

第一章 概论

1.1 介观体系，二维电子气和量子点

介观物理学是研究介于微观和宏观之间尺度体系的物质性质的科学。微观系统的状态或演化可以用量子力学的薛定谔方程描述。而对于宏观体系，人们常采用系综平均的方法来求取其平均性质。对于介观尺度的体系，一方面含有大量粒子，因而对薛定谔方程无法精确求解；另一方面，其粒子数又没有多到可以忽略统计涨落的程度。这就使得介观体系成为研究量子力学和经典力学过渡关系的重要领域。另一方面，介观系统的粒子一般具有位相相干的性质，这一点也为人们观测，控制，研究量子相干效应开辟了新的天地。

典型的介观体系有基于半导体异质结（GaAs/AlGaAs）的二维电子气和由二维电子气形成的空间受限制的量子点结构。人们之所以选择半导体异质结来构造介观体系是因为这样体系中的电子具有很长的位相相干长度（达到几个微米），这比起金属来是很有优势的。当在半导体表面上施加一个与之垂直的电场，在表面附近就会形成电子势阱，其中就会积累起大量的电子。这时电子沿垂直于表面方向的运动被势阱所限制，其能量会被量子化，只能离散地取值；而在平行于表面方向电子没有任何限制，其运动仍是自由的。这样一个薄的电子层称为二维电子气。近三十年来，人们在二维电子气中发现大量的新奇效应。比如二维电子气的霍尔电阻特性具有量子化的平台，其数值精确地等于 e^2/h ，其中 h 为普朗克常数， e 为电子电荷。我们注意到量子电导表达式中的因子都是基本常数。因此量子霍尔电阻可能用来作为电阻的自然基准。1982年，美国贝尔实验室的科学家们又发现霍尔平台可以出现在取分数值的情况。这两个杰出工作后来分获了1985年和1998年诺贝尔物理学奖。

另一个典型的介观体系是量子点，它是准零维的纳米材料，由少量的原子所构成[1]。量子点的空间三维方向的尺寸小于或等于其内部电子的德布罗意波长。由于其内部电子在各方向上的运动都受到限制，所以电子在量子点内部运动时能级是分立的。量子点又被称为“人造原子”不同于普通的原子分子或团簇，基于二维电子气的量子点的各项参数都是可控可调的。量子点中的局域电子通过导线和外部环境联系，构成一个输运系统。人们可以通过控制金属电极电势的高低来调节量子点能级的位置，能级间距，在量子点上连接金属导线就可以测量电导，电流，电流噪声等等。由于量子点的这些特性，一些不同于宏观输运的奇特量子现象被发现：库伦阻塞效应[2]，共振隧穿效应，近藤效应[3]，声子，光子辅助隧穿[4]，Aharonov-Bohm效应[5]以及Fano效应[6]等。量子点还可以用于制造很

多量子器件：逻辑电路，分子晶体管，约瑟夫森结等。

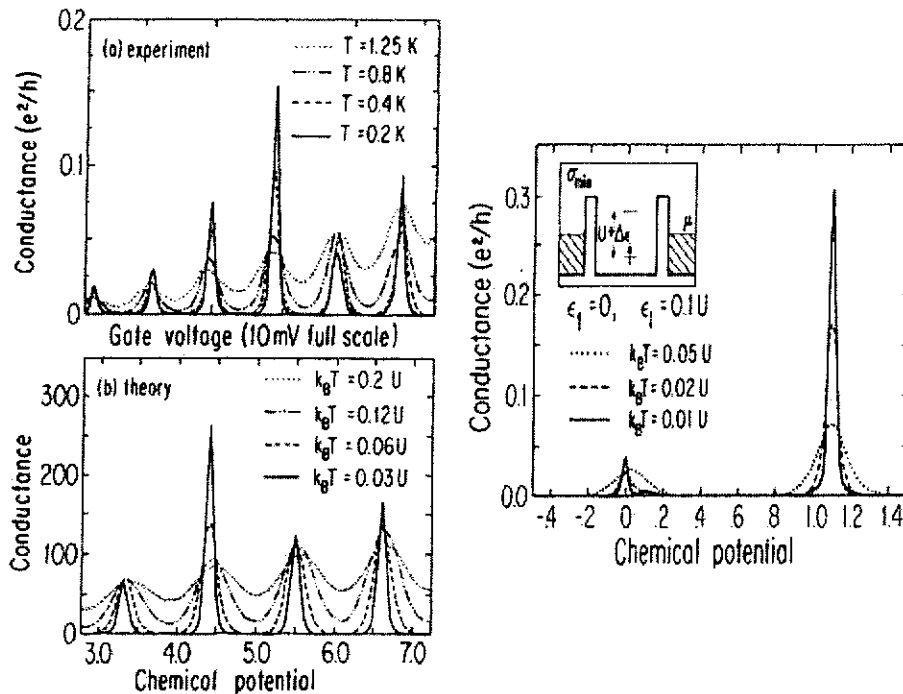


图 1.1 量子点中的库伦阻塞效应：电导随着导线量子点能级的变化。【Y. Meir, N. S. Wingreen and P. A. Lee, Phys. Rev. Lett. 66 3048 (1991)】

当量子点中电子能级与导线的费米面平齐时，环境就能提供导线中的电子足够的能量来克服量子点中的电子库伦排斥势能，从而这样的电子就能加入到量子点占据该能级；因而，随着导线上施加电压的调整，电子就能一个个地加入到量子点中，量子点中电子数也就能被精确控制。量子点的线性电导在量子点能级与导线费米面持平时就会出现峰值[见图1.1]，相邻峰值间的能量间距都近似等于量子点内的库伦排斥势能，这就是库伦阻塞效应。这类似于原子的核外电子，不同的电子占据不同的轨道，由洪特规则和泡利不相容原理来限制。而把两个或者更多的量子点耦合起来就形成了人造分子[7]。根据量子点之间的耦合强度两个量子点可以在弱耦合时形成离子键或者强耦合时形成共价键。弱耦合时电子被局域在各自的量子点中，而强耦合时，量子点之间的库伦排斥作用就必须加以考虑了。一般来讲，耦合的量子点比起两个独立的量子点来具有更低的能量，这个能

量差就是两个量子点之间的键能。人们研究双量子点的一个重要的初衷就是实现量子计算，以双量子点来实现量子比特[8]。Loss和DiVincenzo曾建议用双量子点的自旋来构成量子比特[9]。通过耦合两个量子点的自旋可以实现量子比特的纠缠。鉴于测量的考虑，人们研究的双量子点有串联[10]和并联[11]之分。

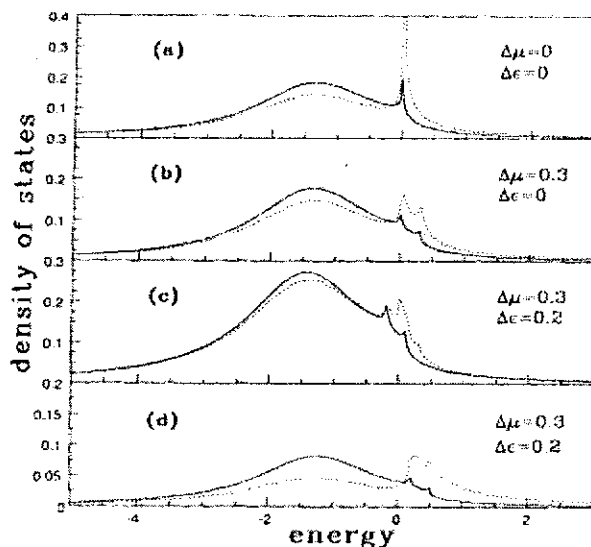


图 1.2 处于近藤区量子点的态密度，能量零点处附近的峰位近藤峰。【Y. Meir, N. S. Wingreen and P. A. Lee, Phys. Rev. Lett. 70 2601 (1993)】

近藤效应是凝聚态物理中多体关联的一个典型例子。当一个磁性杂质与巡游电子之间形成自旋单态时，电子能谱会在费米面附近呈现一个共振峰[如图1.2]，标志着电子之间的二级关联对巡游电子的强烈影响，它使得低温下的电阻率随着温度的降低而升高[12]。量子点在低温下恰好提供了一个可控制的观测近藤效应的实验室。实验上人们通过测量微分电导 dI/dV 来观测近藤效应，发现由于近藤效应，微分电导在库伦阻塞区在低温时被增强了，且微分电导在费米面附近有峰值出现。经过理论计算，如图1.2所示，近藤效应一个更为显著的特点就是局域态密度在费米面附近有非常尖锐的峰出现[13]。

1.2 Rashba自旋轨道相互作用

在电场 E 中运动的电子会受到一个内禀的沿着 $E \times p$ 方向的等效磁场，其中 p 是电子的动量方向。此等效磁场根据电子占据轨道的不同在不同自旋的电子上作用也不同，即电子自旋轨道耦合。事实上，对于原子核外的电子和晶格中运

动的电子，由于带正电的原子核的存在，自旋轨道耦合是广泛存在的。对于存在体对称破却的晶体，比如说GaAs的闪锌矿结构，局域电场会导致自旋轨道耦合，称之为Dresselhaus自旋轨道耦合[14]。此外，电场还会和非对称势耦合导致自旋轨道耦合，称之为Rashba自旋轨道耦合[15]，它存在于GaAs/AlGaAs半导体异质结构成的二维电子气中。

选择电场方向沿着Z方向，Rashba自旋轨道耦合的哈密尔顿写作：

$$\begin{aligned} H_R \propto (\mathbf{E} \times \mathbf{p}) \cdot \boldsymbol{\sigma} &= E_z(p_x\sigma_y - p_y\sigma_x) \\ &= \alpha(p_x\sigma_y - p_y\sigma_x) \end{aligned} \quad (1.1)$$

其中 α 称为Rashba系数，它取决于具体材料并依赖于限制势。此时等效磁场方向垂直于电子动量方向，此时电子的自旋方向会随着电子的运动而进动。在此需要说明的是电子自旋的进动角度与电子的运动速度无关只与电子运动的位移有关。电子运动越快，通过的路程越长，从而电子自旋进动也越快。换句话说自旋进动角度只取决于Rashba系数 α 和电子进动的距离。人们通常用电子自旋进动角度达到 π 所通过的距离 l 来衡量一个样品的性质，称之为Rashba自旋轨道耦合长度。在GaAs中， l 通常为 $1 - 10\mu\text{m}$ [16]，它可以通过加在样品上的的电场强度来控制。

1.3 约瑟夫森结的输运特性

1962年B. D. Josephson 约瑟夫森首先在理论上预言两块超导体通过一绝缘薄层连接起来时，一块超导体中的电子可穿过势垒进入另一超导体中[17]。约瑟夫森效应主要表现为：

(1) 直流约瑟夫森效应

当约瑟夫森结两端的电压 $V = 0$ 时，结中可存在超导电流，它是由超导体中的库珀对的隧道效应引起的。只要该超导电流小于某一临界电流 I_c ，就始终保持此零电压现象， I_c 称为约瑟夫森临界电流。超导电流和超导位相之间的关系为 $I = I_c \sin\theta$ ，其中 θ 是两个超导之间的位相。 I_c 对外磁场十分敏感。当沿结平面加恒定外磁场时，结中的隧道电流密度在结平面的法线方向上产生不均匀的空间分布。改变外磁场时，通过结的超导电流 I_s 随外磁场的增加而周期性地变化，描出与光学中的夫琅和费单缝衍射分布曲线相似的曲线，称为超导隧结的量子衍射现象。

(2) 交流约瑟夫森效应

结两端的直流电压 $V \neq 0$ 时，通过结的电流是一个交变的振荡超导电流，振荡频

率（称约瑟夫森频率） f 与电压 V 成正比，即 $f = 2qV/h$ 。以微波辐照隧道结时可产生共振现象。连续改变所加的直流电压以改变交流振荡频率，当约瑟夫森频率 f 等于微波频率的整数倍时，就发生共振，此时有直流成分的超导电流流过隧道结，在 $I - V$ 特性曲线上可观察到一系列离散的阶梯式的恒定电流。测定约瑟夫森频率 f ，可由电压 V 测定常量 $2e/h$ ，或从已知常量 e 和 h 精确测定 V 。交流约瑟夫森效应已被用来作为电压标准。

在正常-超导界面上，当一个动量为 k 的正常电子射向超导界面，如果它的能量相对于费米面小于超导能隙，就会在界面反射回一个动量为 $-k$ 的空穴。由于空穴的有效质量为负，因此它具有和入射电子相反的速度。这个现象就是Andreev反射[18]。这个效应可以用Bogoliubov - de Gennes[19]方程很好的描述。当正常-超导界面的偏压低于超导能隙时，Andreev反射可以显著增强界面上的电导。能量低于能隙的电子（以费米面为零点）无法直接隧穿进入超导，只有库伯对可以。因此反射的空穴就保证了这一点：小于能隙能量的电子和反射的同样能量小于能隙的空穴会在超导内产生一个库伯对。

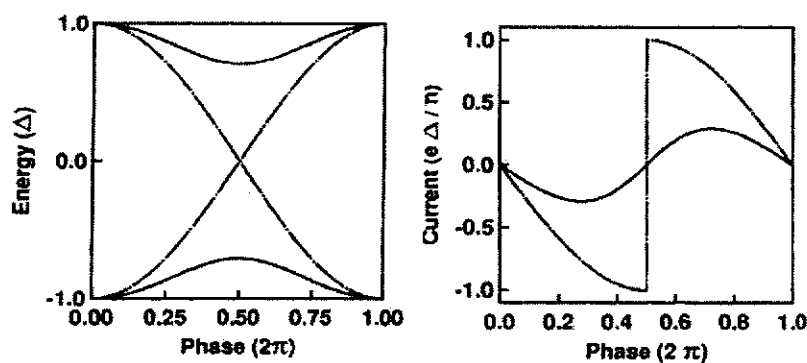


图 1.3 约瑟夫森结的束缚态和电流随着超导导线位相的变化，两条曲线分别代表存在和不存在杂质的情况。【P. F. Bagwell, Phys. Rev. B 46, 12573 (1992)】

在一个约瑟夫森结中，由于电子-空穴干涉，在绝缘层能形成一些离散态，称为Andreev束缚态[20]。Andreev束缚态承载了通过约瑟夫森结的大部分电流。

约瑟夫森电流和Andreev束缚态之间存在着如下关系[21]:

$$I(\theta) = \frac{e\Delta^2}{2\hbar} \sin\theta \sum_{n=1}^N \frac{D_n}{E_n} \tanh \frac{E_n}{2T} \quad (1.2)$$

