Shtrikman, *Coherence and Phase Sensitive Measurements in a Quantum Dot*, Phys. Rev. Lett. **74**, 4047 (1995); G. Hackenbroich, H. A. Weidenmüller, *Transmission through a Quantum Dot in an Aharonov-Bohm Ring*, Phys. Rev. Lett. **76**, 110 (1995).
- [6] A. Fuhrer, P. Brusheim, T. Ihn, M. Sigrist, K. Ensslin, W. Wegscheider, M. Bichler, *Fano effect in a quantum-ring - quantum-dot system with tunable coupling*, Phys. Rev. B **73**, 205326 (2006); A. Ueda, M. Eto, *Resonant tunneling and Fano resonance in quantum dots with electron-phonon interaction*, Phys. Rev. B **73**, 235353 (2006).
- [7] Q.-F. Sun, J. Wang, H. Guo, *Electronic spectrum of a two-dimensional quantum dot array in the presence of electric and magnetic fields in the Hall configuration*, Phys. Rev. B **71**, 165310 (2005).
- [8] C. Ishii, *Josephson Currents through Junctions with Normal Metal Barriers*, Prog. Theor. Phys. **44**, 1525 (1970); J. Bardeen, J. L. Johnson, *Josephson Current Flow in Pure Superconducting-Normal-Superconducting Junctions*, Phys. Rev. B **5**, 72 (1972).
- [9] M. Hurd, G. Wendin, *Andreev level spectrum and Josephson current in a superconducting ballistic point contact*, Phys. Rev. B **49** 15258, (1994).

- [10] P. F. Bagwell, *Suppression of the Josephson current through a narrow, mesoscopic, semiconductor channel by a single impurity*, Phys. Rev. B **46**, 12573 (1992).
- [11] B. J. van Wees, K. M. H. Lenssen, C. J. P. M. Harmans, *Transmission formalism for supercurrent flow in multiprobe superconductor-semiconductor-superconductor devices*, Phys. Rev. B **44**, 470 (1991); Li-Fu Chang, Philip F. Bagwell, *Control of Andreev-level occupation in a Josephson junction by a normal-metal probe*, Phys. Rev. B **55**, 12678 (1997); Q.-F. Sun, J. Wang, T.-h. Lin, *Control of the supercurrent in a mesoscopic four-terminal Josephson junction*, Phys. Rev. B **62**, 648 (2000).
- [11] E. Vecino, A. Martín-Rodero, A. L. Yeyati, *Josephson current through a correlated quantum level: Andreev states and π junction behavior*, Phys. Rev. B **68**, 035105 (2003); Mahn-Soo Choi, Minchul Lee, Kicheon Kang, W. Belzig, *Kondo effect and Josephson current through a quantum dot between two superconductors*, Phys. Rev. B **70**, 020502(R) (2004).
- [13] L. N. Bulaevskii, V.V. Kuzii, A. A. Sobyenin, *Superconducting system with weak coupling to the current in the ground state*, JETP Lett. **25**, 290 (1977).
- [12] V.V. Ryazanov, V. A. Oboznov, A.Yu. Rusanov, A.V. Veretennikov, A. A. Golubov, J. Aarts, *Coupling of Two Superconductors through a Ferromagnet: Evidence for a π Junction*, Phys. Rev. Lett. **86**, 2427 (2001).
- [13] S. M. Frolov, D. J. Van Harlingen, V. V. Bolginov, V. A. Oboznov, V. V. Ryazanov, *Josephson interferometry and Shapiro step measurements of superconductor-ferromagnet-superconductor $0-\pi$ junctions*, Phys. Rev. B **74**, 020503(R) (2006).
- [14] A. Bauer, J. Bentner, M. Aprili, M. L. Della-Rocca, M. Reinwald, W. Wegscheider, C. Strunk, *Spontaneous Supercurrent Induced by Ferromagnetic π Junctions*, Phys. Rev. Lett. **92**, 217001 (2004).
- [15] Y. Zhu, W. Li, T.-h. Lin, Q.-F. Sun, , Phys. Rev. B **66**, 134507 (2002); Q.-F. Sun, H. Guo, J. Wang, *Microwave-induced π -junction transition in a superconductor/quantum dot/superconductor structure*, Phys. Rev. B **65**, 075315 (2002); Y. Zhu, Q.-F. Sun, T.-h. Lin, *Probing spin states of coupled quantum dots by a dc Josephson current*, Phys. Rev. B **66**, 085306 (2002).
- [18] F. Siano, R. Egger, *Josephson Current through a Nanoscale Magnetic Quantum Dot*, Phys. Rev. Lett. **93**, 047002 (2004).
- [19] Jordan A. van Dam, Yuli V. Nazarov, Erik P. A. M. Bakkers, Silvano De Franceschi, Leo P. Kouwenhoven, *Supercurrent reversal in quantum dots*, Nature **442**, 667 (2006).

- [20] Z.-Y. Zhang, *Fano effect on Josephson current*, J. Phys.: Condens. Matter **17** 4637 (2005); F. Dolcini, F. Giazotto, *Switching the sign of Josephson current through Aharonov-Bohm interferometry*, Phys. Rev. B **75**, 140511(R) (2007).
- [39] A. Golub, Y. Avishai, *Fano effect of a strongly interacting quantum dot in contact with a superconductor*, Phys. Rev. B **69**, 165325 (2004).
- [22] Q.-F. Sun, B.-G. Wang, J. Wang, T.-H. Lin, *Electron transport through a mesoscopic hybrid multiterminal resonant-tunneling system*, Phys. Rev. B **61**, 4754 (2000).
- [23] N. S. Wingreen, Antti-Pekka Jauho, Y. Meir, *Time-dependent transport through a mesoscopic structure*, Phys. Rev. B **48**, 8487 (1993).
- [24] N. S. Wingreen, K. W. Jacobsen, J.W. Wilkins, *Inelastic scattering in resonant tunneling*, Phys. Rev. B **40**, 11834 (1989).
- [25] Q.-F. Sun, J. Wang, T.-H. Lin, *Resonant Andreev reflection in a normal-metal - quantum-dot - superconductor system*, Phys. Rev. B **59**, 3831 (1999); *Photon-assisted Andreev tunneling through a mesoscopic hybrid system*, **59**, 13126 (1999).
- [26] C. W. J. Beenakker, *Universal limit of critical-current fluctuations in mesoscopic Josephson junctions*, Phys. Rev. Lett. **67**, 3836 (1991).
- [27] C. W. J. Beenakker, H. van Houten, *Single-Electron Tunneling and Mesoscopic Devices*, edited by H. Koch, H. Lübbig (Springer, Berlin, 1992), pp. 175.
- [28] I. A. Devyatov, M. Yu. Kupriyanov, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **112**, 342 (1997) [JETP **85**, 189 (1997)].
- [29] A. A. Golubov, M. Yu. Kupriyanov, E. Il'ichev, *The current-phase relation in Josephson junctions*, Rev. Mod. Phys. **76**, 411 (2004).
- [30] A. Bachtold, C. Strunk, J. P. Salvetat, J. M. Bonard, L. Forró, T. Nussbaumer and C. Schönberger, *Aharonov-Bohm oscillations in carbon nanotubes*, Nature (London) **397**, 673, (1999).
Y. Ji, M. Heiblum, D. Sprinzak, D. Mahalu and H. Shtrikman, *Phase Evolution in a Kondo-Correlated System*, Science **779** 290 (2000).
- [31] Y. Ji, M. Heiblum and H. Shtrikman, *Transmission Phase of a Quantum Dot with Kondo Correlation near the Unitary Limit*, Phys. Rev. Lett. **88** 076601, (2002).
- [32] W. G. van der Wiel, S. De Franceschi, T. Fujisawa, J. M. Elzerman, S. Tarucha and L. P. Kouwenhoven, *The Kondo Effect in the Unitary Limit*, Science **289**, 2105 (2000).
- [33] T. Hatano, M. Stopa and S. Tarucha, *Single-Electron Delocalization in Hybrid Vertical-Lateral Double Quantum Dots*, Science **309**, 268 (2005).

- [34] A. D. Güçlü, Q.-F. Sun and H. Guo, *Kondo resonance in a quantum dot molecule*, *Phys. Rev. B* **68** 245323 (2003).
- [35] B. H. Wu, J. C. Cao and K.-H. Ahn, *Transport through a strongly correlated quantum dot with Fano interference*, *Phys. Rev. B* **72** 165313 (2005).
- [36] Y. S. Liu, X. F. Yang, X. H. Fan and Y. J. Xia, *Transport properties of a Kondo dot with a larger side-coupled noninteracting quantum dot*, *J. Phys.: Condens. Matter* **20**, 135226 (2008).
- [37] P. S. Cornaglia and D. R. Grempel, *Strongly correlated regimes in a double quantum dot device*, *Phys. Rev. B* **71** 075305 (2005).
- [38] T. Tanamoto and Y. Nishi, *Fano-Kondo effect in a two-level system with triple quantum dots*, *Phys. Rev. B* **76** 155319 (2007).
- [39] J. Bardeen, R. Kümmel, A. E. Jacobs and L. Tewordt, *Structure of Vortex Lines in Pure Superconductors*, *Phys. Rev* **187** 556 (1969).