其中 D_n 存在杂质时传输矩阵的本征值, N 是Andreev束缚态的数目, $E_n = \Delta\sqrt{1 - D_n \sin^2\theta}$ 是束缚态的能量。图1.3显示的就是约瑟夫森电流和Andreev束缚态随着超导位相的变化关系。前面我们提到过约瑟夫森电流和超导位相差有类似于正弦的关系 $I = I_c \sin\theta$, 理论研究发现, 在一些特殊条件下, 超导结的超流方向会发生翻转, 这相当于在约瑟夫森电流关系的正弦函数中加入了一个大小为 π 的相位因子: $I = I_c \sin(\theta + \pi)$ 通常把具有这种特性的超导结称为超导 π 结[22][见图1.4]。目前的理论和实验研究表明, 利用约瑟夫森 π 结可以构造一个量子比特来应用于未来的量子计算和量子信息领域中[23]。

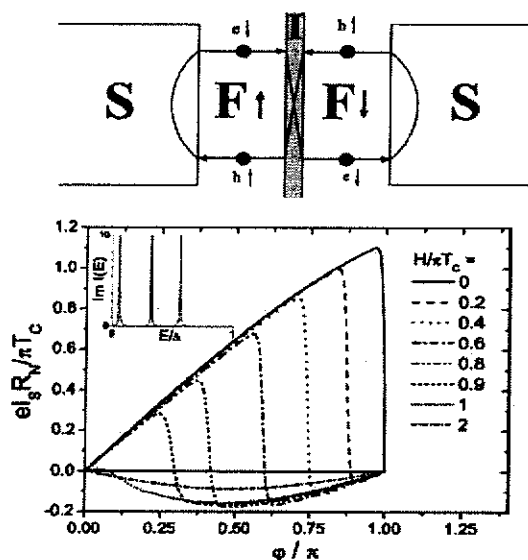


图 1.4 由铁磁构成的约瑟夫森 π 结, 通过改变交换场大小来实现 $0-\pi$ 转变。【A. A. Golubov, M. Y. Kupriyanov, E. Il'ichev, Rev. Mod. Phys. 76, 411 (2004)】

目前实验上有几种方式可构造 π 结, 其中, 最广为研究的是超导-铁磁层-超导结[24]。2001年, V. V. Ryazanov在实验上用这样的约瑟夫森结实现了 $0-\pi$ 相变。在两个超导电极之间夹一层铁磁层, 就构成一个约瑟夫森结, 通过改变温度, 就可以实现超导结从高温时的 0 态到低温时的 π 态的转变(如图1.4)。随后人们发现随着改变铁磁层厚度, 约瑟夫森结也会在 0 态和 π 态之间转换。近年来, 也出现了利用量子点制作的约瑟夫森 π 结。

1.4 Fano效应

当一个离散态与一个连续态发生干涉时，二者会形成一个新的共振态。1961年U. Fano在研究原子物理时发现当有限个离散态与连续态发生耦合时，离散态和连续态的共振耦合会使得离散态展宽，耦合态的波函数会在离散能级上下有个位相差 π ，两个态的耦合会随着离散态能级的移动使得能谱在离散态附近出现非对称的线型，称为Fano线型。如果把离散能级表示为 ϵ_d ，二者耦合系数记为 Γ ，能谱能量写作 ϵ ，则Fano线型在数学上可以表述为

$$\rho(\epsilon) \propto \frac{(\epsilon + q)^2}{1 + \epsilon^2} \quad (1.3)$$

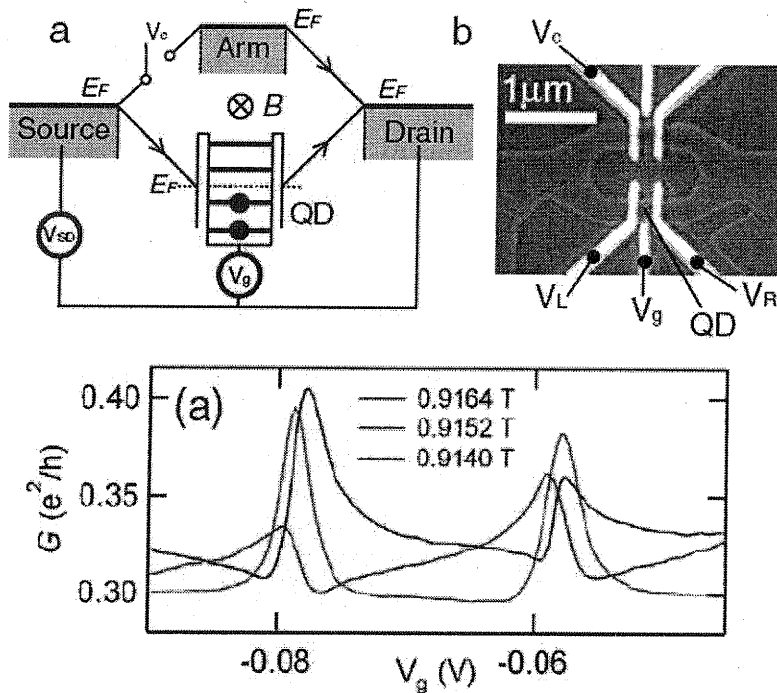


图 1.5 上图：Fano效应的实验示意图和扫描图像。下图：磁场调控下的Fano效应，当磁通位相差 π 时，Fano非对称线型的谷就从对称中心的一边变到另外一边。【K. Kobayashi, H. Aikawa, S. Katsumoto, Y. Iye, Phys. Rev. Lett. 88, 256806 (2002)】

其中 $\epsilon = \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\Gamma}$ ， q 称为Fano因子，通常为复数。它决定了Fano线型的具体形状。当 $q = 0$ 时， $\rho(\epsilon)$ 是完全非对称的，而当 $q \rightarrow \infty$ 时， $\rho(\epsilon)$ 为洛伦兹型。实验上人们已经在量子点上实现了Fano效应[25]，并且可以通过输运测量来测量量子点的

各种性质，包括隧穿位相，相干输运等等。

由量子点构成的Fano体系，通常研究的包括两种结构：其中一种是把一个量子点嵌于一个AB环中，此时探测导线连接在AB环上，构成通过量子点的离散能级和导线直接耦合的连续能级的耦合形成Fano体系。另外一个就是一个T型的双量子点结构，其中两个探测导线连接在某一个量子点上（称为1）。另外一个量子点（称为2）与量子点1侧耦合，这样和量子点1比起来，量子点2之中的能级就可以看做是离散能级，于是我们可以通过调节量子点2的能级位置来实现Fano效应。2002年，Kensuke Kobayashi 等人在实验上构造了一个可调节的Fano体系¹⁵，他们把一个量子点放置于AB环的其中一个臂上，第一次在实验上看到了介观体系的Fano效应。并且通过调节AB环的磁场，电子干涉的位相来获得不同的Fano线型。

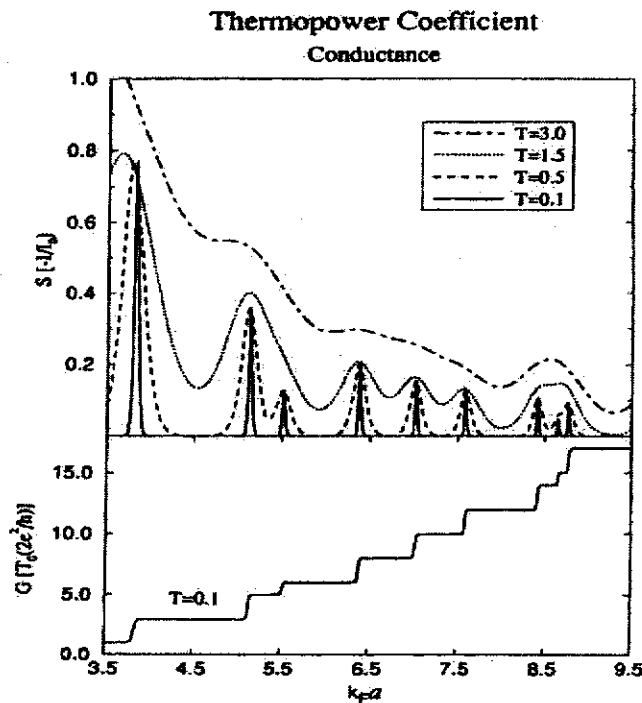


图 1.6 二维电子气热电系数随着费米面变化，在电导台阶跳跃时，热导会出现一个峰值。【C. R. Proetto, Phys. Rev. B. 44, 9096 (1991)】

1.5 热电效应

所谓的热电效应，是当受热物体中的电子(空穴)，随着温度梯度由高温区往低温区移动时，所产生电流或电荷堆积的一种现象。而这个效应的大小，则是用称为thermopower(Q)的参数来测量，其定义为 $Q=E/-dT$ (E 为因电荷堆积产生的电场， dT 则是温度梯度)。

1834年法国物理学家帕尔帖在铜丝的两头各接一根铋丝，将两根铋丝分别接到直流电源的正负极上，通电后，发现一个接头变热，另一个接头变冷。这说明两种不同材料组成的电回路在有直流电通过时，两个接头处分别发生了吸放热现象。这就是热电制冷的依据。半导体材料具有较高的热电势可以成功地用来做成小型热电制冷器。热电制冷的理论基础是固体的热电效应，它包括Seebeck效应、Peltire效应，Thomson效应，Nernst效应等。

Nernst效应是一种类似于Hall效应的热电效应，它指的是在存在磁场的情况下，用横向的温度差产生纵向的电压或者电流。电子系统的热电系数(Seebeck系数和Nernst系数)比电导更能反映体系的电子态密度[26]。但是对于低维系统或者纳米器件，比起输运性质来，热电系数却更加难以测量。但是随着近二十年来纳米技术和低维测量技术长足的进步，人们如今可以测量低维体系的热电系数了[如图1.6]。最近，有关于量子点热电系数的报道表明处于近藤区的量子点的热电系数与半经典的Mott关系有着明显的偏离。人们研究了金属铋的热电效应发现当费米面于朗道能级齐平的时候，Nernst系数就形成一个峰。

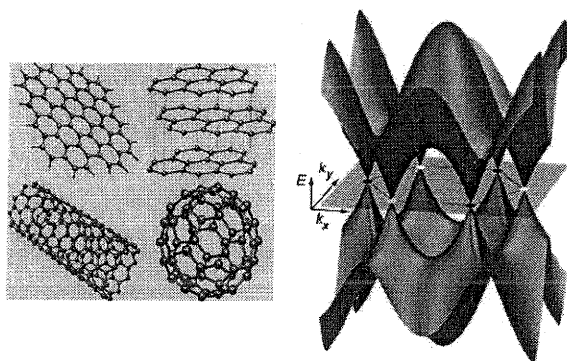


图 1.7 左图：碳原子构成的石墨烯，碳纳米管，石墨和富勒烯。右图：石墨烯在第一布里渊区附近的能带结构。【C. W. J. Beenakker, Rev. Mod. Phys. 80, 1337 (2008); A. H. Castro Neto, F. Guinea, N. M. R. Peres, K. S. Novoselov and A. K. Geim, Rev. Mod. Phys. 81, 109 (2009)】

1.6 石墨烯

石墨烯是碳原子紧密堆积成单层二维蜂窝状晶格结构的一种碳质新材料[如图1.7], 具有极好的结晶性及电学质量。石墨烯具有很高的载流子迁移率, 在室温下有微米级的平均自由程和很长的相干长度。石墨烯是纳米电路的理想材料, 也是验证量子效应的理想材料[27]。石墨烯具有明显的二维电子特性。石墨烯独特的电子结构也为粒子物理中难以观察到的相对论量子电动力学效应的验证提供了便捷的手段。在纳米电子器件方面, 石墨烯的可能应用包括: 室温弹道场效应管以及在同一片石墨烯上集成整个电路。近来所观测到的显著的量子霍尔效应和分数量子霍尔效应即证实了石墨烯是未来纳米电子器件的极有前景的材料。在2006-2008年间, 石墨烯已被制成弹道输运晶体管, 平面场效应管, 并且吸引了大批科学家的兴趣。人们不仅成功地制造了其平面场效应晶体管而且观测到了量子干涉效应。以前的石墨烯制备方法各有缺陷。最普通的是微机械分离法, 直接将石墨烯从较大的晶体上剥落下来。另一种获取的方法取向附生法则是利用生长基质的原子结构生长出石墨烯。

石墨烯的能带结构的第一布里渊区六角结构[见图1.7]。在布里渊区的六个角上, 在能量接近Dirac点时能量 E 和 \vec{k} 矢量呈线性关系 $|E| = \hbar v \delta k$ 。其中 v 是电子速度 $v \approx 10^6 \text{ m/s}$ 。线性关系表明电子群速度和电子能量是无关的: $v = \frac{\partial E}{\hbar \partial k}$ 。它表明电子在能量零点是无质量的费米子, 可以用相对论的Dirac方程来描述[28]。人们因此发现了一些特别奇特的效应[29]: Klein隧穿, Veselago透镜, 镜面Andreev反射等等。2006年, C. W. J. Beenakker[30]发现在石墨烯和超导组成的界面, 除了正常Andreev反射还有一种新的Andreev反射, 称之为反常Andreev反射或者镜面反射[如图1.8], 在此过程中, 反射空穴的方向和入射电子的方向呈镜面对称关系。从能带角度考虑, 如果入射电子和反射空穴都处于一个带中(导带或价带), 此时的反射通常是Andreev背散射。反之, 如果入射电子和反射空穴分初导带和价带, 则属于镜面Andreev反射。

1.7 论文的主要内容

从第二章开始, 介绍我们自己在介观输运方面的工作, 包括基于二维电子气的自旋极化流的产生装置, 量子点构成的约瑟夫森结的输运性质, 以及自旋Nernst效应和石墨烯方面的一些研究。

第二章, 我们从非平衡格林函数出发, 利用Dyson方程及Keldysh方程, 推导用格林函数表达的普遍电流公式。我们得出了在南部表象下的格林函数以及通过一个例子得到约瑟夫森电流的表达式。第三章我们研究基于二维电子气中的Rashba自旋轨道耦合, 提出并研究了用二维电子气介观体系中的电子干涉来产

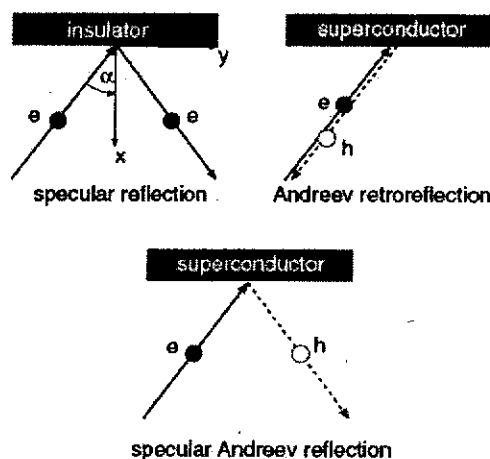


图 1.8 正常反常Andreev反射示意图。【C. W. J. Beenakker, Phys. Rev. Lett. 97, 067007 (2006)】

生自旋极化流的装置[31]。我们发现，对于一个多端口体系（端口数大于二），当相干电子通过的路程不等长时，最后输出的电流通常是自旋极化的。我们研究了输出极化电流的大小和极化率对体系参数的依赖关系，发现通过对环境参数的调节，二者可以同时得到相对较大的值。值得一提的是我们提出的产生自旋极化流的装置没有使用任何磁介质或者磁场。在第四章中我们使用第二章的非平衡格林函数方法研究了两个典型的由量子点构成的约瑟夫森结的输运性质[33]。我们主要研究约瑟夫森电流的Fano效应以及比较约瑟夫森电流与普通电流的属性性质的差异。这是因为与普通电流相比约瑟夫森电流是非耗散的。具体研究内容分别是：(1)约瑟夫森电流通过一个臂上含有一个量子点的Aharonov-Bohm (AB) 环的输运特性，AB环中还有可变化的磁通；(2)约瑟夫森电流通过T型双量子点的输运特性。在第五章，我们使用线性近似下的Landauer-Büttiker公式研究了四端口二维电子气在存在磁场和Rashba自旋轨道耦合下的热电效应，包括Nernst效应和自旋Nernst效应[32]。我们发现在自旋轨道耦合强度为零时，Nernst系数随着磁场的倒数曲线在费米能级于朗道能级齐平的时候会出现峰值。当自旋轨道强度不为零时，曲线峰值劈裂，而此时自旋Nernst系数也变得非零，且随着磁场倒数呈现振荡行为。自旋轨道耦合强度越大或磁场越弱时，自旋Nernst效应也越明显。结果表明Nernst系数和自旋Nernst系数都非常敏感于体系的边界条件和电子密度。第六章我们研究了目前非常热门的电子在石墨烯中的输运性质。得到了Andreev反射系数和线性电导。由于从超导-石墨烯界面经由Andreev反射的空穴的干涉效应，我们发现当两个超导导线的位相差为零时，反常Andreev反射消

失，而当两个超导导线的位相差 $\theta = \pi$ 时，正常Andreev反射消失。这表明我们可以使用此简单超导-石墨烯结构来控制正常以及反常Andreev反射。此外由于体系的大小影响，反射的空穴表现出波粒二象性，且随着体系尺寸大小表现出更多的波动性或者粒子性。对于小尺寸体系，反射的空穴表现出跟多的波动性，反之对于大尺寸体系，表现出更多粒子性。这样在大尺寸下，由于反射空穴的粒子性，对于正常或反常Andreev反射，我们可以在不同端口测量到反射空穴。第七章对论文做一个总结以及对将来工作的展望。

参考文献

- [1] P. A. Maksym, and T. Chakraborty, *Quantum Dots in a Magnetic Field: Role of Electron-Electron Interactions*, Phys. Rev. Lett. **65**, 108 (1990); P. A. Maksym, *Eckardt frame theory of interacting electrons in quantum dots*, Phys. Rev. B **53**, 10871 (1996); T. Chakraborty, and P. Pietiläinen, *Electron-Electron Interaction and the Persistent Current in a Quantum Ring*, Phys. Rev. B **50**, 8460 (1994); T. Chakraborty, and P. Pietiläinen, *Persistent Current in a Quantum Ring: Effects of Impurities and Interactions*, Phys. Rev. B **52**, 1932 (1995); M. A. Kastner, *The single-electron transistor*, Rev. Mod. Phys. **64**, 849 (1992); M. A. Kastner, *Artificial atoms*, Phys. Today **46**, (1) 24 (1993); A. P. Alivisatos, *Semiconductor clusters, nanocrystals, and quantum dots*, Science **271**, 933 (1996); R. C. Ashoori, *Electrons in artificial atoms*, Nature (London) **379**, 413 (1996); P. L. McEuen, *Artificial atoms: new boxes for electrons*, Science **278**, 1729 (1997); L. P. Kouwenhoven, T. H. Oosterkamp, M. W. S. Danoesastro, M. Eto, D. G. Austing, T. Honda, and S. Tarucha, *Excitation Spectra of Circular, Few-Electron Quantum Dots*, Science **278**, 1788 (1997); D. Gammon, *Semiconductor physics: Electrons in artificial atoms*, Nature (London) **405**, 899 (2000).
- [2] D. V. Averin, and K. K. Likharev, *Coulomb blockade of single-electron tunneling, and coherent oscillations in small tunnel junctions*, J. Low Temp. Phys. **62**, 345 (1986); D. V. Averin, and K. K. Likharev, *Mesoscopic Phenomena in Solids*, edited by B. L. Altshuler, P. A. Lee, and R. A. Webb (Elsevier, Amsterdam), p. 167. (1991); D. V. Averin, and Yu. V. Nazarov, *Single Charge Tunneling: Coulomb Blockade Phenomena in Nanostructures*, edited by H. Grabert, and M. H. Devoret (Plenum Press and NATO Scientific Affairs Division, New York/London), p. 217. (1992); L. P. Kouwenhoven, *Coupled quantum dots as artificial molecules*, Science **268**, 1440 (1995); L. P. Kouwenhoven, C. M. Marcus, P. L. McEuen, S. Tarucha, R. M. Westervelt, and N. S. Wingreen, *Mesoscopic Electron Transport*, edited by L. L. Sohn, L. P. Kouwenhoven, and G. Schön, Series E: Applied Sciences (Kluwer Academic, Dordrecht), Vol. 345, pp. 105 - 214 (1997);
- [3] S. M. Cronenwett, T. H. Oosterkamp, and L. P. Kouwenhoven, *A tunable Kondo effect in quantum dots*, Science **281**, 540 (1998); D. Goldhaber-Gordon, H. Shtrikman, D. Mahalu, D.A.-Magder, U. Meirav, and M.A. Kastner, *Kondo Effect in a Single-Electron Transistor*, Nature (London) **391**, 156 (1998); T. Inoshita, *Kondo effect in*

- quantum dots*, Science **281**, 526 (1998); S. Sasaki, S. De Franceschi, J.M. Elzerman, W.G. van der Wiel, M. Eto, S. Tarucha, and L.P. Kouwenhoven, *Kondo effect in an integer-spin quantum dot*, Nature (London) **405**, 764 (2000); W.G. van der Wiel, S. De Franceschi, T. Fujisawa, J.M. Elzerman, S. Tarucha, and L.P. Kouwenhoven, *The Kondo Effect in the Unitary Limit*, Science **289**, 2105 (2000); F. Simmel, R.H. Blick, J.P. Kotthaus, W. Wegscheider, and M. Bichler, *Anomalous Kondo Effect in a Quantum Dot at Nonzero Bias*, Phys. Rev. Lett. **83**, 804 (1999).
- [4] M. Grifoni and P. Häggi, *Driven Quantum Tunneling*, Phys. Rep. **304**, 229 (1998); G. Platero and R. Aguado, *Photoassisted Transport in Nanostructures*, Phys. Rep. **395**, 1 (2004); R. López, R. Aguado, G. Platero, and C. Tejedor, *Kondo Effect in ac Transport through Quantum Dots*, Phys. Rev. Lett. **81**, 4688 (1998); Z. J. Wu, K. D. Zhu, X. Z. Yuan, Y. W. Jiang, and H. Zheng, *Charge qubit dynamics in a double quantum dot coupled to phonons*, Phys. Rev. B **71**, 205323 (2005); V. N. Stavrou and X. Hu, *Two-electron spectra and the spin transition in ellipsoidal quantum dots*, Phys. Rev. B **72**, 075362 (2005); S. Vorojtsov, E. R. Mucciolo, and H. U. Baranger, *Phonon decoherence of a double quantum dot charge qubit.*, Phys. Rev. B **71**, 205322 (2005); V. López-Richard, S. S. Oliveira, and G.-Q. Hai, *Phonon-assisted tunneling in coupled semiconductor quantum dots*, Phys. Rev. B **71**, 075329 (2005) L. P. Kouwenhoven, S. Jauhar, K. McCormick, D. C. Dixon, and P. L. McEuen, *Photon-assisted tunneling through a quantum dot*, Phys. Rev. B **50**, 2019 (1994); L. P. Kouwenhoven, S. Jauhar, J. Orenstein, P. L. McEuen, Y. Nagamune, J. Motohisa, and H. Sakaki, *Observation of Photon-Assisted Tunneling through a Quantum Dot*, Phys. Rev. Lett. **73**, 3443 (1994);
- [5] A. Yacoby, M. Heiblum, D. Mahalu, and H. Shtrikman, *Coherence and Phase Sensitive Measurements in a Quantum Dot*, Phys. Rev. Lett. **74**, 4047 (1995); R. Schuster, E. Buks, M. Heiblum, D. Mahalu, V. Umansky, and H. Shtrikman, *Phase measurement in a quantum dot via a double-slit interference experiment*, Nature (London) **385**, 417 (1997).
- [6] U. Fano, *Effects of Configuration Interaction on Intensities and Phase Shifts*, Phys. Rev. **124**, 1866 (1961); A. C. Johnson, C. M. Marcus, M. P. Hanson, A.C. Gossard, *Coulomb-Modified Fano Resonance in a One-Lead Quantum Dot*, Phys. Rev. Lett. **93**, 106803 (2004); B. R. Bulka, P. Stefański, *Fano and Kondo Resonance in Electronic Current through Nanodevices*, Phys. Rev. Lett. **86**, 5128 (2001); W. Hofstetter, J. König, H. Schoeller, *Kondo Correlations and the Fano Effect in Closed Aharonov-*

- Bohm Interferometers*, Phys. Rev. Lett. **87**, 156803 (2001); R. Schuster, E. Buks, M. Heiblum, D. Mahalu, V. Umansky, Hadas Shtrikman, *Phase measurement in a quantum dot via a double-slit interference experiment*, Nature, **385**, 417 (1997); A. Yacoby, M. Heiblum, D. Mahalu, H. Shtrikman, *Coherence and Phase Sensitive Measurements in a Quantum Dot*, Phys. Rev. Lett. **74**, 4047 (1995); G. Hackenbroich, H. A. Weidenmüller, *Transmission through a Quantum Dot in an Aharonov-Bohm Ring*, Phys. Rev. Lett. **76**, 110 (1995); A. Fuhrer, P. Brusheim, T. Ihn, M. Sigrist, K. Ensslin, W. Wegscheider, M. Bichler, *Fano effect in a quantum-ring - quantum-dot system with tunable coupling*, Phys. Rev. B **73**, 205326 (2006); A. Ueda, M. Eto, *Resonant tunneling and Fano resonance in quantum dots with electron-phonon interaction*, Phys. Rev. B **73**, 235353 (2006); Q.-F. Sun, J. Wang, H. Guo, *Electronic spectrum of a two-dimensional quantum dot array in the presence of electric and magnetic fields in the Hall configuration*, Phys. Rev. B **71**, 165310 (2005).
- [7] K. Nomoto, R. Ugajin, T. Suzuki, and I. Hase, *Single electron-photon logic device using coupled quantum dots: Computation with the Fock ground state*, J. Appl. Phys. **79**, 291 (1996); Orlov, A. O., I. Amlani, G. H. Bernstein, C. S. Lent, and G. L. Snider, *Realization of a Functional Cell for Quantum-dot Cellular Automata*, Science **277**, 928 (1997).
- [8] A. Barenco, D. Deutsch, A. Ekert, and R. Jozsa, *Conditional quantum dynamics and logic gates*, Phys. Rev. Lett. **74**, 4083 (1995); R. Landauer, *Minimal Energy Requirements in Communication*, Science **272**, 1914 (1996); J. A. Brum, and P. Hawrylak, *Coupled Quantum Dots as Quantum exclusive OR Gate*, Superlattices Microstruct. **22**, 431 (1997); P. Zanardi, and F. Rossi, *Quantum Information in Semiconductors: Noiseless Encoding in a Quantum-Dot Array*, Phys. Rev. Lett. **81**, 4572 (1998).
- [9] D. Loss, and D. P. DiVincenzo, *Quantum Computation with Quantum Dots*, Phys. Rev. A **57**, 120 (1998).
- [10] M. Kemerink, and L. W. Molenkamp, *Stochastic Coulomb blockade in a double quantum dot*, Appl. Phys. Lett. **65**, 1012 (1994); L. W. Molenkamp, K. Flensberg, and M. Kemerink, *Scaling of the Coulomb Energy Due to Quantum Fluctuations in the Charge on a Quantum Dot*, Phys. Rev. Lett. **75**, 4282 (1995); N. C. van der Vaart, S. F. Godijn, Yu. V. Nazarov, C. J. P. M. Harmans, and J. E. Mooij, *Resonant Tunneling Through Two Discrete Energy States*, Phys. Rev. Lett. **74**, 4702 (1995); F. R. Waugh, M. J. Berry, C. H. Crouch, C. Livermore, D. J. Mar, R. M. Westervelt, K. L.