第五章 二维电子气中的Nernst效应和自旋Nernst效应

摘要：本章中我们研究了在一个四端口二维电子气中，横向温度差产生纵向电压差或者自旋流的效应，即Nernst效应和自旋Nernst效应。我们考虑一个存在Rashba自旋轨道耦合，并在垂直方向上有磁场通过的四端口二维电子气体体系。在自旋轨道耦合强度为零时，Nernst系数 N_e 随着磁场的倒数曲线 $N_e - 1/B$ 在费米能级于朗道能级齐平的时候会出现峰值。当自旋轨道强度不为零时， $N_e - 1/B$ 曲线峰值劈裂，而自旋Nernst系数 N_s 也出现，且随着 $1/B$ 呈现振荡行为。当自旋轨道耦合强度越大或磁场越弱时， N_s 越明显。结果表明 N_e 和 N_s 都非常敏感于体系的边界条件和电子密度。此外，我们还发现Nernst效应比自旋Nernst效应更能抵抗体系的电子无序。

5.1 引言

一些类似于Hall效应的新现象，即横向的驱动产生纵向的电流，在凝聚态领域一直都能引起广泛的兴趣。其中两个著名的例子，整数和分数量子Hall效应，在过去的三十年中被广泛的研究着，直到今天，仍然是凝聚态物理的研究热点。最近，另外一种Hall效应，自旋Hall效应引起了研究者的极大热情[1, 2]。自旋Hall效应是说在存在Rashba自旋轨道耦合的二维电子气上，横向的电压产生纵向的自旋流。除了大量的理论研究文章，一些非常优秀的实验也报道在这个领域的发现。到目前为止，Rashba自旋轨道耦合虽然是相对论效应，却确实存在于一些半导体中，而且Rashba耦合强度在实验上还可以通过门电压来调节[3, 4]。特别地，自旋Hall效应在实验上可以通过观测样品两端的自旋积累来研究[5, 6]。

Nernst效应是一种类似于Hall效应的热电效应，它是说在存在磁场的情况下，用横向的温度差产生纵向的电压或者电流。电子系统的热电系数（包括Seebeck系数和Nernst系数）比电导更能反映体系的电子态密度[7-9]。而态密度性质对于制造电子器件是非常重要的。但是对于低维系统或者纳米器件，比起输运性质来，热电系数却比较难以测量。但是随着近二十年来纳米技术和低维测量技术长足的进步，人们如今可以测量低维体系的热电系数了[10, 11]。最近，有关于量子点热电系数的报道表明处于近藤区的量子点的热电系数与半经典的Mott关系有着明显的偏离[10, 11]。人们研究了金属铋的热电效应发现当费米面于朗道能级齐平的时候，Nernst系数就形成一个峰[13]。同时还有一些关于Nernst效应不尽详尽的理论研究[12]。

本章中，我们研究了存在Rashba自旋轨道耦合以及有垂直磁场通过的二维电子气体体系的Nernst效应和自旋Nernst效应。我们首次提出并研究了一种类似于

自旋Hall效应的效应，自旋Nernst效应。自旋Nernst效应表明横向的温度差 ΔT 会导致纵向的自旋流。比起自旋Hall效应，自旋Nernst系数更敏感于体系的电子态密度[7-9]。我们研究的体系如图5.1 (a)所示，它由一个正方形的区域连接在其上的四条半无穷长导线组成。横向温度差 ΔT 存在于导线1和3之间。存在垂直于二维面的磁场时，这个温度差在纵向引起电压差 V_H ，而存在Rashba自旋轨道耦合时，会在纵向引起自旋流 J_{sH} 。利用紧束缚模型和Landauer-Buttiker (LB)公式，使用格林函数方法，我们得到了Nernst系数 N_e ($N_e \equiv V_H/\Delta T$)和自旋Nernst系数 N_s ($N_s \equiv J_{sH}/\Delta T$)。没有Rashba耦合时，当费米能级 E_F 于朗道能级齐平时，Nernst系数 N_e 有峰出现，而自旋Nernst系数 N_s 为零，这与实验上的观测一致[13]。存在Rashba自旋轨道耦合时，朗道能级劈裂，从而每个Nernst系数峰劈裂成两个峰，同时自旋Nernst系数 N_s 变得不为零，且随磁场的倒数呈现一系列的振荡结构。 N_s 的值随着Rashba系数的增大或者磁场的减弱而增强，反之亦然。最后我们发现，与自旋Nernst系数相比，Nernst系数更能抵抗电子无序的干扰。

5.2 体系介绍及方法公式

在紧束缚模型下，我们所研究的体系的哈密顿表示为：[13]，

$$\begin{aligned}
 H = & -t \sum_{i\sigma} [c_{i+\delta x,\sigma}^\dagger c_{i\sigma} e^{-im\theta} + c_{i+\delta y,\sigma}^\dagger c_{i\sigma} + H.c.] \\
 & + \sum_{i\sigma} \varepsilon_i c_{i\sigma}^\dagger c_{i\sigma} - V_R \sum_{i\sigma\sigma'} [c_{i+\delta y,\sigma}^\dagger (i\sigma_x)_{\sigma\sigma'} c_{i\sigma'} \\
 & - c_{i+\delta x,\sigma}^\dagger (i\sigma_y)_{\sigma\sigma'} c_{i\sigma'} e^{-im\theta} + H.c.] \quad (5.1)
 \end{aligned}$$

其中 $c_{i\sigma}^\dagger$ ($c_{i\sigma}$)是格点 $i = (n, m)$ 处自旋为 σ 的电子的产生(湮灭)算符。 $t = \hbar^2/(2m^*a^2)$ 是格点之间的隧穿系数，其中 a 为格点常数， δx 和 δy 分别是沿着 x 和 y 方

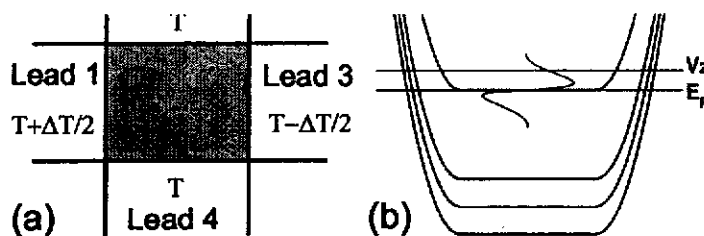


图 5.1 (a) 四端口二维电子气体体系示意图：左右两端口1, 3之间加有温度差 ΔT ；(b) 中间区朗道能级示意图，红色线表示费米能级 E_F ，黑色线表示所加电压差 V_2 。结果费米面的振荡线表示两端费米分布的差 $f_1(E) - f_2(E)$ 。

向的单位长度。 ϵ_i 是格点的同位占据能,在干净系统中,它处处为零。然而在存在电子无序的系统中, ϵ_i 在中间区为一个均匀分布 $[-W/2, W/2]$ 。方程5.1的最后一项是电子Rashba自旋轨道耦合项, V_R 表征它的强度。为了避免自旋流定义的分歧,我们在导线2, 4端口令 $V_R = 0$ 。位相指标 $\theta = ea^2B/h$ 来源于垂直二维面的磁场 B 。在此我们忽略了磁场的Zeeman效应¹。在某些二维电子气系统中Zeeman非常的小,可以忽略。而电子-电子相互作用在载流子浓度较大的样品中也可以忽略。

通过端口 p 的电流 $J_{p\sigma}$ ($\sigma = \uparrow, \downarrow$) 可由Landauer-Büttiker公式得到: [13]

$$J_{p\sigma} = \frac{1}{\hbar} \sum_{q \neq p} \int dE T_{p\sigma, q}(E) [f_p(E) - f_q(E)] \quad (5.2)$$

其中 $T_{p\sigma, q}(E)$ 是自旋为 σ 的电子从端口 q 到端口 p 的隧穿系数, E 是入射电子能量。隧穿系数可由以下计算得到: $T_{p\sigma, q}(E) = \text{Tr}[\Gamma_{p\sigma} G^r \Gamma_q G^a]$, 这里 $\Gamma_{p\sigma}(E) = i(\Sigma_{p\sigma}^r - \Sigma_{p\sigma}^{\dagger})$ 是线宽函数, $\Gamma_q = \Gamma_{q\uparrow} + \Gamma_{q\downarrow}$, $\Sigma_{p\sigma}^r$ 是推迟自能。格林函数为: $G^r(E) = [G^a(E)]^\dagger = \{EI - H_0 - \sum_{p\sigma} \Sigma_{p\sigma}^r\}^{-1}$, 其中 H_0 是中心区的哈密顿。方程5.2中的 $f_p(E)$ 是端口 p 的电子的费米分布, $f_p(E) = 1/\{\exp[(E - E_F - V_p)/k_B T_p] + 1\}$, V_p 表示 p 端口的电压, T_p 表示 p 端口的温度。得到 p 端口的粒子流表达式 $J_{p\sigma}$ 后, 电流可以表示为 $J_{pe} = e(J_{p\uparrow} + J_{p\downarrow})$, 自旋流可以表示为 $J_{ps} = (\hbar/2)(J_{p\uparrow} - J_{p\downarrow})$ 。

现在我们在端口1, 3之间存在着一个小的温度梯度 ΔT 但是没有电压差。我们可以取两端口的温度为 $T_1 = T + \Delta T/2$, $T_3 = T - \Delta T/2$, $T_2 = T_4 = T$, 电压为 $V_1 = V_3 = 0$ 。考虑边界条件 $J_{2e} = J_{4e} = 0$, 这样就可以得到纵向的电压 V_2 和 V_4 , 最后总可以得到Nernst系数的表达式 $N_e = (V_2 - V_4)/\Delta T$ 。在不存在电子无序的均匀体系中 N_e 表示为:

$$N_e = \frac{1}{eT} \frac{\int dE (T_{21} - T_{23})(E - E_F) f(1-f)}{\int dE (T_{21} + T_{23} + 2T_{24}) f(1-f)}, \quad (5.3)$$

这里 $T_{2p} = T_{2\uparrow, p} + T_{2\downarrow, p}$ 。此外, 我们通过边界条件 $V_2 = V_4 = 0$ 来得到2, 4端口的自旋流 J_{2s} 和 J_{4s} 。同样的, 在不存在电子无序的均匀系统中, 由于体系的对称性关系可以得到 $J_{2s} = -J_{4s}$ 。在存在电子无序的系统中, 在某种电子无序下 J_{2s} 可能不等于 $-J_{4s}$, 但是在统计平均下, $J_{2s} = -J_{4s}$ 依然成立。自旋Nernst系数定义为: $N_s \equiv J_{2s}/\Delta T$, 其详细表达式为:

$$N_s = \frac{1}{4\pi} \int dE (\Delta T_{23} - \Delta T_{21}) \frac{E - E_F}{k_B T^2} f(1-f), \quad (5.4)$$

这里 $\Delta T_{2p} = T_{2\uparrow, p} - T_{2\downarrow, p}$ 。低温极限下, ($T \rightarrow 0$), Nernst系数 N_e 和自旋Nernst系

¹倘若考虑Zeeman效应, 图5.2中的Nernst系数峰就会劈裂, 同时会产生自旋Nernst效应。Zeeman效应和Rashba自旋轨道耦合导致的两种振荡结构就会体现在自旋Nernst系数 N_s 中。这样的行为与自旋Hall效应相似, 在自旋Hall效应中, 也可以观察到这样两种振荡结构。参考Y. Xing, Q.-F. Sun, and J. Wang, Phys. Rev. B 77, 115346 (2008)