- Campman, and A. C. Gossard, *Measuring interactions between tunnel-coupled quantum dots*, Phys. Rev. B **53**, 1413 (1996); F. R. Waugh, M. J. Berry, D. J. Mar, R. M. Westervelt, K. L. Campman, and A. C. Gossard, *Single-Electron Charging in Double and Triple Quantum Dots with Tunable Coupling*, Phys. Rev. Lett. **75**, 705 (1995); R. H. Blick, R. J. Haug, J. Weis, D. Pfannkuche, K. von Klitzing, and K. Eberl, *Single-electron tunneling through a double quantum dot: The artificial molecule*, Phys. Rev. B **53**, 7899 (1996); R. H. Blick, D. Pfannkuche, R. J. Haug, K. von Klitzing, and K. Eberl, *Formation of a coherent mode in a double quantum dot*, Phys. Rev. Lett. **80**, 4032 (1998); T. Fujisawa, and S. Tarucha, *Resonant tunneling properties of single electron transistors with a novel double gate geometry*, Appl. Phys. Lett. **68**, 526 (1996);
- [11] F. Hofmann, T. Heinzl, D. A. Wharam, J. P. Kotthaus, G. Böhm, W. Klein, G. Tränkle, and G. Weimann, *Single electron switching in a parallel quantum dot*, Phys. Rev. B **51**, 13872 (1995); A. S. Adourian, C. Livermore, R. M. Westervelt, K. L. Campman, and A. C. Gossard, *Evolution of the Coulomb Gap in Tunnel-coupled Quantum Dots*, Superlattices Microstruct. **20**, 411 (1996); A. S. Adourian, C. Livermore, R. M. Westervelt, K. L. Campman, and A. C. Gossard, *Evolution of Coulomb blockade spectra in parallel coupled quantum dots*, Appl. Phys. Lett. **75**, 424 (1999);
- [12] V. Madhavan, W. Chen, T. Jamneala, M. F. Crommie, and N. S. Wingreen, *Tunneling into a Single Magnetic Atom: Spectroscopic Evidence of the Kondo Resonance*, Science **280**, 567 (1998) V. Madhavan, W. Chen, T. Jamneala, M.F. Crommie and N.S. Wingreen, *Local spectroscopy of a Kondo impurity: Co on Au(111)*, Phys. Rev. B **64** 165412 2001
- [13] A. A. Clerk, V. Ambegaokar, and S. Hershfield, *Andreev scattering and the Kondo effect*, Phys. Rev. B **61**, 3555 (2000); Q.-f. Sun, H. Guo, and T.-h. Lin, *Excess Kondo Resonance in a Quantum Dot Device with Normal and Superconducting leads: The Physics of Andreev-Normal Co-tunneling*, Phys. Rev. Lett. **87**,176601 (2001); J. Li, W.-D. Schneider, R. Berndt, and B. Delley, *Kondo Scattering Observed at a Single Magnetic Impurity*, Phys. Rev. Lett. **80**, 2893 (1998).
- [14] G. Dresselhaus, *Spin-Orbit Coupling Effects in Zinc Blende Structures*, Phys. Rev. **100**, 580 (1955); M. I. D'yakonov, and V. Y. Kachorovskii, *Spin Relaxation of Two-Dimensional Electrons in Noncentrosymmetric Semiconductors*, Sov. Phys. Semi-

- cond. **20**, 110 (1986); R. Wrinkler, *Spin-orbit Coupling Effects in Two-Dimensional Electron and Hole Systems* Springer-Verlag, Berlin (2003).
- [15] Y. A. Bychkov, and E. I. Rashba, *Properties of a 2D electron gas with lifted spectral degeneracy*, JETP Lett. **39**, 78 (1984); E. I. Rashba, *Properties of semiconductors with an extremum loop*, Sov. Phys. Solid State **2**, 1109 (1960).
- [16] D. M. Zumbühl, J. B. Miller, C. M. Marcus, K. Campman, and A. C. Gossard, *Spin-Orbit Coupling, Antilocalization, and Parallel Magnetic Fields in Quantum Dots*, Phys. Rev. Lett. **89**, 276803 (2002).
- [17] B. D. Josephson, *Possible new effects in superconductive tunneling*, Phys. Lett. **1**, 251 (1962); B. D. Josephson, *Coupled superconductors*, Rev. Mod. Phys. **36**, 216 (1964); B. D. Josephson, *Supercurrents Through Barriers*, Adv. Phys. **14**, 419 (1965); J. Bardeen and J. L. Johnson, *Josephson Current Flow in Pure Superconducting-Normal-Superconducting Junctions*, Phys. Rev. B **5**, 72 (1972).
- [18] A. Andreev, *The Thermal Conductivity of the Intermediate State in Superconductors*, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **46**, 1823 Sov. Phys. JETP **19**, 1228 (1964). P.F. Bagwell, *Suppression of the Josephson current through a narrow, mesoscopic, semiconductor channel by a single impurity*, Phys. Rev. B **46**, 12573 (1992).
- [19] N. N. Bogoliubov, *On the theory of superfluidity*, J. Phys. (Moscow), **11**, 23 (1947); N. Bogoliubov, *A New Method in the Theory of Superconductivity*, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **34**, 58 Sov. Phys. JETP **7**, 41 (1958); P. de Gennes, *Superconductivity of Metals and Alloys* Benjamin, New York, p.137 (1966).
- [20] I. O. Kulik, *A theory of resonant phenomena at superconducting tunneling*, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **57**, 1745 [Sov. Phys. JETP **30**, 944 (1969)];
- [21] C. W. J. Beenakker, *Universal Limit of Critical-Current Fluctuations in Mesoscopic Josephson Junctions*, Phys. Rev. Lett. **67**, 3836 (1991); Boöttcher, K., and T. Kopp, *Multichannel dc Josephson effect in ballistic point contacts*, Phys. Rev. B **55**, 11 670 (1997).
- [22] L. N. Bulaevskii, V. V. Kuzii, and A. A. Sobyenin, *Superconducting system with weak coupling to the current in the ground state*, Pis'ma Zh. Eksp. Teor. Phys. **25**, 314 [JETP Lett. **25**, 290 (1977)]; A. I. Buzdin, *Proximity effects in superconductor-ferromagnet heterostructures*, Rev. Mod. Phys. **77** 935 (2005).
- [23] J. E. Mooij, T. P. Orlando, L. Levitov, Lin Tian, C. H. van der Wal, S. Lloyd, *Josephson Persistent-Current Qubit*, Science **285** 1036 (1999); E. Terzioglu, and M.

- R. Beasley, *Complementary Josephson Junction circuits*, IEEE Trans. Appl. Supercond. **8**, 48 (1998); L. B. Ioffe, V. B. Geshkenbein, M. V. Feigelman, A. L. Fauchere, and G. Blatter, *Quiet SDS Josephson Junctions for Quantum Computing*, Nature (London) **398**, 679 (1999); A. Blais, and A. M. Zagoskin, *Operation of universal gates in a solid-state quantum computer based on clean Josephson junctions between d-wave superconductors*, Phys. Rev. A **61**, 042308 (2000); G. Blatter, V. B. Geshkenbein, and L. B. Ioffe, *Design aspects of superconducting-phase quantum bits*, Phys. Rev. B **63**, 174511 (2001).
- [24] V. V. Ryazanov, V. A. Oboznov, A. Yu. Rusanov, A. V. Veretennikov, A. A. Golubov, and J. Aarts, *Intrinsically frustrated superconducting array of superconductor-ferromagnet-superconductor π junctions*, Phys. Rev. Lett. **86**, 2427 (2001); T. Kontos, M. Aprili, J. Lesueur, F. Genet, B. Stephanidis, R. Boursier, *Josephson Junction through a Thin Ferromagnetic Layer: Negative Coupling*, Phys. Rev. Lett. **89**, 137007 (2002); J.P. Cleuziou, W. Wernsdorfer, V. Bouchiat, T. Ondarçuhu, M. Monthieux, *Carbon nanotube superconducting quantum interference device*, Nature Nanotechnology **1**, 53 (2006).
- [25] K. Kobayashi, H. Aikawa, S. Katsumoto, Y. Iye, *Tuning of the Fano Effect through a Quantum Dot in an Aharonov-Bohm Interferometer*, Phys. Rev. Lett. **88**, 256806 (2002); K. Kobayashi, H. Aikawa, S. Katsumoto, Y. Iye, *Mesoscopic Fano effect in a quantum dot embedded in an Aharonov-Bohm ring*, Phys. Rev. B **68**, 235304 (2003); K. Kobayashi, H. Aikawa, A. Sano, S. Katsumoto, Y. Iye, *Fano resonance in a quantum wire with a side-coupled quantum dot*, Phys. Rev. B **70**, 035319 (2004).
- [26] A.A. Abrikosov, *Fundamentals of the theory of metals* (NorthHolland Amsterdam, 1988); J.M. Iiman, *Electrons and phonons* (Oxford university Press, Oxford, U.K., 1960); C.W.J. Beenakker and A.A.M. Staring, *Theory of the thermopower of a quantum dot*, Phys. Rev. B **46**, 9667 (1992); A. S. Dzurak, C. G. Smith, C. H. W. Barnes, M. Pepper, L. Martin-Moreno, C. T. Liang, D. A. Ritchie, and G. A. C. Jones, *Thermoelectric signature of the excitation spectrum of a quantum dot*, Phys. Rev. B **55**, R10197 (1997); R. Scheibner, H. Buhmann, D. Reuter, M. N. Kiselev, and L. W. Molenkamp, *Thermopower of a Kondo Spin-Correlated Quantum Dot*, Phys. Rev. Lett. **95**, 176602 (2005); R. Scheibner, E. G. Novik, T. Borzenko, M. König, D. Reuter, A. D. Wieck, H. Buhmann, and L. W. Molenkamp, *Sequential and cotunneling behavior in the temperature-dependent thermopower of few-electron quantum dots*, Phys. Rev. B **75**, R041301 (2007); L. W. Molenkamp, H. van Houten, C. W. J.

- Beenakker, R. Eppenga, and C.T. Foxon, *Quantum oscillations in the transverse voltage of a channel in the nonlinear transport regime*, Phys. Rev. Lett. **65**, 1052 (1990); M. Cutler and N. F. Mott, *Observation of Anderson Localization in an Electron Gas*, Phys. Rev. **181** 1336, (1969); K. Behnia, M.-A. Méasson, and Y. Kopelevich, *Oscillating Nernst-Ettingshausen Effect in Bismuth across the Quantum Limit*, Phys. Rev. Lett. **98**, 166602 (2007); K. Behnia, L. Balicas, and Y. Kopelevich, *Signatures of Electron Fractionalization in Ultraquantum Bismuth*, Science **317**, 1729 (2007).
- [27] K. S. Novoselov, A. K. Geim, S. V. Morozov, D. Jiang, Y. Zhang, S. V. Dubonos, I. V. Grigorieva, and A. A. Firsov, *Electric field effect in atomically thin carbon films*, Science **306**, 666, (2004); K. S. Novoselov et al., *Two-dimensional gas of massless Dirac fermions in graphene*, Nature (London) **438**, 197 (2005).
- [28] D. P. DiVincenzo, and E. J. Mele, *Self-Consistent Effective Mass Theory for Intralayer Screening in Graphite Intercalation Compounds*, Phys. Rev. B **29**, 1685 (1984); G. W. Semenoff, *Condensed-Matter Simulation of a Three-Dimensional Anomaly*, Phys. Rev. Lett. **53**, 2449 (1984).
- [29] M. I. Katsnelson, K. S. Novoselov, and A. K. Geim, *Chiral Tunnelling and the Klein Paradox in Graphene*, Nature Phys. **2**, 620 (2006); V.V. Cheianov, V. Fal'ko, and B. L. Altshuler, *The Focusing of Electron Flow and a Veselago Lens in Graphene P-n Junctions*, Science **315**, 1252 (2007).
- [30] C. W. J. Beenakker, *Specular Andreev reflection in Graphene*, Phys. Rev. Lett. **97**, 067007 (2006).
- [31] Shu-guang Cheng, Qing-feng Sun, and X C Xie, *A spin polarized device constructed with spin-orbit coupled semiconductors*, J. Phys.: Condens. Matter **18** 10553 (2006)
- [32] Shu-guang Cheng, Yanxia Xing, Qing-feng Sun, and X. C. Xie, *Spin Nernst effect and Nernst effect in two-dimensional electron systems*, Physical Review B **78** 045302 (2008)
- [33] Shu-guang Cheng and Qing-feng Sun, *Josephson current transport through T-shaped double quantum dots*, J. Phys.: Condens. Matter **20** 505202 (2008)
- Shu-guang Cheng, Yanxia Xing, Qing-feng Sun, and X. C. Xie, *Supercurrent and its Fano effect in a Josephson Aharonov-Bohm ring*, Eur. Phys. J. B **67**, 551-557 (2009)

第二章 量子运输的格林函数方法

本章我们首先用非平衡格林函数方法推导出一般的电流公式。得出Nambu表象下的超导格林函数后，再通过一个例子用电流公式计算通过约瑟夫森结的电流。

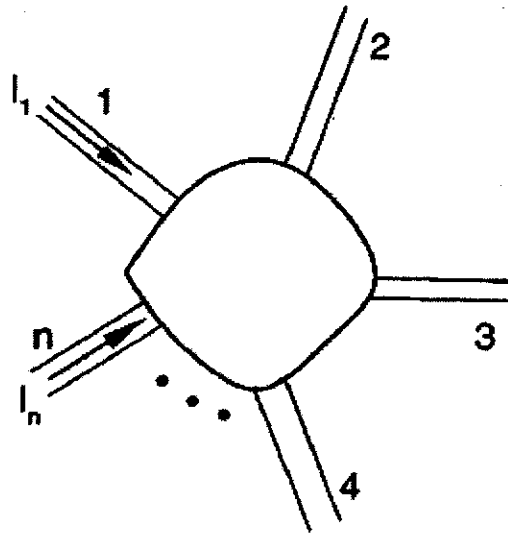


图 2.1 多个导线耦合到一个量子点（或者受限小体系）的示意图。受限体系可以存在电子-电子相互作用，电声子相互作用等，导线可以是正常金属或者超导导线。

2.1 普遍电流公式

我们考虑多个导线耦合到一个受限区域的体系，如图2.1所示。导线可以分别是正常金属或者超导导线，中间区域可以存在电子-电子相互作用，电子声子相互作用，以及其他散射等等[1]。整个体系的哈密顿表示为

$$H = \sum_i^n H_i + H_c + \sum_i H_{Ti} \quad (2.1)$$

其中 i 求和是对导线求和， H_i 和 H_d 分别是导线和中心散射区的哈密顿， H_{Ti} 则是中间区和导线 i 的耦合。对于正常金属导线， $H_i = \sum_{\sigma k \in i} C_{k\sigma}^\dagger C_{k\sigma}$ ，其中 $C_{k\sigma}^\dagger$ ($C_{k\sigma}$)分别是导线 i 中的自旋为 σ 的自由电子产生湮灭算符，求和要对导线 i 中的电子进行。对于超导导线 $H_i = \sum_{\sigma k \in i} \epsilon_k C_{k\sigma}^\dagger C_{k\sigma} + \sum_{k \in i} (\Delta_i C_{k\downarrow} C_{-k\uparrow} + \Delta_i^* C_{-k\uparrow}^\dagger C_{k\downarrow}^\dagger)$ ，其中 Δ_i 是超导导线 i 的序参量。中间散射区的哈密顿可以表

示为 $H_c = \sum_{\beta} d_{\beta}^{\dagger} d_{\beta} + U(d_{\beta}^{\dagger}, d_{\beta})$, 这里 d_{β}^{\dagger} d_{β} 分别是中间区的电子产生湮灭算符, $U(d_{\beta}^{\dagger}, d_{\beta})$ 表示中间区可能存在的各种散射和相互作用。耦合哈密顿通常采用 $H_{Ti} = \sum_{k \in i\sigma} (V_{k\sigma, \beta} C_{k\sigma}^{\dagger} d_{\beta\sigma} + h.c.)$ 。

下面我们用正常导线模型来给出电流表达式 (对于超导导线在Nambu表象下求解比较方便, 但过程类似)。于是通过导线 i 的电流就可以用导线 i 中的粒子数算符对时间的微分得到[2]:

$$\begin{aligned} J_i &= -e \frac{d\langle N_i \rangle}{dt} \\ &= -e \frac{d\langle \sum_{i\sigma} C_{k\sigma}^{\dagger} C_{k\sigma} \rangle}{dt} \\ &= -\frac{ie}{\hbar} \langle [H, N_i] \rangle \end{aligned} \quad (2.2)$$

其中, $\langle \dots \rangle$ 表示对海森堡算符求态平均以及统计平均。通过计算对易关系, 我们得到

$$J_i = \frac{ie}{\hbar} \sum_{\beta k \in i\sigma} [V_{k\sigma, \beta} \langle C_{k\sigma}^{\dagger} d_{\beta} \rangle - V_{k\sigma, \beta}^* \langle d_{\beta}^{\dagger} C_{k\sigma} \rangle] \quad (2.3)$$

我们把格林函数 $G_{\beta, k}^{<}(t_1 - t_2)$ 和 $G_{k, \beta}^{<}(t_1 - t_2)$ 定义为 $G_{\beta, k}^{<}(t_1 - t_2) \equiv i \langle C_{k\sigma}^{\dagger}(t_2) d_{\beta}(t_1) \rangle$, $G_{k, \beta}^{<}(t_1 - t_2) \equiv i \langle d_{\beta}(t_2)^{\dagger} C_{k\sigma}(t_1) \rangle$, 同时有 $G_{\beta, k}^{<} = -[G_{k, \beta}^{<}]^*$ 。推迟格林函数定义为: $G_{\beta, k}^r(t_1 - t_2) \equiv -i \theta(t_1 - t_2) \langle \{d_{\beta}(t_1), C_{k\sigma}^{\dagger}(t_2)\} \rangle$ 这样2.3可以表示为

$$J_i = \frac{2e}{\hbar} \text{Re} \left[\sum_{\beta k \in i\sigma} V_{k\sigma, \beta} G_{\beta, k}^{<}(t, t) \right] \quad (2.4)$$

因此, 对电流的求解就转化为格林函数 $G_{\beta, k}^{<}(t_1 - t_2)$ 的求解。

接下来利用闭合回路上的Dyson方程 $G = g + g \Sigma G$ 求解非平衡格林函数 $G_{k, \beta}^{<}(t, t)$ 和 $G_{\beta, k}^{<}(t, t)$ 。

关于 $G^{r, a}$ 的Dyson方程:

$$G^{r, a} = g^{r, a} + g^{r, a} \Sigma^{r, a} G^{r, a} = g^{r, a} + G^{r, a} \Sigma^{r, a} g^{r, a} \quad (2.5)$$

关于 $G^{<}$ 的Dyson方程:

$$\begin{aligned} G^{<} &= g^{<} + g^r \Sigma^r G^{<} + g^r \Sigma^{<} G^a + g^{<} \Sigma^a G^a \\ &= g^{<} + G^r \Sigma^r g^{<} + G^r \Sigma^{<} g^a + G^{<} \Sigma^a g^a \end{aligned} \quad (2.6)$$

利用方程2.5和2.6, 格林函数 $G_{\beta, k}^{<}(t_1 - t_2)$ 可以用下式求得:

$$G_{\beta, k}^{<}(t_1 - t_2) = \sum_{\alpha} \int dt V_{k\sigma, \beta}^* [G_{\beta, \alpha}^r(t_1 - t) g_k^{<}(t - t_2) + G_{\beta, \alpha}^{<}(t_1 - t) g_k^a(t - t_2)] \quad (2.7)$$

这里求和指标 α 的求和对象是中心区的电子。对上式作傅里叶变换到能量空间, 得到:

$$G_{\beta,k}^<(\epsilon) = \sum_{\alpha} V_{k\sigma\beta}^* [G_{\beta,\alpha}^r(\epsilon) g_k^<(\epsilon) + G_{\beta,\alpha}^<(\epsilon) g_k^a(\epsilon)] \quad (2.8)$$

把方程2.8带回到方程2.9, 我们得到了在能量空间下电流的表达式:

$$J_i = \frac{2e}{\hbar} \int \frac{d\epsilon}{2\pi} \text{Re} \left\{ \sum_{\alpha\beta k \in i\sigma} V_{k\sigma\beta} V_{k\sigma\beta}^* [G_{\beta,\alpha}^r(\epsilon) g_k^<(\epsilon) + G_{\beta,\alpha}^<(\epsilon) g_k^a(\epsilon)] \right\} \quad (2.9)$$

这个结果就是用格林函数求解电流介观运输的最主要的结果。

对于正常金属导线, 容易得到能量表象下的格林函数 $g_k^r(\epsilon) = \sum_{k \in i} \frac{1}{\epsilon - \epsilon_k + i\eta}$, 其中 ϵ_k 是导线中电子能量, η 是为防止积分发散而引入的无穷小虚部。而对于超导导线, 过程稍微复杂。

2.2 超导导线格林函数

下面我们使用运动方程来推导超导导线格林函数 g_R^r 和 $g_R^<$ 。类似的, 格林函数定义如下:

$$\ll A(\tau) | B(\tau') \gg^{r,a} \equiv \mp i\theta(\pm\tau \mp \tau') \langle \{A(\tau), B(\tau')\} \rangle \quad (2.10)$$

对2.10作运动方程我们得到

$$i \frac{\partial}{\partial \tau} \ll A(\tau) | B(\tau') \gg^r = \delta(\tau - \tau') \langle \{A(\tau), B(\tau')\} \rangle + \ll A(\tau) | B(\tau') \gg^r \quad (2.11)$$

对方程2.11作傅立叶变换得到:

$$(E + i0^+) \ll A | B \gg_E^r = \langle A, B \rangle + \ll [A, H] | B \gg_E^r \quad (2.12)$$

从超导导线哈密顿出发:

$$H_R = \sum_{p,\sigma} \epsilon_p a_{p\sigma}^\dagger a_{p\sigma} + \sum_p [\Delta^* a_{p\downarrow} a_{-p\uparrow} + \Delta a_{-p\uparrow}^\dagger a_{p\downarrow}^\dagger] \quad (2.13)$$

采用Nambu表象表, 求解运动方程我们得到:

$$(E + i0^+) g_{p,11}^r = 1 + \epsilon_p g_{p,11}^r + \Delta g_{p,21}^r \quad (2.14)$$

和

$$(E + i0^+) g_{p,21}^r = -\epsilon_p g_{p,21}^r + \Delta^* g_{p,11}^r \quad (2.15)$$

联立求解上两个方程, 我们能得到超导格林函数 $g_{p,11}^r$ 和 $g_{p,21}^r$:

$$g_{p,11}^r = \frac{E + \epsilon_p + i0^+}{(E + i0^+)^2 - \epsilon_p^2 - |\Delta|^2} \quad (2.16)$$

$$g_{p,21}^r = \frac{\Delta^*}{(E + i0^+)^2 - \epsilon_p^2 - |\Delta|^2} \quad (2.17)$$

采用宽带近似, 在能量空间下变求和为积分, g_{11}^r 和 g_{21}^r 写为:

$$g_{11}^r = \rho_R^N E \int d\epsilon_p \frac{1}{(E + i0^+)^2 - \epsilon_p^2 - |\Delta|^2} \quad (2.18)$$

$$g_{21}^r = \rho_R^N \Delta^* \int d\epsilon_p \frac{1}{(E + i0^+)^2 - \epsilon_p^2 - |\Delta|^2} \quad (2.19)$$

用同样的方法得到 g_{22}^r 和 g_{12}^r 。我们得到: g^r :

$$g_R^r = \rho_R^N \begin{pmatrix} E & \Delta \\ \Delta^* & E \end{pmatrix} \int d\epsilon_p \frac{1}{(E + i0^+)^2 - \epsilon_p^2 - |\Delta|^2} \quad (2.20)$$

使用留数定理求解以上积分, 最后我们得到 g_R^r 表达式:

$$g_R^r = \rho_R^N \frac{-i\pi\nu E}{\sqrt{E^2 - |\Delta|^2}} \begin{pmatrix} 1 & \Delta/E \\ \Delta^*/E & 1 \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

其中当 $E > -|\Delta|$ 时, $\nu = 1$; 其它情况下 $\nu = -1$ 。

同样可以得到能量表象下超导自能的表达式:

$$\Sigma_R^r(E) = \frac{-i}{2} \frac{\nu\Gamma}{\sqrt{E^2 - \Delta^2}} \begin{pmatrix} E & -\Delta \\ -\Delta & E \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

其中 $\Gamma = 2\pi\rho_N|t|^2$, 当 $E > -\Delta$, $\nu = 1$; 否则 $\nu = -1$ 。

$$\Sigma_R^<(E) = i\theta(|E| - |\Delta|)f(E) \frac{\nu\Gamma}{\sqrt{E^2 - \Delta^2}} \times \begin{pmatrix} E & -\Delta \\ -\Delta & E \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

$$\Gamma_R(E) = \theta(|E| - |\Delta|) \frac{\nu\Gamma}{\sqrt{E^2 - \Delta^2}} \times \begin{pmatrix} E & -\Delta \\ -\Delta & E \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

$\Gamma = |t_{k,R,\sigma}|^2 \rho_N(E)$, 其中 $\rho_N(E)$ 是正常导线态密度, $f(E)$ 为费米分布函数。

2.3 一个例子

我们用以上两节的电流公式和超导格林函数来求解一个模型: 通过一个有量子点在一臂的 AB 环约瑟夫森电流表达式。这部分内容可以看做第四章第一个例子的详细推导[4]。系统的哈密顿是

$$H = H_L + H_R + H_{dot} + H_T \quad (2.25)$$

其中

$$\begin{aligned} H_\alpha &= \sum_{k\sigma} \epsilon_k C_{k\sigma,\alpha}^\dagger C_{k\sigma,\alpha} + \sum_k (\Delta_\alpha C_{k1,\alpha} C_{-k1,\alpha} + \Delta_\alpha^* C_{-k1,\alpha}^\dagger C_{k1,\alpha}^\dagger) \\ H_T &= \sum_{k\sigma,\alpha} (t_\alpha C_{k\sigma,\alpha}^\dagger d_\sigma + t_\alpha d_\sigma^\dagger C_{k\sigma,\alpha}) + \sum_{k,k'} (t^* C_{k\sigma,L}^\dagger C_{k'\sigma,R} + t C_{k'\sigma,R}^\dagger C_{k\sigma,L}) \\ H_{dot} &= \sum_\sigma \epsilon_\sigma d_\sigma^\dagger d_\sigma \end{aligned} \quad (2.26)$$

这里 H_α 是超导导线的格林函数, $\Delta_\alpha = \Delta_\alpha e^{i\theta_\alpha}$ 是超导导线的序参量, 通常是复数。在求解之前我们用算符 $U = \exp \sum_{k\sigma,\alpha} \frac{i\theta_\alpha}{2\hbar} C_{k\sigma,\alpha}^\dagger C_{k\sigma,\alpha}$ 要对这个哈密顿做个么正变换。

以算符 $C_{k\sigma,\alpha}$ 为例:

$$U C_{k\sigma,\alpha} U^\dagger = \sum_m \frac{(\sum_{k\sigma,\alpha} \frac{i\theta_\alpha}{2\hbar} C_{k\sigma,\alpha}^\dagger C_{k\sigma,\alpha})^m}{m!} C_{k\sigma,\alpha} \sum_n \frac{(\sum_{k\sigma,\alpha} \frac{-i\theta_\alpha}{2\hbar} C_{k\sigma,\alpha}^\dagger C_{k\sigma,\alpha})^n}{n!}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_m \frac{\left(\frac{i\theta_\alpha}{2\hbar} C_{k\sigma,\alpha}^\dagger C_{k\sigma,\alpha}\right)^m}{m!} C_{k\sigma,\alpha} \sum_n \frac{\left(\frac{-i\theta_\alpha}{2\hbar} C_{k\sigma,\alpha}^\dagger C_{k\sigma,\alpha}\right)^n}{n!} \\
&= C_{k\sigma,\alpha} \sum_n \frac{\left(\sum_{k\sigma,\alpha} \frac{-i\theta_\alpha}{2\hbar} C_{k\sigma,\alpha}^\dagger C_{k\sigma,\alpha}\right)^n}{n!} \\
&= C_{k\sigma,\alpha} C_{k\sigma,\alpha}^\dagger C_{k\sigma,\alpha} \sum_n \frac{\left(\frac{-i\theta_\alpha}{2\hbar}\right)^n}{n!} \\
&= C_{k\sigma,\alpha} e^{\frac{-i\theta_\alpha}{2\hbar}}
\end{aligned}$$

同样的我们可以得到

$$UC_{k\sigma,\alpha}^\dagger U^\dagger = C_{k\sigma,\alpha} e^{\frac{i\theta_\alpha}{2\hbar}}.$$

最后哈密顿变成:

$$\begin{aligned}
H_\alpha &= \sum_{k\sigma} \varepsilon_k C_{k\sigma,\alpha}^\dagger C_{k\sigma,\alpha} + \sum_k |\Delta_\alpha| (C_{k\downarrow,\alpha} C_{-k\uparrow,\alpha} + C_{-k\uparrow,\alpha}^\dagger C_{k\downarrow,\alpha}^\dagger) \\
H_T &= \sum_{k\sigma,\alpha} (t_\alpha e^{\frac{i\theta_\alpha}{2\hbar}} C_{k\sigma,\alpha}^\dagger d_\sigma + t_\alpha e^{\frac{-i\theta_\alpha}{2\hbar}} d_\sigma^\dagger C_{k\sigma,\alpha}) \\
&\quad + \sum_{k,k'} (t e^{-i\frac{2\phi_0 - \theta_L + \theta_R}{2\hbar}} C_{k\sigma,L}^\dagger C_{k'\sigma,R} + t e^{i\frac{2\phi_0 - \theta_L + \theta_R}{2\hbar}} C_{k'\sigma,R}^\dagger C_{k\sigma,L}) \\
H_{dot} &= \sum_\sigma \varepsilon_\sigma d_\sigma^\dagger d_\sigma. \tag{2.27}
\end{aligned}$$