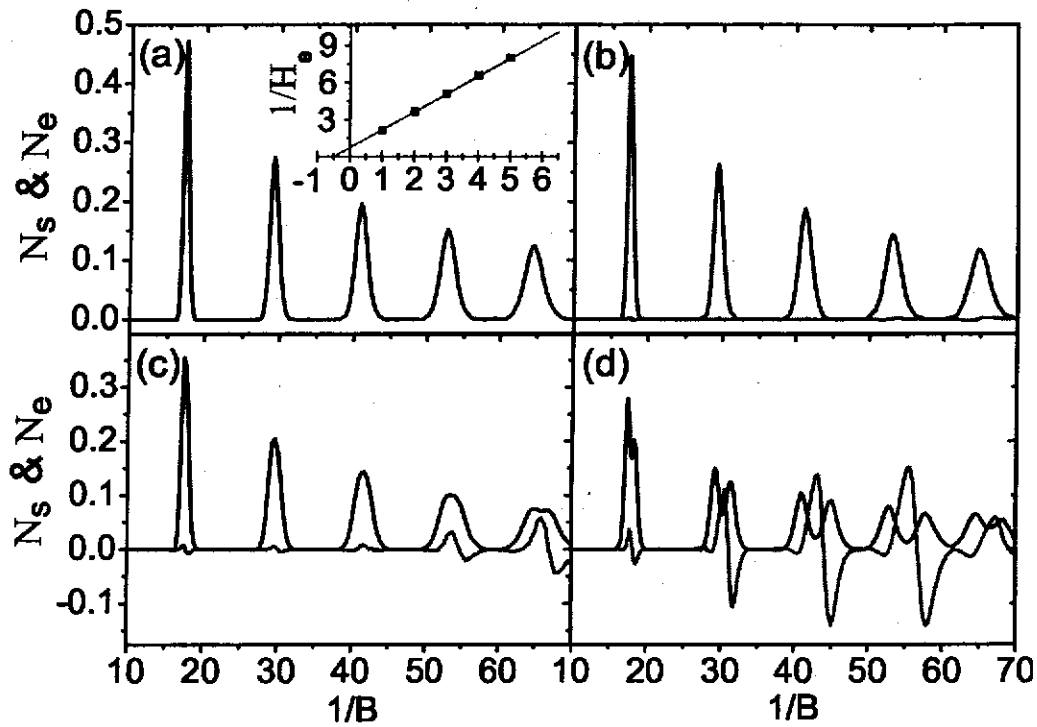


图 5.2 Nernst 系数 N_e (黑色线) 和自旋 Nernst 系数 N_s (红色线) 随着 $1/B$ 在不同 $V_R = 0$ 参数下的变化曲线, 各个图的 $V_R = 0$ 参数为: (a) 0, (b) 0.02, (c) 0.05, (d) 0.1. 其它参数为 $E_F = -3$, 体系尺寸为 $L = 40a$, $T = 0.01$. 图 (a) 的嵌入图表示图 (a) 中 N_e 峰值 N th 随峰的数目变化, 拟合线为 $(N + \frac{1}{2})/\ln 2 - N$.

数 N_s 通常和温度是线性关系。然而当 $\frac{\partial E}{\partial(T_{21} - T_{23})}|_{E=E_F} = 0$ ($\frac{\partial E}{\partial(\Delta T_{21} - \Delta T_{23})}|_{E=E_F} = 0$) 时, 或者说当 $T_{21} - T_{23}$ ($\Delta T_{21} - \Delta T_{23}$) 在 $E = E_F$ 处不连续时, N_e (N_s) 和温度无关。

5.3 数值计算及结果讨论

在数值计算中, 我们取 $t = \hbar^2/(2m^*a^2)$ 为能量单位, $\frac{e}{\hbar}a^2$ 为磁场单位。取电子的有效质量为 $m^* = 0.05m_e$, 晶格常数为 $a = 12.5\text{nm}$ 时, t 大约是 5meV , $B = 1$ 大约对应于磁场强度 4.2T , $V_R = 0.1t$ 对应于试验上 Rashba 自旋轨道耦合 $\alpha = 1.25 \times 10^{-11}\text{eV} \cdot \text{m}$ 。在此我们考虑中间区是正方形的, 中间区的大小为 $L = 40a$ 或 $L = 20a$ 。温度取 $T = 0.01$, 大概相当于温度 1K 。

图 5.2 我们给出了干净系统中 Nernst 系数 N_e 和自旋 Nernst 系数 N_s 随着 $1/B$ 在不同 Rashba 自旋轨道耦合强度 V_R 下的变化曲线。当 $V_R = 0$ 时, N_s 为零, 而 N_e 出现一系列的峰结构。 N_e 当费米面 E_F 和朗道能级对齐的时候形成一个峰, 而当费米面位于两个相邻的朗道能级时, N_e 非常小。峰的间距为 $e\hbar/(m^*E_F^*)$, 其

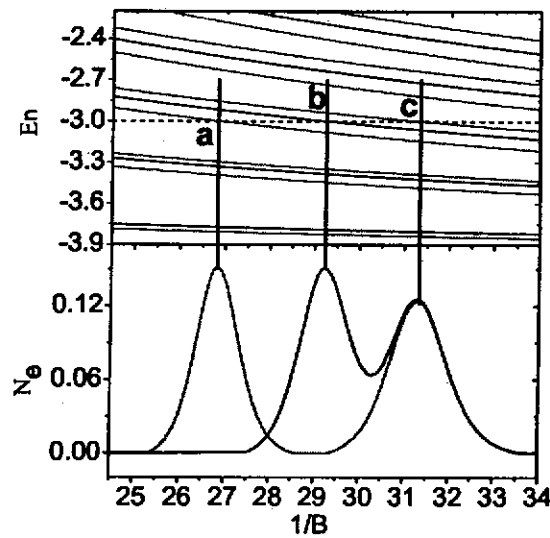


图 5.3 上图：朗道能级 E_n 随 $1/B$ 在 $V_R = 0$ （黑线）和 0.1 （红线）。蓝色点线为费米面 E_F ；（下图） N_e 随 $1/B$ 在导线2, 4的Rashba自旋轨道耦合为 0 （黑色线）和 0.1 （红色线）。其他参数为 $E_F = 1.0$, $V_R = 0.1$, $L = 20a$, $T = 0.01$ 。

中 $E_F^* = E_F + 4t$ 费米面到带底 $-4t$ 的距离。Nernst系数 N_e 的高度的倒数 H_e 随着峰的数目 N 是线性关系： $H_e \propto N + 1/2$ （如图5.2.2a插入图所示）。接下来我们用图5.1b来解释这个结果。在强磁场下，隧穿系数 $T_{23}(E)$ 和 $T_{24}(E)$ 通常是零，而 $T_{21}(E)$ 是整数。那么方程5.2就有以下近似关系： $J_{2e} = (e/h) \int dE T_{21}(E) [f_2(E) - f_1(E)]$ 。由于温度梯度的关系， $f_2 - f_1$ 在 E_F 附近是一个振荡关系（如图5.1b所示）。位于费米面 E_F 上面和下面的电子对热电流 J_{2e} 的贡献相反。当所有的朗道能级远离 E_F 时， T_{21} 在 E_F 附近几乎是常数，流进和流出端口1的电流彼此抵消，导致在 $V_2 = 0$ 时 $J_{2e} = 0$ 。反之，当有 N 个朗道能级位于 E_F 以下但是有一个朗道能级正好位于 E_F 时（如图5.1b所示），在 $V_2 = 0$ 时，1端口有一个净剩电流 J_{2e} 。此时，需要提升 V_2 使得 $J_{2e} = 0$ 来满足边界条件，因此 V_2 正比于 $1/(2N + 1)$ ，事实上，如果假定 $T_{32} = T_{42} = 0$ 且 T_{21} 为整数（磁场较大时的情况），从方程5.2出发我们可以解析地得到Nernst系数的峰高和峰的数目的关系： $H_e = \frac{k_B}{e} \ln 2 / (N + 1/2)$ 。这个结果和二维系统的热导系数关系完全相同[14]。

存在Rashba自旋轨道耦合时（ $V_R \neq 0$ ），朗道能级开始劈裂。结果Nernst系数 N_e 也开始劈裂，而原来等于零的自旋Nernst系数（在 $V_R = 0$ 时） N_s ，开始出现（如图5.2所示）。Rashba自旋轨道耦合越强或者磁场越弱时，劈裂越明显。 N_e 系数左子峰的位置与朗道能级齐平，而右子峰的位置与朗道能级位置不同。为了清楚地表现这个关系，我们在图5.3中给出了图5.2d的放大图和与之对应

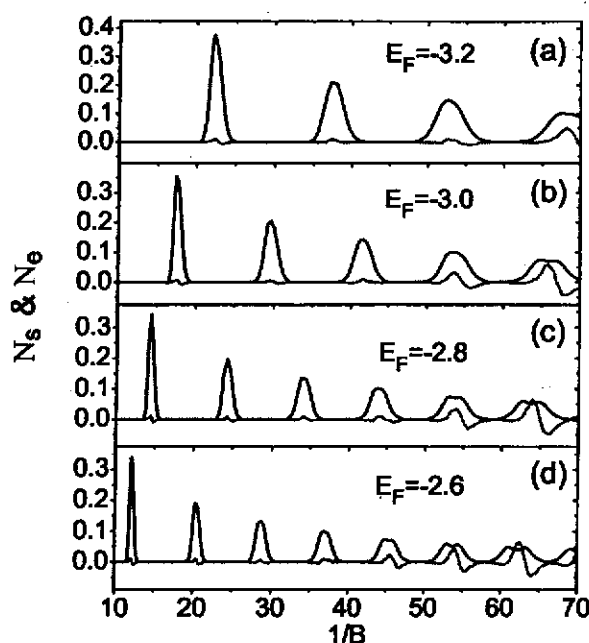


图 5.4 N_e (黑色线) 和 N_s (红色线) 随着 $1/B$ 在不同 E_F 下的变化图。其他参数为 $V_R = 0.05$, $T = 0.01$, $L = 40a$ 。