经过这个变换, 超导的序参量 Δ 变到实数, 超导位相也出现在隧穿系数上, 这方便了计算。

类似地, 通过左导线的电流可以用左导线电荷数算符对时间微分求得 $N = \sum_{k\sigma} C_{k\sigma L}^\dagger C_{k\sigma L}$

$$\begin{aligned}
I_L = -e\langle \dot{N} \rangle &= \frac{4e}{\hbar} \text{Re} [tL e^{\frac{i\theta_L}{2\hbar}} G_{dL,11}^<(t,t) + t e^{-i\frac{2\phi_0 - \theta_L + \theta_R}{2\hbar}} G_{RL,11}^<(t,t)] \\
&= \frac{4e}{\hbar} \text{Re} \int \frac{d\omega}{2\pi} [tL e^{\frac{i\theta_L}{2\hbar}} G_{dL,11}^<(\omega) + t e^{-i\frac{2\phi_0 - \theta_L + \theta_R}{2\hbar}} G_{RL,11}^<(\omega)] \tag{2.28}
\end{aligned}$$

右导线也类似(二者从物理上要求是相等的):

$$I_R = \frac{4e}{\hbar} \text{Re} \int \frac{d\omega}{2\pi} [tR G_{dR,11}^<(\omega) + t G_{LR,11}^<(\omega)] \tag{2.29}$$

格林函数在Nambu表象下定义如下[3]:

$$G_{d,kL}^<(t,t') = i \sum_k \begin{pmatrix} \langle C_{k\uparrow,L}^\dagger(t') d_\uparrow(t) \rangle & \langle C_{k\downarrow,L}^\dagger(t') d_\uparrow(t) \rangle \\ \langle C_{k\uparrow,L}^\dagger(t') d_\downarrow(t) \rangle & \langle C_{k\downarrow,L}^\dagger(t') d_\downarrow(t) \rangle \end{pmatrix} \tag{2.30}$$

$$G_{k'R,kL}^<(t,t') = i \sum_{k,k'} \begin{pmatrix} \langle C_{k\uparrow,L}^\dagger(t') C_{k'\uparrow,R}(t) \rangle \langle C_{k\downarrow,L}^\dagger(t') C_{k'\downarrow,R}(t) \rangle \\ \langle C_{k\uparrow,L}^\dagger(t') C_{k'\downarrow,R}(t) \rangle \langle C_{k\downarrow,L}^\dagger(t') C_{k'\uparrow,R}(t) \rangle \end{pmatrix} \quad (2.31)$$

同样耦合系数（包括量子点和超导导线之间的耦合以及超导导线之间的直接耦合）也要写在Nambu表象下

$$\mathbf{t}_\alpha = t_\alpha \begin{pmatrix} e^{i\theta_\alpha/2} & 0 \\ 0 & -e^{-i\theta_\alpha/2} \end{pmatrix} \quad (2.32)$$

$$\mathbf{t} = t \begin{pmatrix} e^{i(2\phi_0+\theta_L-\theta_R)/2} & 0 \\ 0 & -e^{-i(2\phi_0+\theta_L-\theta_R)/2} \end{pmatrix} \quad (2.33)$$

因此只要求解格林函数 $G_{dL}^r(\omega)$ 和 $G_{RL}^r(\omega)$ ，就能算出电流表达式2.28。我们注意到方程2.28由两部分组成，含有量子点与导线耦合系数 t_α 的部分和含有超导导线之间直接耦合 t 的部分。定性分析一下，如果 $t_\alpha = 0$ ，就是超导导线之间弱耦合的模型，如果 $t = 0$ ，模型就简化为单个量子点构成的约瑟夫森结。在一些文献中能找到相应的简化过的公式

参考文献

- [1] N. S. Wingreen, A.-P. Jauho, and Y. Meir, *Time-dependent transport through a mesoscopic structure*, Phys. Rev. B, **48**, 8487-8490 (1993); A.-P. Jauho, N. S. Wingreen, and Y. Meir, *Time-dependent transport in interacting and noninteracting resonant-tunneling systems*, Phys. Rev. B, **50**, 5528-5544 (1994)
- [2] H. Haug and A. P. Jauho, *Quantum Kinetics in Transport and Optics of Semiconductors*, Springer, Berlin, (1996).
- [4] Y. Nambu, *Quasi-particles and Gauge invariance in theory of superconductivity*, Phys. Rev. **117**, 648-663 (1960).
- [4] Q.-f. Sun, J. Wang, and T.-h. Lin, *Control of the supercurrent in a mesoscopic four-terminal Josephson junction*, Phys. Rev. B **62**, 648 (2000); H.T. Ilhan, H.V. Demir and P.F. Bagwell, *Andreev-level spectroscopy and Josephson-current switching in a three-terminal Josephson junction*, Phys. Rev. B **58**, 15120 (1998); L.-F. Chang, P.F. Bagwell, *Control of Andreev-level occupation in a Josephson junction by a normal-metal probe*, Phys. Rev. B **55** 12678 (1997).
- [5] J. C. Curvas, A. Martin-Rodero, and A. L. Yeyti, *Hamiltonian approach to the transport properties of superconducting quantum point contacts*, Phys. Rev. B, **54**, 7366-7379 (1996).

第三章 一个产生自旋极化流的装置

摘要: 基于二维电子气中的Rashba自旋轨道耦合, 我们提出并研究了利用二维电子气介观体系中的电子干涉来产生自旋极化流的装置。我们发现, 对于一个多端口体系(端口数大于二), 当相干的电子通过的路径不等长时, 最后输出的电流通常是自旋极化的。这与通常的二端口体系输出非极化电流的现象形成了明显的对比。我们研究了输出极化电流的大小和极化率对体系参数的依赖关系, 发现通过适当的参数调节, 二者都可以同时得到相对较大的值。值得一提的是这个产生自旋极化流的装置没有使用任何磁介质或者磁场, 此外, 对于二维电子气的要求也不高(可以存在杂质), 对二维电子气中的Rashba自旋轨道耦合的均匀性也没有什么特别的要求。在今天的技术条件下, 我们提出的自旋极化装置可以很容易地在实验上实现。

3.1 引言

随着半导体工艺的进步, 如何在二维电子气中产生可控制的自旋极化流成为凝聚态物理中的一个热点的课题。它对于制造自旋电子器件有着重要的意义[1, 2]。在过去的十多年中, 人们在这方面作了很多的工作。最自然的一个想法就是自旋注入: 即从铁磁导线中把自旋极化的电子注入到半导体中[1, 5, 6]。然而, 由于电导在铁磁金属和半导体二维电子气之间的不匹配, 自旋注入的几率通常都很小[6, 7]。最近, 人们发现二维电子气中广泛存在着Rashba自旋轨道耦合相互作用, 这是二维电子气的内禀的属性, 它源于电子相对论效应的低能极限。基于Rashba自旋轨道耦合, 有很多工作致力于在不使用磁介质的情况下产生电子自旋极化流[6-8]。Voskoboynikov 和Koga 及其合作者提出了双阱和三阱的隧穿结中存在可用作自旋阀的自旋轨道耦合。Ionicioiu 和D'Amico利用Rashba自旋轨道耦合设计了Mach-Zehnder干涉环用来产生自旋极化流。在他们提出的干涉环中, 只有一臂存在自旋轨道耦合, 且有磁场穿过干涉环。Sun和Xie也曾提出在一个非均匀多端口Rashba体系存在着自发的自旋极化流[8]。此外, 由于Rashba自旋轨道耦合, 一些新的效应也被提了出来。比如, 自旋Hall效应和量子自旋Hall效应[9]。前者只依靠横向的电压差就可以产生纵向的自旋流, 而后者, 只用垂直于样品方向的非均匀电场就可以产生自旋流。

在本章中, 我们基于Rashba自旋轨道耦合提出了一个产生自旋极化流的装置。这个装置在输出电流较大的情况下仍能保证输出的自旋极化流的极化率较大。同以往的工作相比, 我们提出的这个装置有以下优点:

- (1) 未使用磁场或者任何磁介质

(2) 对体系的Rashba自旋轨道耦合强度的均匀性没有什么要求

(3) 在电压差的方向上产生自旋极化流，特别地，极化流的大小在电压差方向大于垂直于电压方向

(4) 我们的装置不仅可以在弹道区工作，在存在散射的情况下也可以工作。

3.2 实验装置以及原理介绍

装置示意图如图3.1 (a) 所示，在一个存在Rashba自旋轨道耦合的二维电子气上构造一个由两个反射电极和两个半反射电极组成的Mach - Zehnder干涉环。体系的长度L和宽度W如图所示，皆远小于电子的位相相干长度。首先我们考虑弹道运输的情况，事实上我们的体系也可以工作在散射区。

入射电子的波函数表示为

$$\phi = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\alpha}{2})e^{i\beta/2} \\ \sin(\frac{\alpha}{2})e^{-i\beta/2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi \\ \chi \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

其中 α 和 β 是自旋欧拉角。入电子波函数 ϕ 首先碰到半反电极A，随即就被分成相等的两部分：透射波 $\frac{\sqrt{2}}{2}\phi$ 和反射波 $\frac{\sqrt{2}}{2}\phi e^{i\pi/2}$ 。在这个过程中，反射波获得一个额外的位相 $\pi/2$ 。此后，透射波直接由通道1传输到电极B。而反射波经由电极1和2的反射，最终也到达电极B。在后在电极B的位置，两列波相遇发生干涉，一部分从电极B的右方输出，另一部分从电极B的上方输出。我们感兴趣的是前者。

在Rashba自旋轨道耦合的驱动下，电子会随着电子的传播产生自旋进动。由此，电子波函数会由 ϕ 变化为 $R_{\hat{r}}(\theta)\phi$ 。变换矩阵 $R_{\hat{r}}$ 表示为：

$$R_{\hat{r}}(\theta) = \mathbf{I} \cos(\theta/2) - i\hat{r} \cdot \boldsymbol{\sigma} \sin(\theta/2), \quad (3.2)$$

其中 \mathbf{I} 是单位矩阵， $\boldsymbol{\sigma}$ 是泡利矩阵。矢量 $\hat{r} = \hat{z} \times \hat{D}$ 的方向在二维电子气的平面之内，且垂直于电子进动方向 \hat{D} 。角度 $\theta = -m^* \alpha_R D / \hbar^2$ 表示了自旋进动的角度随着正比于电子传输的距离 D 。 m^* 表示电子的有效质量， α_R 表示了Rashba自旋轨道耦合的强度[11, 13]。举个例子，电子从电极A传输到B的波函数变换算符表示为 $R_{\hat{y}}(\theta_L)$ ，其中 $\theta_L = -m^* \alpha_R L / \hbar^2$ ；电子从电极A到达电极1的变换算符为 $R_{\hat{x}}(\theta_W)$ 其中 $\theta_W = -m^* \alpha_R W / \hbar^2$ 。首先我们假定二维电子气平面的Rashba自旋轨道耦合系数 α_R 是个常数。由于电子通过路径1和路径2的传播路径长度不同，处于这两个路径的电子就有一个位相差 $\gamma = 2kW$ ，其中， k 是入射电子波矢。

用以上的算法，我们可以轻易得到输出电子的波函数表达式：

$$\phi_{out} = \frac{1}{2} e^{ikL} [R_{\hat{y}}(\theta_L) + e^{i\gamma} R_{-\hat{x}}(\theta_W) R_{\hat{y}}(\theta_L) R_{\hat{x}}(\theta_W)] \phi. \quad (3.3)$$

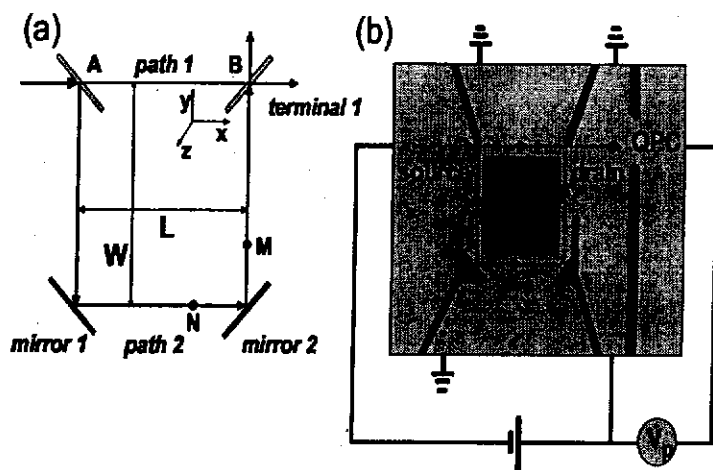


图 3.1 图 (a) 自旋干涉环的装置图, 它由两个全反射电子的电极和两个电子半通过半反射的电极 (A和B) 组成。图 (b) 我们提出的在二维电子气上实现的实验装置图。深色区域是电子耗尽区。电子干涉装置用来产生自旋极化电子, 而量子点接触 (QPC) 是用来测量输出电流的自旋极化率的。

输出电子的波函数 ϕ_{out} 可以简单的表示为 $\phi_{out} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \phi$ 。考虑非自旋极化的入射电子, 为得到一个可观测的物理量, 需要计算入射电子在空间欧拉角的期望值: $\int_0^\pi d\alpha \sin \alpha \int_0^{2\pi} d\beta \langle \phi_{out} | \hat{A} | \phi_{out} \rangle \equiv \langle \langle \phi_{out} | \hat{A} | \phi_{out} \rangle \rangle$ 。输出电子几率 O 和自旋极化率 P 可以表示为

$$O = \langle \langle \phi_{out} | \phi_{out} \rangle \rangle = \frac{1}{2} (|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2), \quad (3.4)$$

$$P = \langle \langle \phi_{out} | \sigma_z | \phi_{out} \rangle \rangle = \frac{|a|^2 + |b|^2 - |c|^2 - |d|^2}{|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2} \quad (3.5)$$

从以上公式, 有两点值得注意, (1) 可以严格证明对于两端口体系, 由于电子的时间反演对称性和电流守恒, 输出电流永远是非极化的[8]。(2) 如果电子通过的两个路径长度一样长的话, 输出电流也是非极化的。鉴于我们考虑的是三端口体系, 并且干涉电子通过的路径也不一样长, 因此输出电流通常是极化的。

为了与实验比较, 我们来估计一下我们模型中取的参数: 入射电子在费米面附近的波矢 $k_F = \frac{2\pi}{\lambda_F} = \sqrt{2\pi n_0}$ (n_0 是电子密度, 通常取值是 $2 \times 10^{11}/\text{cm}^2$ 到 $2 \times 10^{12}/\text{cm}^2$ 之间[11])。所以我们在数值计算中取费米波长为 $\lambda_F = 45\text{nm}$ 。 α_R 取 $3 \times 10^{-11} \text{eVm}$ [14]。电子自旋进动角度 $\theta_0 = -m^* \alpha_R L_0 / \hbar^2$ 在 $L_0 = 100\text{nm}$ 的长度范围内 ($m^* = 0.036m_e$) 就可以达到 $\pi/2$ 。在以下计算中我们取 θ_0 为电子进动角度的单位, 事实上等效于我们改变参数 α_R 。

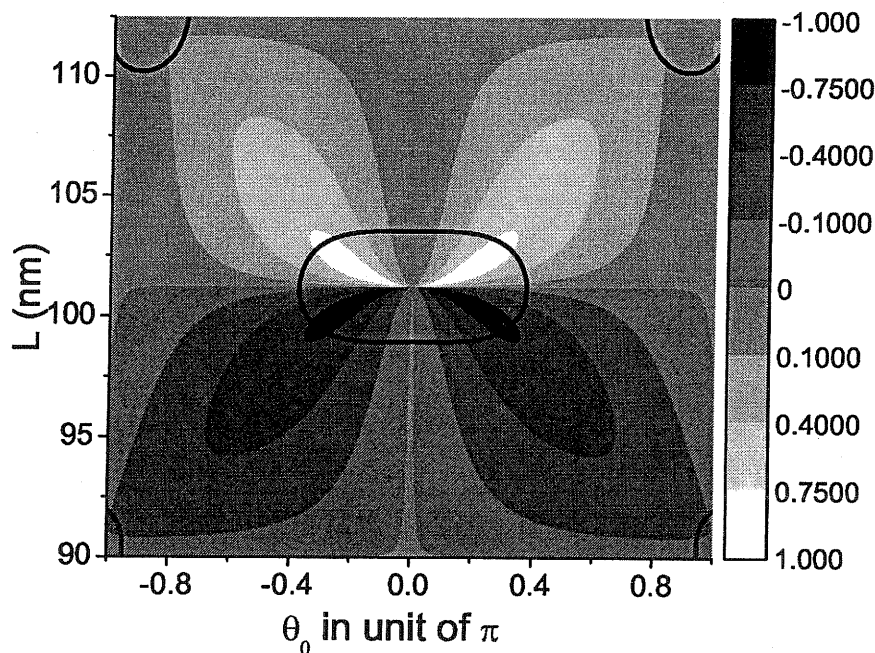


图 3.2 自旋极化率 P 随着 θ_0 和体系长度 L 的变化。其他的参数为 $L = W$, $\lambda = \lambda_F = 45\text{nm}$ 。图中黑色点线是输出电子几率 $O > 0.1$ 和 $O < 0.1$ 的分界线。

3.3 数值结果

图3.2中我们给出了输出电子自旋极化率 P 随着 θ_0 和体系尺寸 L 的变化二维图，我们取正方形体系从而 $L = W$ 。 P 随着 θ_0 和 L 的变化是一个准周期二维函数我们在图3.2中显示了一个周期。我们可以看到在相当大的 θ_0 和 L 范围内 $|P|$ 都保持了较大的值（大于0.4）。在某些特殊的参数范围内， P 接近于1。当 $90.0\text{nm} \leq L \leq 101.25\text{nm}$ 时， P 是负的，然而当 $101.25\text{nm} \leq L \leq 112.5\text{nm}$ 时， P 是正的。出于实用的考虑，在实验上，我们不但要求较大的输出电子的自旋极化率也要求有较大的输出电子几率 O 。在我们的装置中， O 也比较大（在图3.2中除去四个角和中间环内的大部分区域大于0.1）。在黑线标志的中间区域，电子输出几率 O 非常小而输出电子极化率几近于1。

为了清楚地表现 P 和 O 随着 θ_0 的变化关系，我们取图3.2中的 $L = 98\text{nm}$, 100nm , 103nm , 和 105nm 等值，作了图3.3。在图3.3中我们注意到，

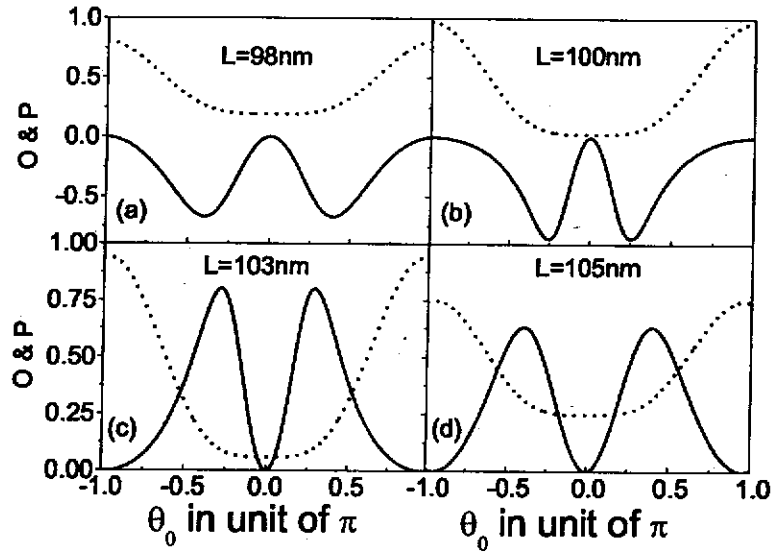


图 3.3 输出电流自旋极化率 P (实线) 输出电流大小 O (虚线) 随着 θ_0 的变化。其他参数的选择为 $L = W$ 和 $\lambda = \lambda_F = 45nm$ 。(a) - (d) 对应于不同的 L 值。

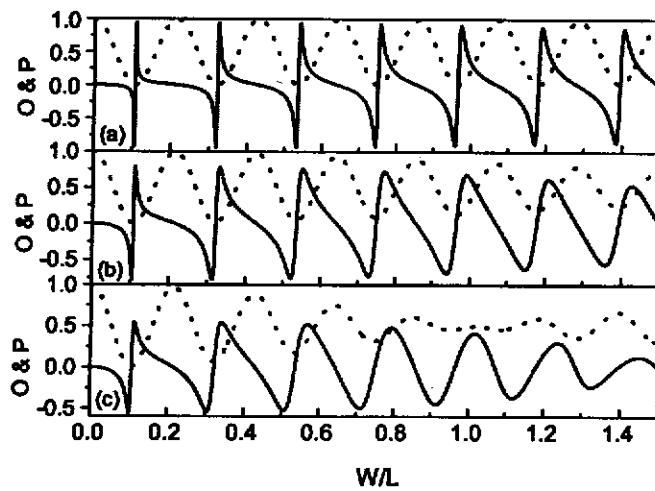


图 3.4 自旋极化率 P (实线) 和电子出射几率 O (虚线) 随着 W/L 。其他参数为 $\lambda = \lambda_F = 45nm$, $L = 105nm$ 。参数 θ_0 在图 (a) 到 (c) 分别取 0.2π , 0.4π , 0.6π 。

当 $\theta_0 = 0$ 时（亦即不存在Rashba自旋轨道耦合时），输出电子是非极化的。当 $|\theta_0|$ 变大时， $|P|$ 很快随之变大。当 $|\theta_0| = 0.2\pi$ 时， $|P|$ 对于所有的 L 值都超过了0.3。图3.3 (b) 和3 (c) 对应于接近图3.2对称中心的位置，因而 P 和 O 不能同时得到较大的值。反之，图3.3 (a) 和3 (d) 则对应于图3.2中远离对称中心的位置，因此 P 和 O 可以同时有较大的值。

以上我们的讨论中，都是正方形的干涉环（ $L = W$ ），然而实验上不见得做出来的样品就是正方形的。当 $L \neq W$ 时我们的结果（ O 和 P ）会有什么影响呢？在图3.4中，我们固定 $L = 105\text{nm}$ ，变化 W 值来看 O 和 P 的行为。我们从图3.4可以看到 P 和 O 都随着 W/L 呈现出振荡行为且在 $L \neq W$ 时都有较大值。当 $W = 0$ ，由于电子通过的两条路径长度相同，输出电子的极化率 $P = 0$ ，这与我们上文提到的通常关系是一致的。随着 W/L 的变化， P 的符号会发生改变。对于较小的 θ_0 比如 $\theta_0 = 0.2\pi$ （图3.4 (a)）， P 在-1到1之间剧烈地振荡，同时 O 值比较小。但是对于较大的 θ_0 （图3.4 (b) (c)）， P 和 O 随着 W/L 的振荡趋缓。值得注意的是在图3.4 (c) 中，当 $\theta_0 = 0.6\pi$ ， P 和 O 对于较大范围的 W/L （0.4 - 1.5）都能取到较大的值。

在以上的讨论中，我们取了 $\lambda = \lambda_F$ （亦即 $k = k_F$ ）。然而在实际情况中，入射电子的波长 λ 就不是一个定值（比如有偏压或者非零温情况），而是在 λ_F 附近的一个分布。这样，输出电子的自旋极化率 P 和输出几率 O 就是对 λ 分布的期望值了。这样的结果会不会因为电子能量分布的因素而变小？在图3.5中我们对于不同 θ_0 值给出了 P 和 O 随着 λ 变化的关系。我们看到随着 λ 在很宽的区域内变化， P 和 O 的变化很缓和，取值也较大。因此我们看到由于温度和电压引起的平均结果还是可以接受的。在图3.5中，我们把电子波长 λ 从 44nm 变化到 46nm ，这是一个很宽的区域，它对应于电子能量差达 $\Delta E = 2\text{meV}$ 。换句话说，只有电压加到 2mV 或者温度提高到 20K 才会明显改变我们原有的结果。

讨论到现在为止，我们仅限于讨论弹道运输的情况。然而在具体实验中通常都有杂质或者点击引起的背散射。一个问题自然会被问到就是在存在背散射的情况下我们的装置是否还能正常工作。直观的看来，自旋极化率 P 随着电子通过的路径长度 $2W + L$ 的振荡关系（图3.4）似乎会破坏会被背散射所破坏（背散射会增加电子通过的路程）。然而实际情况并非如此，真实的结果是自旋极化率 $|P|$ 几乎不会被背散射所破坏。换句话说，这个装置在存在背散射的情况下依

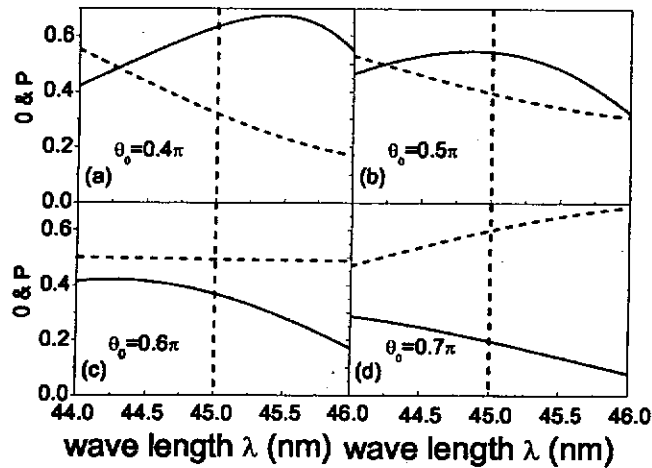


图 3.5 对于不同 θ_0 ,自旋极化率 P (实线)和电子输出几率 O (虚线)随着 λ 的变化。其他参数为 $L = W = 105nm$ 。

然可以很好的工作¹²

下边我们考虑图3.1中的路径2中存在着多个散射杂质。由于它们的存在，电子经过这个路径可以有很多种可能的散射过程。为了获得一个清晰的图像，我们首先考虑两个路径：第一个路径没有散射，从电极A经过电极1, 2直接到电极B，它的出射电子波函数是 $\frac{1}{2}e^{ikL}e^{i\gamma t_1}R_{-\hat{x}}(\theta_W)R_{\hat{y}}(\theta_L)R_{\hat{x}}(\theta_W)\phi$ ，其中 $\gamma = 2kW$ 且 t_1 为实数。另外一个路径就包含了背散射，比如在图3.1中，电子在M点被杂质散射后返回，随后在N点遇到另外一个杂质，再次转向继续向电极B传播。再次过程中，虽然电子经过的路程明显增加了，但是电子自旋进动因子 $R_{-\hat{x}}(\theta_W)R_{\hat{y}}(\theta_L)R_{\hat{x}}(\theta_W)$ 却没有发生变化。这是因为，当电子被散射从而反向传播的时候，电子自旋也随之反向进动，从而总的进动因子是不变的。这个情况不同于图3.4中变化 W ，因为在图3.4中进动因子依赖于电子传播距离 $2W + L$ 。

¹我们在此考虑的是一维的自旋Mach-Zehnder干涉环。对于非一维的情况，D'yakonov-Perel提出的自旋弛豫就会发生，结果就是描述自旋进动的算符就变化了，从而得到的自旋极化也会衰减掉。然而，如果电子通过的路径宽度 W_0 小于 $20nm$ ，子带间的分离可以表示为 $(2^2 - 1^2)\hbar^2\pi^2/2m^*W_0^2 \approx 125meV$ 。这是一个很大的值，因此这么宽的路径就可以很好的用一维来描述。同时背散射也不会影响电子自旋极化率了。也可参考：D'yakonov M I 和Perel' V I 1972 *Sov. Phys. Solid State* 13, 3023; 或者Bournel A, Delmouly V, Dollfus P, Tremblay G and Hesto P 2001 *Physica E* 10, 86.