的朗道能级随着 $1/B$ 的关系。我们在此同时给出了 $V_R = 0$ 和 $V_R \neq 0$ 不等于零的情况。从图 5.3 我们清楚地看到左子峰与 $V_R = 0$ 时候的未劈裂的朗道能级齐平 (如图 5.3b 点), 而不是与同等条件下 (Rashba 系数) 劈裂过朗道能级齐平。为了彻底地弄清楚峰的位置起因, 我们也给出了在整个系统处于均匀 Rashba 耦合 (包括 2, 4 端口) 的 N_e 曲线。这种情况下, 左边的子峰移到了朗道能级的位置 (如图 5.3a 点所示)。因此, 图 5.2 中峰的位置与朗道能级没有对齐来源于体系电子态密度的不均匀。当 2, 4 端口没有 Rashba 耦合时, 端口与中间区存在这一个界面, 此界面是 $V_R = 0$ 和 $V_R \neq 0$ 的分界面。这个界面引起了电子的散射, 从 1 端口出来的电子一部分直接进入 2 端口, 而另一部分则经过界面的反射后进入 3 端口, 所以 N_e 左边的子峰位置改变了。这意味着 Nernst 效应可以反映与中间区接触的导线的电子密度。这种情况完全不同于通常的 Hall 效应 [7-9]。

接下来我们研究自旋 Nernst 系数 N_s , 在 $V_R \neq 0$ 时 N_s 开始出现 (如图 5.2b-d 所示)。在 N_e 左子峰附近, N_s 显示为一个振荡结构, 且 $N_s \propto \partial[\ln N_e(E_F)]/\partial E_F$ 。 N_s 和 N_e 之间的这个关系类似于惹到和电导的半经典的 Mott 关系 [14]。然而 N_s 在 N_e 的右子峰则非常的小, 并没有相应的振荡结构出现, 在此类 Mott 关系被破坏了。我们可以定量的用 Schrödinger 方程来分子这个结果。使用 Schrödinger 方程, 我们可以解析地得到劈裂的朗道能级和相应的电子波函

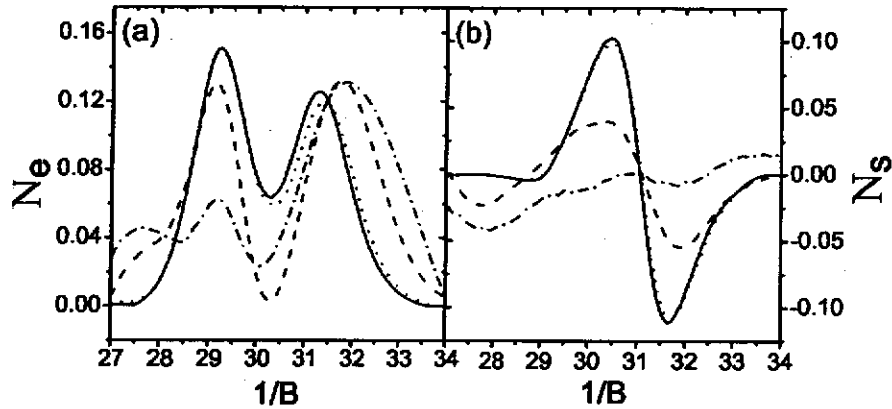


图 5.5 N_e (a) 和 N_s (b) 在不同电子无序下随 $1/B$ 变化图。其中 $W = 0$ (实线), $W = 0.1$ (点线), 0.5 (虚线), 1.0 (虚线-点线间隔线)。其他参数为 $E_F = -3$, $V_R = 0.1$, $T = 0.01$, $L = 20a$ 。

数。我们发现在 V_R 较小时 (比如 $V_R < 0.1t$)，能量较高的朗道能级电子在 z 方向上是自旋极化的。然而对于能量较低的朗道能级而言，电子自旋几乎是非极化的。因此，自旋流 $J_{2,4s}$ 只在 E_F 穿过较高能量的朗道能级位置出现，它对应于 N_e 系数的左子峰。此外，在较大的 Rashba 系数或者较小的磁场下，如图 5.2 所示，自旋 Nernst 系数越强。这个结果来源于磁场和 Rashba 自旋轨道耦合的竞争关系。事实上，Rashba 效应的结果是使得不同自旋的电子沿不同的方向偏转从而导致自旋 Nernst 效应，而磁场的作用是使得所有同一个方向运动的电子往相同的方向偏转。因此，磁场削弱了自旋 Nernst 效应。

朗道能级 E_N 和磁场 B 的关系是： $E_N = \frac{eB\hbar}{m^*}(N + 1/2) - 4t$ ，因此 Nernst 系数的周期是 $e\hbar/(m^*E_F^*)$ ，它是可以通过改变费米能级 E_F 来调节的。在图 5.4 中，我们画出了 N_e 和 N_s 在不同 E_F 下随着磁场倒数的变化曲线。在不同的 E_F 下，曲线表现出了相似的行为。随着 E_F 的增加， N_e 峰和 N_s 的振荡结构变密了，但是由于相同填充数的 N_e 和 N_s 几乎没有变化。

最后我们研究了电子无序效应对 Nernst 效应和自旋 Nernst 效应的影响。图 5.5 给出了 N_e 和 N_s 随着 $1/B$ 在不同电子无序强度 W 下的变化关系。这里我们计算 N_e 和 N_s 取了 500 次平均。在小电子无序下，(比如 $W = 0.1$)， N_e 和 N_s 几乎不受影响。然而对于较大的电子无序，比如说 $W = 0.5$ ， N_e 的两个子峰的高度几乎不变，但是两个子峰之间的谷变深了，因此使得两个子峰更加清晰 (如图 5.5a)。随着 W 的进一步加大， N_e 左子峰变小了而右边的子峰几乎不受影响。同时 N_s 的高度变小了。然而，在 N_e 左边子峰附近，自旋 Nernst 系数 N_s 在 $W = 0$ 时很小，却在较大的 W 下加强了 (见图 5.5b)。最后，对于很大的 W ，系统进入绝

缘区, N_e 和 N_s 都衰减到零了。

在小结之间, 我们对于新的自旋Nernst效应有几点说明: (1) 自旋Nernst效应并非Seebeck效应和自旋Hall相应的叠加。事实上, Seebeck系数主要由 $(dT_{13}(E))/(dE)|_{E=E_F}$ 看来决定, 而自旋Nernst系数取决于 ΔT_{23} 和 ΔT_{21} ; (2) 自旋Nernst效应可以用类似于自旋Hall效应的方法来探测[5, 6], 比如自旋积累。

5.4 小结

本章中我们研究了存在Rashba自旋轨道耦合, 在垂直磁场通过的二维电子气的Nernst效应和自旋Nernst效应。Nernst系数随着磁场的倒数(填充数)呈现出一系列的峰结构, 且峰的高度的倒数随峰的数目是线性关系。当存在Rashba自旋轨道耦合时, Nernst峰开始劈裂, 同时自旋Nernst系数开始出现且随着磁场表现出一系列的振荡结构。Nernst系数和自旋Nernst系数的关系类似于半经典的Mott关系。此外我们还研究了电子无序对Nernst系数和自旋Nernst系数的影响。

参考文献

- [1] J. E. Hirsch, *Spin Hall Effect*, Phys. Rev. Lett. **83**, 1834 (1999); M. I. Dyakonov and V. I. Perel, *Current-induced spin orientation of electrons in semiconductors*, JETP Lett. **13**, 467 (1971); , Phys. Lett. A **35**, 459 (1971).
- [2] S. Murakami, N. Nagaosa, and S.C. Zhang, *Dissipationless Quantum Spin Current at Room Temperature*, Science **301**, 1348 (2003); J. Sinova, D. Culcer, Q. Niu, N. A. Sinitsyn, T. Jungwirth, and A. H. MacDonald, *Universal Intrinsic Spin Hall Effect*, Phys. Rev. Lett. **92**, 126603 (2004).
- [3] J. Nitta, T. Akazaki, H. Takayanagi, and T. Enoki, *Gate Control of Spin-Orbit Interaction in an Inverted $In_{0.53}Ga_{0.47}As/In_{0.52}Al_{0.48}As$ Heterostructure*, Phys. Rev. Lett. **78**, 1335 (1997); T. Bergsten, T. Kobayashi, Y. Sekine, and J. Nitta, *Experimental Demonstration of the Time Reversal Aharonov-Casher Effect*, Phys. Rev. Lett. **97**, 196803 (2006).
- [4] J. P. Heida, B. J. van Wees, J. J. Kuipers, T. M. Klapwijk, and G. Borghs, *Spin-orbit interaction in a two-dimensional electron gas in a $InAs/AlSb$ quantum well with gate-controlled electron density*, Phys. Rev. B **57**, 11911 (1998); D. Grundler, *Large Rashba Splitting in $InAs$ Quantum Wells due to Electron Wave Function Penetration into the Barrier Layers*, Phys. Rev. Lett. **84**, 6074 (2000).
- [5] Y. K. Kato, R. C. Myers, A. C. Gossard, and D. D. Awschalom, *Observation of the Spin Hall Effect in Semiconductors*, Science **306**, 1910 (2004); J. Wunderlich, B. Kaestner, J. Sinova, and T. Jungwirth, *Experimental Observation of the Spin-Hall Effect in a Two-Dimensional Spin-Orbit Coupled*, Phys. Rev. Lett. **94**, 047204 (2005); V. Sih, R. C. Myers, Y. K. Kato, W. H. Lau, A. C. Gossard, and D. D. Awschalom, *Spatial imaging of the spin Hall effect and current-induced polarization in two-dimensional electron gases*, Nature Phys. **1**, 31 (2005); V. Sih, W. H. Lau, R. C. Myers, V. R. Horowitz, A. C. Gossard, and D. D. Awschalom, *Generating Spin Currents in Semiconductors with the Spin Hall Effect*, Phys. Rev. Lett. **97**, 096605 (2006).
- [6] S. O. Valenzuela and M. Tinkham, *Direct electronic measurement of the spin Hall effect*, Nature (London) **442**, 176 (2006).
- [7] A.A. Abrikosov, *Fundamentals of the theory of metals* (NorthHolland Amsterdam, 1988).

- [8] J.M. Iman, *Electrons and phonons* (Oxford university Press, Oxford, U.K., 1960).
- [9] C.W.J. Beenakker and A.A.M. Staring, *Theory of the thermopower of a quantum dot*, Phys. Rev. B **46**, 9667 (1992).
- [10] A. S. Dzurak, C. G. Smith, C. H. W. Barnes, M. Pepper, L. Martin-Moreno, C. T. Liang, D. A. Ritchie, and G. A. C. Jones, *Thermoelectric signature of the excitation spectrum of a quantum dot*, Phys. Rev. B **55**, R10197 (1997); R. Scheibner, H. Buhmann, D. Reuter, M. N. Kiselev, and L. W. Molenkamp, *Thermopower of a Kondo Spin-Correlated Quantum Dot*, Phys. Rev. Lett. **95**, 176602 (2005); R. Scheibner, E. G. Novik, T. Borzenko, M. König, D. Reuter, A. D. Wieck, H. Buhmann, and L. W. Molenkamp, *Sequential and cotunneling behavior in the temperature-dependent thermopower of few-electron quantum dots*, Phys. Rev. B **75**, R041301 (2007).
- [11] L. W. Molenkamp, H. van Houten, C. W. J. Beenakker, R. Eppenga, and C.T. Foxon, *Quantum oscillations in the transverse voltage of a channel in the nonlinear transport regime*, Phys. Rev. Lett. **65**, 1052 (1990).
- [11] M. Cutler and N. F. Mott, *Observation of Anderson Localization in an Electron Gas*, Phys. Rev. **181** 1336, (1969).
- [13] K. Behnia, M.-A. Méasson, and Y. Kopelevich, *Oscillating Nernst-Ettingshausen Effect in Bismuth across the Quantum Limit*, Phys. Rev. Lett. **98**, 166602 (2007); K. Behnia, L. Balicas, and Y. Kopelevich, *Signatures of Electron Fractionalization in Ultraquantum Bismuth*, Science **317**, 1729 (2007).
- [12] H. Nakamura, N. Hatano, and R. Shirasaki, *Quantum Nernst effect*, Solid State Communications **135**, 510 (2005); R. Shirasaki, H. Nakamura, N. Hatano, *Impurity Effect in the Quantum Nernst Effect*, J. Surf. Sci. Nanotech. Vol. **3**, 518 (2005).
- [13] L. Sheng, D. N. Sheng, and C. S. Ting, *Spin-Hall Effect in Two-Dimensional Electron Systems with Rashba Spin-Orbit Coupling and Disorder*, Phys. Rev. Lett. **94**, 016602 (2005); W. Ren, Z. Qiao, J. Wang, Q. Sun, and H. Guo, *Universal Spin-Hall Conductance Fluctuations in Two Dimensions*, Phys. Rev. Lett. **97**, 066603 (2006); Z. Qiao, W. Ren, J. Wang, and H. Guo, *Low-Field Phase Diagram of the Spin Hall Effect in the Mesoscopic Regime*, Phys. Rev. Lett. **98**, 196402 (2007); Y. Xing, Q.-F. Sun, and J. Wang, *Symmetry and transport property of spin current induced spin-Hall effect*, Phys. Rev. B **75**, 075324 (2007).
- [14] P. Streda, *Quantised thermopower of a channel in the ballistic regime*, J. Phys.: Condens. Matter **1** 1025 (1989).

第六章 用约瑟夫森四端口体系探测正常及反常Andreev反射

摘要：本章我们研究了由超导和石墨烯构成的四端口复合体系的电子输运性质。使用非平衡格林函数方法我们得到了Andreev反射系数和线性电导。由于从超导-石墨烯界面经由Andreev反射的空穴的干涉效应，当两个超导导线的位相差为零时，反常Andreev反射消失，而当两个两个超导导线的位相差 $\theta = \pi$ 时，正常Andreev反射消失。这表明我们可以使用此简单超导-石墨烯结构来控制正常以及反常Andreev反射。此外由于体系的大小影响，反射的空穴表现出波粒二象性，且随着体系尺寸大小表现出更多的波动性或者粒子性。对于小尺寸体系，反射的空穴表现出跟多的波动性，反之对于大尺寸体系，表现出更多粒子性。这样在大尺寸下，由于反射空穴的粒子性，对于正常或反常Andreev反射，我们可以在不同端口观测到反射空穴。

6.1 引言

石墨烯是一种由碳原子组成的六角蜂窝状二维结构。最近，石墨烯成为凝聚态物理研究领域的一个热点，引起广泛的兴趣[1-4]。石墨烯在狄拉克点附近的独特的能带结构（线性色散关系）导致了很多独特的性质：低能粒子服从狄拉克方程描述且具有相对论电子行为[3, 4]。最近，关于电子在超导-石墨烯界面的行为有很多出色的工作[5-9]。其中一个有趣的现象就是电子在超导-石墨烯界面上的反常Andreev反射[5]。早在半个世纪以前，正常的Andreev反射就被发现了[10]，在这个过程中，入射电子在超导界面反射为一个空穴，而在超导内多出一对库伯对。当两个界面的电压差小于超导能隙时，电子隧穿通过界面主要由Andreev反射来承载。对于正常金属和超导组成的复合结，在Andreev反射过程中，反射回的空穴沿着入射电子的方向，我们通常称之为正常Andreev反射或背反射。然而当复合结由石墨烯和超导组成时，除了背散射还有一种新的Andreev反射，称之为反常Andreev反射或者镜面反射，在此过程中，反射空穴的方向和入射电子的方向呈镜面对称关系[5]。从能带角度考虑，如果入射电子和反射空穴都处于一个带中（导带或价带），此时的反射通常是Andreev背散射。反之，如果入射电子和反射空穴分初导带和价带，则属于镜面Andreev反射。然而在两端口体系中，比如说超导-石墨烯体系或者超导-石墨烯-超导体体系中，正常和反常Andreev反射都会发生。所以从实验上来观测正常和反常Andreev反射就有困难。为此我们需要考虑其他的介观体系来观测正常和反常Andreev反射。

本章中，我们研究一个由超导和石墨烯构成的四端口复合体系的输运性质。如图6.1 (a) 所示，该体系有四个端口，包括两个石墨烯导线端口和两个

超导导线端口。使用非平衡格林函数方法我们得到了通过石墨烯端口的电流和Andreev反射几率。我们发现，当两个超导端口位相差为零时，由于经由两个超导端口界面的反射的空穴的干涉，正常Andreev反射发生而反常Andreev反射被抑制，反之，当两个超导端口位相差为 π 时，反常Andreev反射发生而正常Andreev反射被抑制。故而在此四端口体系中我们可以简单地通过调节两个超导导线之间的位相差来控制 and 选择正常和反常Andreev反射。此外，在尺寸较大的体系中，发射的空穴会显现出更多的粒子性来，这样，从1端口出射的电子经由2, 4端口的反射会进入1端口或者3端口，取决于正常的还是反常的Andreev反射发生。但是对于小尺寸体系，反射空穴表现出较多的波动性，从而空穴反射到1端口或3端口的几率都比较大。

6.2 研究模型和主要结果

如图6.1 (a) 所示，我们考虑体系由两个超导导线之间夹一条边界为“zigzag”的单层石墨带构成¹。在紧束缚模型下，干净石墨的哈密顿表示为[11]: $H_G = \sum_{i\sigma} E_0 a_{i\sigma}^\dagger a_{i\sigma} + \sum_{\langle ij \rangle \sigma} t a_{i\sigma}^\dagger a_{j\sigma}$ ，其中 $a_{i\sigma}^\dagger$ ($a_{i\sigma}$)是格点 i 处的产生(湮灭)算符。 E_0 是同位置占据能，同时也是狄拉克点的能量，在实验室上 E_0 是可以为调节的。我们使用BCS哈密顿来表示两个超导导线， $H_{S\alpha} = \sum_{k\sigma} \epsilon_k C_{k\sigma,\alpha}^\dagger C_{k\sigma,\alpha} + \sum_k (\Delta_\alpha C_{k1,\alpha} C_{-k1,\alpha} + \Delta_\alpha^* C_{-k1,\alpha}^\dagger C_{k1,\alpha}^\dagger)$ ，这里 $\alpha = 2, 4$ 是超导导线指标，超导序参量是 $\Delta_\alpha = \Delta e^{i\theta_\alpha}$ ，其中 Δ 是超导能隙， θ_α 是超导体位相。超导导线 α 和石墨烯之间的耦合表示为 $H_{T\alpha} = \sum_{i\sigma} t a_{i\sigma}^\dagger C_{\alpha,\sigma}(x_i) + H.c.$ 。其中 x_i 是碳原子 i 的水平位置参数。 $C_{\alpha,\sigma}(x)$ 是超导表面电子的消灭算符， $C_{\alpha,\sigma}(x) = \sum_{k_x, k_y} e^{ik_x x} C_{k\alpha,\sigma}$ 。因此，整个体系的哈密顿表示为 $H = H_G + \sum_{\alpha=2,4} (H_{S\alpha} + H_{T\alpha})$ 。

从石墨端口1进入中间区的电流可以由计算1端口的粒子数算符得到[12]， $I_1 = -e \left(\frac{d}{dt} \sum_{i \in 1, \sigma} a_{i\sigma}^\dagger a_{i\sigma} \right)$ ，其中指标 i 要对1端口的所有格点求和。经整理，我们得到电流表达式为：

$$I_1 = \frac{2e}{\hbar} \int \frac{dE}{2\pi} [(f_{1+} - f_2)T_{12} + (f_{1+} - f_4)T_{14} + (f_{1+} - f_{3-})T_{13A} + (f_{1+} - f_{1-})T_{11A} + (f_{1+} - f_{3+})T_{13}]. \quad (6.1)$$

其中 $f_{\alpha\pm}(E) = 1/\{\exp[(E \mp eV_\alpha)/k_B T] + 1\}$ ， $f_2(E) = f_4(E) = 1/\{\exp(E/k_B T) + 1\}$ 是存在电压 V_α 时的费米分布。这里我们设定超导导线的电压为零($V_2 = V_4 = 0$)。

在方程6.1中， $T_{13}(E) \equiv \text{Tr}\{\Gamma_{11\uparrow} G_{1\uparrow}^\dagger \Gamma_{31\uparrow} G_{1\uparrow}^\dagger\}$ ， $T_{12(14)}(E) = \text{Tr}\{\Gamma_{11\uparrow} [G_{2(4)}^\dagger G_a]_{1\uparrow}\}$ 是从石墨端口1到端口2, 3, 4的隧穿系数。 $T_{11A}(E) =$

¹如果考虑边界为“armchair”的石墨带，能带结构会在狄拉克点 E_0 附近出现一个能隙，从而阻止Andreev反射的发生。事实上，在实验中，人们可以选择边界为“zigzag”或者“armchair”的石墨烯[15]

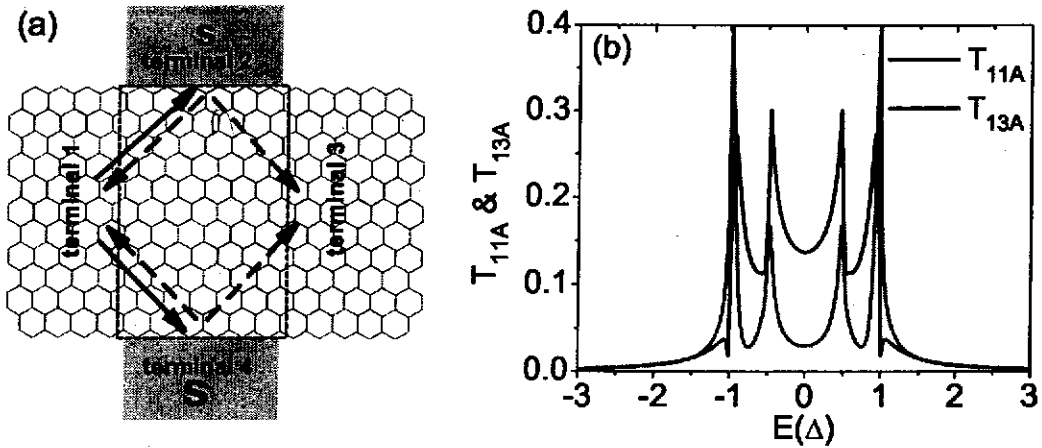


图 6.1 (a) 四端口超导-石墨烯复合结的示意图。图中，石墨烯的宽度是6；(b) 三端口体系中 T_{11A} 和 T_{13A} 随着入射电子能量 E 的变化图，其中 $E_0 = -0.5\Delta$ ， $W = 25$ 。

$\text{Tr}\{\Gamma_{1\uparrow\uparrow}G_{1\downarrow}^r\Gamma_{1\downarrow\downarrow}G_{1\uparrow}^a\}$ ， $T_{13A}(E) = \text{Tr}\{\Gamma_{1\uparrow\uparrow}G_{1\downarrow}^a\Gamma_{3\downarrow\downarrow}G_{1\uparrow}^r\}$ 是 Andreev 反射系数，他们分别表示 1 端口的电子经过 Andreev 反射进入 1 端口 (T_{11A}) 和 3 端口 (T_{13A})。这里指标 $\uparrow\uparrow$ ， $\uparrow\downarrow$ ， $\downarrow\downarrow$ 和 $\downarrow\uparrow$ 分别表示在南部表象下矩阵的 11, 12, 21, 22 元。线宽函数 $\Gamma_\alpha(E)$ 定义为 $\Gamma_\alpha(E) = i[\Sigma_\alpha^r - (\Sigma_\alpha^r)^\dagger]$ 。其中 $G^{r(a)}(E)$ 是南部表象下中心区的推迟 (超前) 格林函数，它表示为 $G^r(E) = G^{a\dagger}(E) = (EI - H_c - \sum_{\alpha=1,2,3,4} \Sigma_\alpha^r)^{-1}$ ，其中哈密顿 H_c 是如图 6.1 (a) 中长方形所示的中心区哈密顿， $\Sigma_\alpha^r(E)$ 是表示耦合到导线 α 的推迟自能。推迟自能表达式为： $\Sigma_{\alpha,ij}^r(E) = tg_{\alpha,ij}^r(E)t$ ，其中 $g_{\alpha,ij}^r(E)$ 是导线 α 的表面格林函数。对于石墨端口 1 和 3，我们需要数值计算表面格林函数 [13]，而对于超导导线 2 和 4，表面格林函数表示为 $g_{\alpha,ij}^r(E) = -i\pi\rho\beta(E)J_0[k_F(x_i - x_j)] \otimes \begin{pmatrix} 1 & \Delta_\alpha/E \\ \Delta_\alpha^*/E & 1 \end{pmatrix}$ 其中 ρ 是正常态密度， $J_0[k_F(x_i - x_j)]$ 是零阶 Bessel 函数， k_F 是费米波矢。 $\beta(E)$ 函数定义为：当 $|E| < \Delta$ 时， $\beta(E) = -iE/\sqrt{\Delta^2 - E^2}$ ，而当 $|E| > \Delta$ 时， $\beta(E) = |E|/\sqrt{E^2 - \Delta^2}$ 。数值计算中我们采用真实石墨烯的参数：格点之间的跳跃能 $t = 2.75\text{eV}$ ，C-C 键长 $a_0 = 0.142\text{nm}$ 。超导能隙 Δ 取为 $\Delta = t/2750 = 1\text{meV}$ ，费米波矢 $k_F = 1\text{\AA}^{-1}$ 。下面我们主要研究正常和反常 Andreev 反射的系数 T_{11A} 和 T_{13A} 。

我们首先研究只存在超导导线 2 或者 4 的三端口体系。在这种情况下，从超导导线经过 Andreev 反射的空穴不会发生干涉。图 6.1 (b) 中我们给出了 Andreev 反射系数 T_{11A} 和 T_{13A} 随着入射电子能量的 E 的变化曲线。 T_{11A} 和 T_{13A} 在能隙内 ($|E| < |\Delta|$) 都很大，并且在 $E = \pm E_0$ 和 $E = \pm\Delta$ 处有峰出现。但是 T_{11A} 和 T_{13A} 当 E 在能隙以外时就迅速的衰减了，这个结果和普通的正常金属-

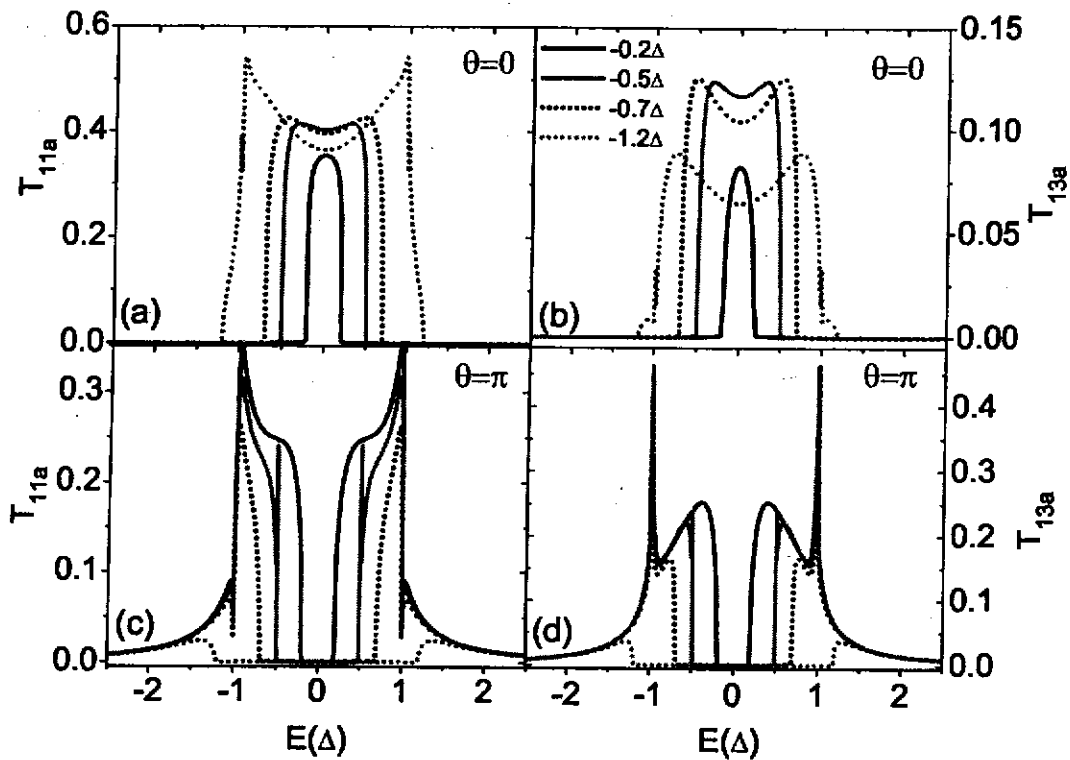


图 6.2 T_{11A} 和 T_{13A} 随着入射电子能量 E 的变化, 体系尺寸为 $W = 25$ 。

超导结相似[14]。这里我们需要强调的是Andreev 反射系数 T_{11A} 和 T_{13A} 无论在区间 $|E| < |E_0|$ 还是 $|E| > |E_0|$ 都可以取得较大的值。当 $|E| < |E_0|$ 时, 入射电子和反射空穴在同一个带(如图6.3所示), 因此这种反射是正常Andreev反射或背反射。反之, 当 $|E| > |E_0|$ 时, 入射电子和反射空穴分别在导带和价带, 所以此时反常Andreev反射发生。以上结果表明在只存在一个超导端的情况下, 正常和反常的Andreev都会发生。

接下来, 我们主要研究四端口体系。图6.2给出了在超导位相差 θ 分别等于0和 π ($\theta \equiv \theta_2 - \theta_4$) 时的Andreev反射系数 T_{11A} 和 T_{13A} 随着能量 E 变化曲线。当 $\theta = 0$ 时, 如图6.2 (a) 和 (b) 所示, T_{11A} 和 T_{13A} 在区间 $|E| > |E_0|$ 上几乎等于零, 但是在区间 $|E| < |E_0|$ 内几乎等于零。这个结果表明当 $\theta = 0$ 时, 只有正常的Andreev反射发生, 而反常Andreev反射被抑制。反之, 在 $\theta = \pi$ 时, 如图6.2 (c) 和 (d) 所示, T_{11A} 和 T_{13A} 在区间 $|E| < |E_0|$ 内几乎为零, 而在区间 $|E| > |E_0|$ 上较大。因此在 $\theta = \pi$ 时, 正常Andreev反射被抑制, 只有反常Andreev反射发生。试验中, 位相差 θ 可以被通过调节超导电流来调节。因此我们研究的四端口体系可以在实验上通过调节超导位相来控制只让正常或者反常的Andreev反射发生。

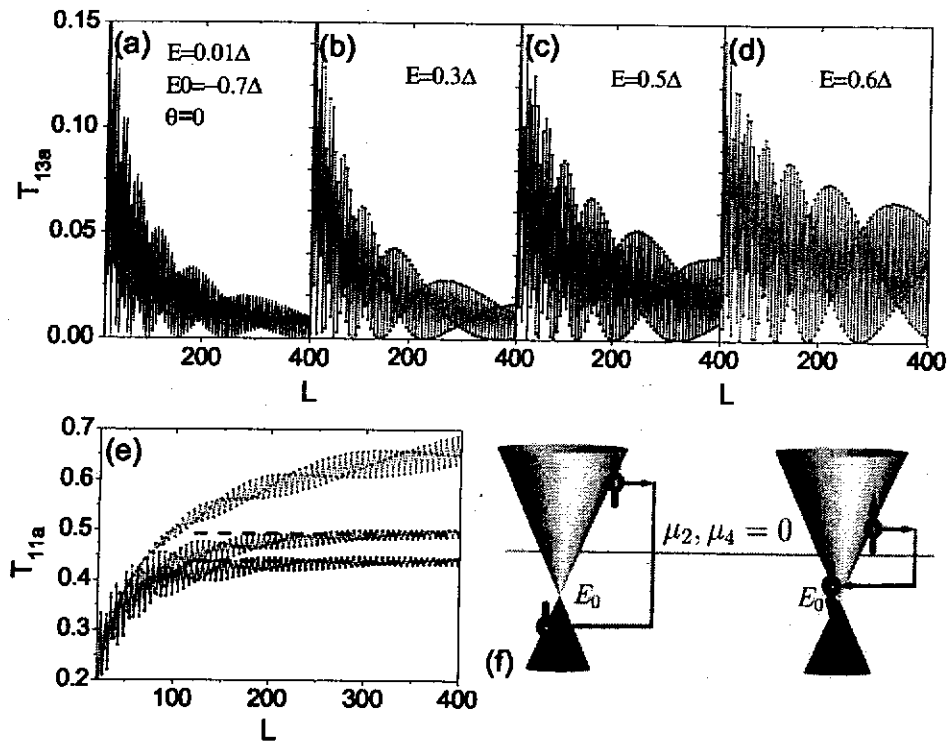


图 6.3 (a) - (d) 表示 T_{13A} 随着体系宽度 W 的变化图; (e) 表示 T_{11A} 随着 W 的变化。其他参数为 $E_0 = -0.7\Delta$, $\theta = 0$ 。(f) 是正常以及反常 Andreev 反射的示意图。

让我们来解释为什么当位相 $\theta = \pi$ 时正常 Andreev 反射消失而当 $\theta = 0$ 时反常 Andreev 反射消失。在我们研究的四端口超导-石墨烯复合体系中, 存在两个超导-石墨界面, 正是在此界面上 Andreev 反射发生。从而从此两个界面上反射的空穴发生干涉。对于正常 Andreev 反射, 发射的空穴会携带一个额外位相 [14], 亦即超导体位相 θ_α , 从而两个界面的反射空穴干涉后的反射几率正比于 $|e^{i\theta_2} + e^{i\theta_4}|^2 = |1 + e^{i\theta}|^2$, 该值在 $\theta = 0$ 是最大, $\theta = \pi$ 时为零。因此在 $\theta = \pi$ 时由于反射空穴的干涉相消, 正常 Andreev 反射几率为零。对于反常 Andreev 反射, 除了超导体位相 θ , 从两个界面反射的空穴还有一个位相差 π , 该位相的出现是因为入射电子和反射空穴处于不同的能带 (一个在价带一个在导带)。该位相的来源类似于在一个超导-石墨-超导结中 [6], 超导电流的 π 结的电流位相关系 $I = I_c \sin(\theta + \pi)$ 。所以一共的反射几率正比于 $|1 + e^{i(\theta+\pi)}|^2$, 该值在 $\theta = 0$ 时为零。所以在 $\theta = 0$ 时反常 Andreev 反射消失。

从以上结果, 当 $\theta = 0$ (π) 时, 只有正常 (反常) Andreev 反射发生, 此时反射空穴的方向沿着入射电子方向 (沿着入射电子镜面方向), 如图 6.1 (a) 中红色 (蓝色) 箭头所示。因此反射空穴应该进入 1 (3) 端口, 并且 Andreev 反射系数 T_{13A} (T_{11A}) 应该为零。然而在图 6.2 中 T_{13A} (T_{11A}) 在 $\theta = 0$ (π) 时并不等

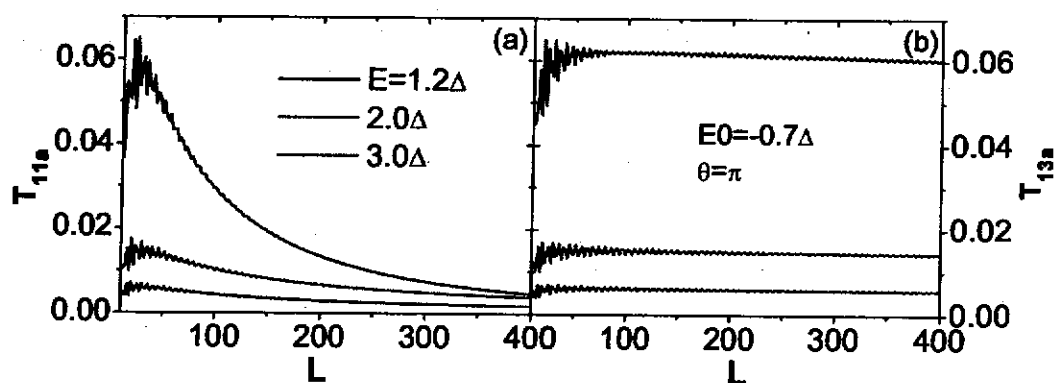


图 6.4 T_{11A} 和 T_{13A} 随着 W 变化。其他参数为 $E_0 = -0.7\Delta$, $\theta = \pi$ 。

于零。我们认为这个结果的出现是因为电子和空穴的波粒二象性。因为反射空穴有波的性质，从而空穴可以同时进入1端口和3端口，导致 T_{11A} 和 T_{13A} 都不为零。

为了给出一个清楚地图像，我们研究了Andreev反射系数随着体系尺寸的变化曲线。图6.3 (a) - (e) 给出了 T_{13A} 和 T_{11A} 随着石墨带宽度 W 在 $\theta = 0$ 时的变化关系。在这种情况下，只有正常Andreev反射发生。 T_{13A} 随着宽度的增加振荡衰减到零，而 T_{11A} 则随着 W 的增加振荡增强到一个饱和值。这是因为随着体系尺寸的增大反射空穴的粒子性逐渐更加明显。对于足够大的 W 值， T_{13A} 衰减到零，此时反射空穴的方向更加明显。此外我们还发现如果入射电子的能量 E 接近狄拉克点的能量 $|E_0|$ ， T_{13A} 的衰减速度就会更慢[如图6.3 (a) - (d)]。事实上如图6.3 (f) 所示，反射空穴的波失正比于 $|-E - E_0|$ 。因此对于接近 $|E_0|$ 的 E 值的空穴，波失更短，波长更长，从而空穴的粒子性更难表现出来， T_{13A} 的衰减也更慢。同样地，当 E 接近 $|E_0|$ 时， T_{11A} 达到饱和值也就更慢（见图6.3 (e)）。

图6.4给出了Andreev反射系数 T_{11A} 和 T_{13A} 随着体系尺寸的在 $\theta = \pi$ 时的变化曲线。当 $\theta = \pi$ 时，只有反常Andreev反射发生。此时如图6.1 (a) 所示，反射空穴进入3端口。结果随着石墨烯体系尺寸 W 的增加，空穴逐渐显现出更多的粒子性来。因此， T_{11A} 逐渐振荡衰减到零， T_{13A} 则逐渐增强到饱和值（如图6.4）。

到目前为止，我们只研究了超导位相 $\theta = 0$ 和 π 的情况。对于其他 θ 值，如图6.5 (a) (b) 所示，由于干涉相消的不完全，两种Andreev反射都会发生。随着 θ 从0变化到 π ，反常Andreev反射系数（ $|E| > |E_0|$ 时的 T_{11A} 和 T_{13A} ）逐渐从零变化到最大，而正常Andreev反射系数（ $|E| < |E_0|$ 时的 T_{11A} 和 T_{13A} ）逐渐从最大变化到零。

最后我们研究线性电导和实验上的可行性。通过设置超导导线的电压 $V_1 = V_3 = V$ ，并且考虑零温，从消除了端口1到端口3的直接隧穿系数 T_{13} 对1端口的电

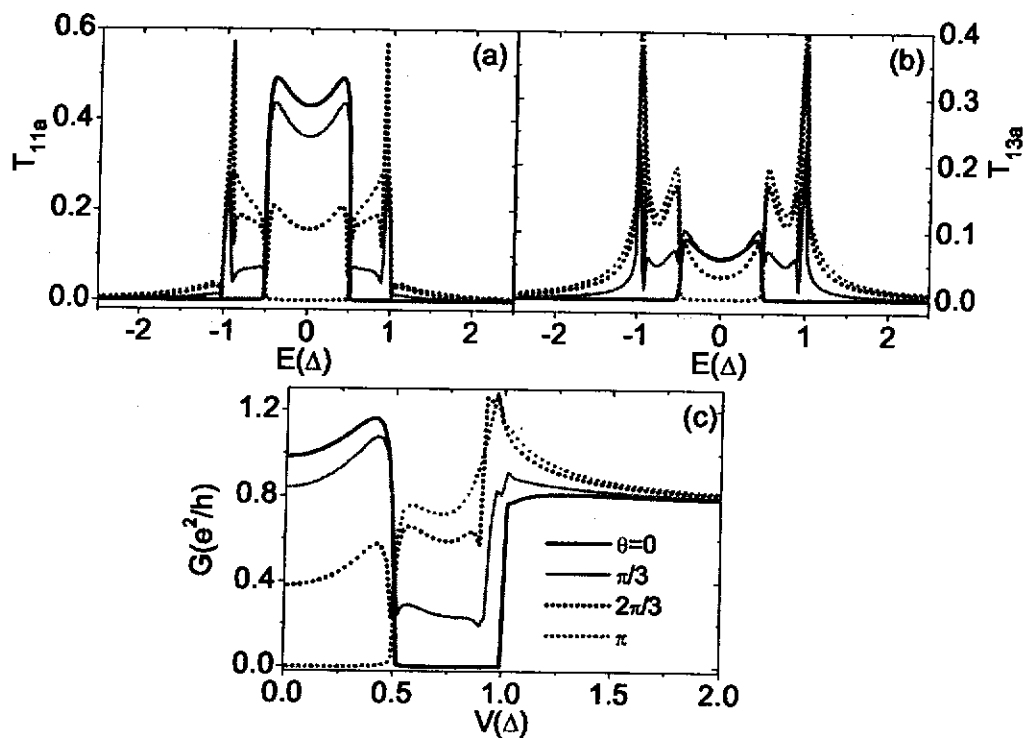


图 6.5 上图: T_{11A} (a) 和 T_{13A} (b) 随着 E 在不同 θ 时的曲线。下图: 1 端口的线性电导 G 随着电压 V 的变化。其他参数为 $E_0 = -0.5\Delta$, $W = 50$ 。

流的贡献。电导 G ($G \equiv dI_1/dV$) 此时的表达式为 $G(V) = (2T_{11A} + 2T_{13A} + T_{12} + T_{14})2e^2/h$ 。如果 $|eV| < \Delta$, 即入射电子能量在超导能隙以内, 从 1 端口到超导导线 2 和 4 的直接隧穿系数 T_{12} 和 T_{14} 为零, 因此电导 $G(V)$ 可以直接表示为 Andreev 反射系数的线性相加 $T_{11A} + T_{13A}$ 。图 6.5 (c) 给出了电导 G 随着电压 V 在不同超导位相 θ 下的变化关系。当 $\theta = 0$, 反常 Andreev 反射消失, 因此 G 在 $|E_0| < |eV| < \Delta$ 时等于零。反之, 当 $\theta = \pi$ 时, 正常 Andreev 反射消失, 从而导致在 $|eV| < |E_0|$ 时, $G = 0$ 。随着改变 θ 从 0 到 π , 电导 G 在 $|eV| < |E_0|$ 时为零, 在区间 $|E_0| < |eV| < \Delta$ 内从 0 开始增加。当 $|eV| > \Delta$ 时, G 通常比较大且不太依赖于超导位相 θ , 因为此时正常隧穿发生。最后我们注意到目前人们已经在实验上实现了石墨烯[15]和石墨与超导导线的耦合[9]。因此我们提出的装置可以在实验上实现。

6.3 小结

本章中我们研究了超导和石墨烯构成的四端口体系的 Andreev 反射的性质。我们发现该体系中我们可以通过调节超导位相和石墨的电子能量选择某

种特殊的Andreev反射（正常的或者反常的）发生。当超导位相差 $\theta = 0$ 时，反常Andreev反射被抑制而只有正常Andreev反射发生。当 $\theta = \pi$ 时，正常Andreev反射被抑制，只有反常Andreev反射发生。此外，从超导导线反射的空穴的干涉根据体系的大小表现出更多粒子性或者波动性。对于小尺寸体系，空穴的波动性占主导地位从而从1端口射出的电子反射后的空穴同时进入石墨端口1和3。对于大尺寸体系，反射空穴的粒子性占主导地位，从而反射空穴依赖于具体的Andreev反射的形式。

参考文献

- [1] K. S. Novoselov, A. K. Geim, S. V. Morozov, D. Jiang, Y. Zhang, S. V. Dubonos, I. V. Grigorieva, A. A. Firsov, *Electric Field Effect in Atomically Thin Carbon Films*, Science **306**, 666 (2004); K. S. Novoselov et al., *Two-dimensional gas of massless Dirac fermions in graphene*, Nature (London) **438**, 197 (2005).
- [2] Yuanbo Zhang, Yan-Wen Tan, Horst L. Stormer and Philip Kim, *Experimental observation of the quantum Hall effect and Berry's phase in graphene*, Nature (London) **438**, 201 (2005).
- [3] C. W. J. Beenakker, *Andreev reflection and Klein tunneling in graphene*, Rev. Mod. Phys. **80**, 1337 (2008).
- [4] A. H. Castro Neto, F. Guinea, N. M. R. Peres, K. S. Novoselov and A. K. Geim, *The electronic properties of graphene*, Rev. Mod. Phys. **81**, 109 (2009).
- [5] C. W. J. Beenakker, *Specular Andreev Reflection in Graphene*, Phys. Rev. Lett. **97**, 067007 (2006).
- [6] Jacob Linder, Takehito Yokoyama, Daniel Huertas-Hernando, and Asle Sudbo, *Supercurrent Switch in Graphene Junctions*, Phys. Rev. Lett. **100**, 187004 (2008).
- [7] Qingyun Zhang, Deyi Fu, Baigeng Wang, R. Zhang, and D. Y. Xing, *Signals for Specular Andreev Reflection*, Phys. Rev. Lett. **101**, 047005 (2008); Qifeng Liang, Yong Yu, Qianghua Wang, and Jinming Dong, *Controllable $0-\pi$ Transition in a Superconducting Graphene-Nanoribbon Junction*, Phys. Rev. Lett. **101**, 187002 (2008).
- [8] S. Bhattacharjee and K. Sengupta, *Tunneling Conductance of Graphene NIS Junctions*, Phys. Rev. Lett. **97**, 217001 (2006); J. Cayssol, *Crossed Andreev Reflection in a Graphene Bipolar Transistor*, *ibid.* **100**, 147001 (2008).
- [9] Hubert B. Heersche, Pablo Jarillo-Herrero, Jeroen B. Oostinga, Lieven M. K. Vander-sypen and Alberto F. Morpurgo, *Bipolar supercurrent in graphene*, Nature (London) **446**, 56 (2007); F. Miao, S. Wijeratne, Y. Zhang, U. C. Coskun, W. Bao, C. N. Lau, *Phase-Coherent Transport in Graphene Quantum Billiards*, Science **317**, 1530 (2007).
- [10] A. F. Andreev, Sov. Phys. JETP. **19**, 1228 (1964).
- [11] W. Long, Q.-F. Sun, and J. Wang, *Disorder-Induced Enhancement of Transport through Graphene p-n Junctions*, Phys. Rev. Lett. **101**, 166806 (2008).

- [12] Y. Meir and N.S. Wingreen, *Landauer formula for the current through an interacting electron region*, Phys. Rev. Lett. **68**, 2512 (1992); N.S. Wingreen, A.-P. Jauho, and Y. Meir, *Time-dependent transport through a mesoscopic structure*, Phys. Rev. B **48**, 8487 (1993).
- [13] D.H. Lee and J.D. Joannopoulos, *Simple scheme for surface-band calculations. II. The Green's function*, Phys. Rev. B **23**, 4997 (1981); M P Lopez Sancho, J M Lopez Sancho and J Rubio, *Quick iterative scheme for the calculation of transfer matrices: application to Mo (100)*, J. Phys. F: Met. Phys. **14**, 1205 (1984); *Highly convergent schemes for the calculation of bulk and surface Green functions*, **15**, 851 (1985).
- [14] G.E. Blonder, M. Tinkham, and T.M. Klapwijk, *Transition from metallic to tunneling regimes in superconducting microconstrictions: Excess current, charge imbalance, and supercurrent conversion*, Phys. Rev. B **25**, 4515 (1982); G. Deutscher, *Andreev - Saint-James reflections: A probe of cuprate superconductors*, Rev. Mod. Phys. **77**, 109 (2005).
- [15] Xiaolin Li, Xinran Wang, Li Zhang, Sangwon Lee, Hongjie Dai, *Chemically Derived, Ultrasoother Graphene Nanoribbon Semiconductors*, Science **319**, 1229 (2008).

第七章 结论

本文首先就博士期间的研究领域做了简单的介绍,包括量子点输运,二维电子气自旋输运, Fano 效应, 约瑟夫森结的输运性质, 热电效应以及当前研究热点石墨烯。随后介绍了研究的方法-非平衡格林函数方法在处理量子点, 约瑟夫森结以及二维电子气的输运性质的细节。

我们主要研究了基于二维电子气构成的介观体系的输运性质。包括以下几点: (1) 提出并研究了用二维电子气介观体系中的电子干涉来产生自旋极化流的装置。通过适当的参数调节, 可以同时得到相对较大的电流值和自旋极化率。值得一提的是, 我们提出的产生自旋极化流的装置没有使用任何磁介质或者磁场。(2) 使用非平衡格林函数方法, 我们研究了由量子点构成的约瑟夫森结的约瑟夫森电流输运特性。在这个课题上我们研究了两个体系, 包括含有量子点的Aharonov-Bohm (AB) 环的输运特性和T型双量子点的输运特性。我们主要研究约瑟夫森电流-位相关系, 约瑟夫森电流的Fano效应以及由于电子空穴对称性导致的电流对称性关系。(3) 使用非平衡格林函数方法, 结合Landauer-Büttiker公式我们研究了在一个四端口二维电子气的Nernst效应, 并首次提出自旋Nernst效应。研究发现Nernst系数随着磁场的倒数在费米能级于朗道能级齐平的时候会出现峰值。当自旋轨道耦合强度越大或磁场越弱时, 自旋Nernst系数越大。结果表明 N_e 和 N_s 都非常敏感于体系的边界电子密度。(4) 使用低温下的线性Landauer-Büttiker公式, 我们针对目前研究热点石墨烯提出一种基于石墨烯的约瑟夫森结用于分离和测量正常和反常Andreev反射的试验装置。此装置中由于空间对称性, 反射空穴发生干涉, 通过适当的超导位相的调节可以选择只有正常或者反常Andreev反射发生。