²请注意我们在此只考虑了弹性散射，倘若有非弹性散射存在，电子的能量和动量就会在散射中变化，同时电子也会失去位相相干性，最后我们得到的电子极化率也会变得很小。所以我们提出的这个装置的尺寸要求小于电子位相相干长度是很必要的。

那么在这个散射路径上的输出波函数就是 $\frac{1}{2}e^{ikL}e^{i\gamma}t_2R_{-\hat{x}}(\theta_W)R_{\hat{y}}(\theta_L)R_{\hat{x}}(\theta_W)\phi$ ，其中 $\frac{1}{2}e^{ikL}e^{i\gamma}t_2$ 是没有Rashba自旋轨道耦合时的透射系数。因此1端口的最终输出电子波函数为：

$$\phi_{out} = \frac{1}{2}e^{ikL}[R_{\hat{y}}(\theta_L) + e^{i\gamma}(t_1 + t_2)R_{-\hat{x}}(\theta_W)R_{\hat{y}}(\theta_L)R_{\hat{x}}(\theta_W)]\phi. \quad (3.6)$$

这个方程和方程3.3很相像，因此，出射电子还是自旋极化的。

接下来我们考虑图3.1中的路径2存在大量散射杂质，考虑到电子通过所有路径的自旋进动因子是一样的，就很容易得到1端口的波函数：

$$\phi_{out} = \frac{1}{2}e^{ikL} \left[R_{\hat{y}}(\theta_L) + e^{i\gamma} \left(\sum_j t_j \right) R_{-\hat{x}}(\theta_W)R_{\hat{y}}(\theta_L)R_{\hat{x}}(\theta_W) \right] \phi. \quad (3.7)$$

，这里 $e^{ikL}e^{i\gamma}t_j$ 是当 $\alpha_R = 0$ 时路径- j 的透射几率。 $e^{ikL}e^{i\gamma} \sum_j t_j \equiv t_{lower}$ 是通过路径2的总的透射系数。假定电子通过的各种路径的长度呈 $e^{-x/D}$ （ D 用来描述电子通过路径的平均长度）分布，其中 $x + 2W + L$ （ $x \geq 0$ ）是电子通过的路径长度。那么 $\sum_j t_j = c \int_0^\infty e^{ikx} e^{-x/D} dx$ ，其中 c 是一个常数。 $D = 0$ 对应于电子未经任何散射直接从电极A到电极B。图3.6中我们给出自旋极化率 P 随着 D 的变化曲线，其中我们取不同的 W/L 值¹。它表明当 D 变大时， $|P|$ 对于某些 W/L 值可能会减小，但是对于另外一些 W/L 值， $|P|$ 甚至会增大。事实上，杂质散射只会影响图3.4中 $P-W/L$ 曲线的相对位置，而 $|P|$ 则不会被改变（见脚注1，2），因为自旋进动因子不会因散射的存在而改变。其实这个现象有点像Aharonov-Bohm效应，作用在电子上的矢势并不会因为散射的存在而改变，只依赖于电子的初始位置和最终位置。所以我们提出装置中的自旋就像AB效应一样，可以抵抗背散射的破坏。

上述讨论中，我们讨论了装置中利用Rashba自旋轨道耦合。最近的实验表明也存在着Dresselhaus自旋轨道耦合，比如在InAs量子阱中（Ganichev等人报道[16]）。我们在此需要说明的是如果自旋干涉装置的电子路径是一维的（只有一个子带），即便存在Rashba自旋轨道耦合或者Dresselhaus自旋轨道耦合，我们提出的装置也可以正常工作同时提供可观的自旋极化电流的输出。这是因为在只有一个自带存在的情况下，D'yakonov-Perel提出的自旋弛豫就不会发生[17]。

最后我们提出一个实验上可行的具体装置来实现我们的想法。图3.1（b）就是我们建议的设计在二维电子气上的具体装置图，黑色区域表示电子耗尽区。非极化的电子从源经过两个不等长路径汇聚于汇。基于以上原理和分析，另一端口的出射电子是自旋极化的。自旋极化流可以用一个量子点接触（QPC）[15]，或

¹在存在散射的情况下，电子透射几率 $|t_{lower/upper}|^2$ 会小于1。在此情况下 $|P|$ 依然会比较大。当 $|t_{lower}|/|t_{upper}| \ll 1$ 和 $|t_{lower}|/|t_{upper}| \gg 1$ 时， $|P|$ 就会变得很小了

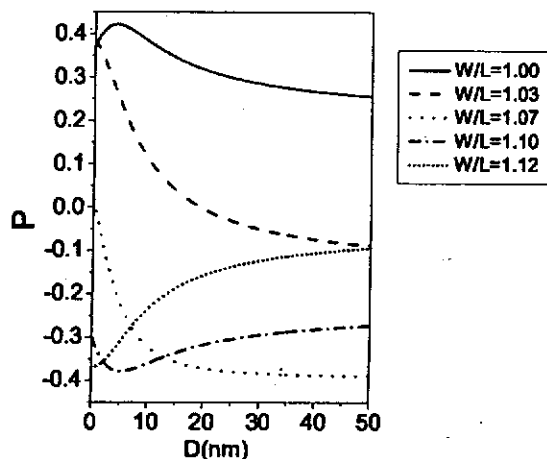


图 3.6 自旋极化率 P 随着散射标准长度 D 的变化。其余参数均同于图 3.4。

者自旋积累来测量。有了自旋极化流我们就可以制造很多有用的电子器件[1]。比如，由于电流是极化的，电流对不同方向的磁场的响应就会不同，这就可以用作硬盘的读取。值得提到的是最近Koga 及其合作者提出了弹道区的自旋干涉环[11]，并且他们预言背散射几率会强烈的依赖于Rashba自旋轨道耦合强度。这个预言已被实验验证[11]。事实上尽管装置的功能不同，我们提出的装置和Koga等人的装置非常相像[11]。所以我们的装置在实验上可以被实现。

3.4 小结

本章中，我们利用二维电子气中的Rashba自旋轨道耦合提出了在介观自旋Mach-Zehnder干涉环中实现输出自旋极化流的装置。在此装置中，我们没有使用任何磁介质或者磁场。此外，二维电子气中的Rashba强度也可以是均匀的或者非均匀的。我们讨论了输出电子的几率和极化率随着Rashba强度和干涉环尺寸的关系。在适当的参数下，电子输出几率和极化率可以同时比较大。我们提出的装置不仅可以工作在弹道区也可以工作于散射区。

参考文献

- [1] S.A. Wolf, D.D. Awschalom, R.A. Buhrman, J.M. Daughton, S.V. Molnar, M.L. Roukes, A.Y. Chtchelkanova, and D.M. Treger, *Spintronics: A Spin-Based Electronics Vision for the Future*, Science **294**, 1488 (2001); G.A. Prinz, *Magnetoelectronics*, Science **282**, 1660 (1998).
- [2] I.Zutic, J. Fabian, and S. Das Sarma, *Spintronics: Fundamentals and applications*, Rev. Mod. Phys. **76**, 323 (2004); M.khodas, A. Shekhter, and A. M. Finkel'stein, *Spin polarization of electrons by non-magnetic heterostructures : basics of spin-optics*, Phys. Rev. Lett. **92**, 086602 (2004); P. C. van Son, H. van Kempen, and P. Wyder, *Boundary resistance of the ferromagnetic-nonferromagnetic metal interface*, Phys. Rev. Lett. **58**, 2271 (1987).
- [5] G. Schmidt, D. Ferrand, L.W. Molenkamp, A.T. Filip, and B.J.V. Wees, *Fundamental obstacle for electrical spin injection from a ferromagnetic metal into a diffusive semiconductor*, Phys. Rev. B **62**, R4790 (2000).
- [6] R. Ioniçoiu and I. D'Amico, *Mesoscopic Stern-Gerlach device to polarize spin currents*, Phys. Rev. B **67** 041307(R) (2003).
- [7] V.M. Ramaglia, D. Bercioux, V. Cataudella, G. De Filippis, C.A. Perroni, and F. Ventriglia, *Conductance of a large point contact with Rashba effect*, Eur. Phys. J. B **36**, 365 (2003).
- [8] Q.-f. Sun and X. C. Xie, *Spontaneous spin-polarized current in a nonuniform Rashba interaction system*, Phys. Rev. B **71**, 155321 (2005).
- [9] S. Murakami, N. Nagaosa, S.-C. Zhang, *Dissipationless Quantum Spin Current at Room Temperature*, Science **301**, 1348 (2003); J. Sinova, D. Culcer, Q. Niu, N.A. Sinitsyn, T. Jungwirth, and A.H. MacDonald, *Universal Intrinsic Spin Hall Effect*, Phys. Rev. Lett. **92**, 126603 (2004).
- [10] Y. Ji, Y. Chung, D. Sprinzak, M. Heiblum, D. Mahalu, and H. Shtrikman, *An electronic Mach-Zehnder interferometer*, Nature **422**, 415 (2003).
- [9] U. Zuelicke, *Spin interferometry with electrons in nanostructures: A road to spintronic devices*, Appl. Phys. Lett. **85**, 2616 (2004); A.I. Signal and U. Zuelicke, *Tunable entanglement generation for mobile-electron spin qubits*, *ibid.*, **87**, 102102 (2005).
- [11] T. Koga, J. Nitta, and M. van Veenhuizen, *Ballistic spin interferometer using the Rashba effect*, Phys. Rev. B **70**, 161302 (2004).

- [11] T. Koga, Y. Sekine, and J. Nitta, *Experimental realization of a ballistic spin interferometer based on the Rashba effect using a nanolithographically defined square loop array*, Phys. Rev. B **74**, 041302(R) (2006).
- [13] E.I. Rashba, Fiz. Tverd. Tela (Leningrad) **2**, 1224 (1960) [Solid State Ionics **2**, 1109 (1960)].
- [12] Y.A. Bychkov and E.I. Rashba, *Oscillatory effects and the magnetic susceptibility of carriers in inversion layers*, J. Phys. C **17**, 6039 (1984).
- [13] S. Datta and B. Das, *Electronic analog of the electro-optic modulator*, Appl. Phys. Lett. **56**, 665 (1990).
- [14] J. Nitta, T. Akasaki, H. Takayanagi, *Gate Control of Spin-Orbit Interaction in an Inverted $In_{0.53}Ga_{0.47}As/In_{0.52}Al_{0.48}As$ Heterostructure*, and T. Enoki, Phys. Rev. Lett. **78**, 1335 (1997); G. Engels, J. Lange, Th. Schäpers, and H. Lüth, *Experimental and theoretical approach to spin splitting in modulation-doped $In_xGa_{1-x}As/InP$ quantum wells for $B \rightarrow 0$* , Phys. Rev. B **55**, 1958 (1997); D. Grundler, *Large Rashba Splitting in InAs Quantum Wells due to Electron Wave Function Penetration into the Barrier Layers*, Phys. Rev. Lett. **84**, 6074 (2000).
- [16] S. D. Ganichev, V. V. Bel'kov, L. E. Golub, E. L. Ivchenko, P. Schneider, S. Giglberger, J. Eroms, J. De Boeck, G. Borghs, W. Wegscheider, D. Weiss and W. Prettl, *Experimental Separation of Rashba and Dresselhaus Spin-Splittings in Semiconductor Quantum Wells*, Phys. Rev. Lett. **92**, 256601 (2004).
- [17] S. Pramanik, S. Bandyopadhyay and M. Cahay *Spin relaxation in the channel of a Spin Field Effect Transistor*, IEEE Trans. Nanotech. **4**, 2 (2005).
- [15] J. A. Folk, R.M. Potok, C.M. Marcus, and V. Umansky, *A Gate-Controlled Bidirectional Spin Filter Using Quantum Coherence*, Science **299**, 679 (2003).

第四章 约瑟夫森电流的Fano效应

摘要：这一章我们研究含有量子点的介观结构的约瑟夫森结的电流输运特性。其中包含两个体系，第一，约瑟夫森电流通过一个臂上含有一个量子点的Aharonov-Bohm (AB) 环的输运特性，AB环中还有可变化的磁场；第二，约瑟夫森电流通过T型双量子点的输运特性。在这两个课题中，我们主要关注电流-位相关系以及约瑟夫森电流的Fano效应。下边分别就这两个课题给与介绍。

一，约瑟夫森电流通过AB环结构

AB环中存在磁通的时候，约瑟夫森电流和超导位相的关系就会变得颇为复杂：通过调节磁通大小或者量子点能级位置电流随着超导位相可以呈现正弦图像，突变行为，或者 π 结性质。由于体系哈密尔顿的电子空穴对称性，超导电流 I 和位相的关系 θ 有如下对称性 $I(\epsilon_d, \Phi) = I(-\epsilon_d, \Phi + \pi)$ 。在这样的体系中，由于两条路径的干涉，体系存在着两对Andreev束缚态。当其中的一对与体系的非米面对齐时，由于荷载电子的束缚态的转变，电流就会发生突变（大小和方向）。我们解析的给出了电流发生突变的数学表达式。特别地，我们发现电流发生突变对应的条件和临界电流 I_c 取得峰值对应的条件是一样的。我们的体系是一个典型的Fano模型，量子点的能级充当了离散谱而导线之间的直接耦合充当了连续谱。由于两条路径的干涉，临界电流 I_c 随着量子点能级 ϵ_d 显现出明显的Fano特征。这与通常的Fano效应是相似的，不同的是这里的约瑟夫森电流取代了普通电流。因此，约瑟夫森电流的特征也就会不同，比如，在通常Fano体系中，电流在干涉相消时候总可以达到零，而约瑟夫森点从在干涉相消的时候从来不会等于零。

二，约瑟夫森电流通过T型双量子点结构

我们用非平衡格林函数研究了约瑟夫森电流经过T型双量子点。由于两个量子点能级的耦合，各自能级发生重整，从而约瑟夫森结的Andreev束缚态的能量也发生了变化，最终导致通过体系的约瑟夫森电流发生变化。在此体系中，只通过一个量子点的电流和通过两个量子点的电流会发生干涉。我们可以通过调节两个量子点的能级 ϵ_1, ϵ_2 和量子点之间的耦合系数 t_c 来实现约瑟夫森电流的干涉相加和干涉相消。具体地，当条件 $\epsilon_1 \epsilon_2 = t_c^2$ 被满足时，电流干涉相加就发生了，而当 $\epsilon_2 = 0$ 时，电流的干涉相消就会发生。这些行为和通过双量子点的普通电流的行为相似。此外，临界电流会随着 ϵ_2 的变化表现出Fano特征，而Fano的非对称线形则由 ϵ_1 来决定。最后，类似于第一个模型，由于体系的电子空穴对称性，电流

和超导位相关系 $I(\epsilon_1, \epsilon_2) = I(-\epsilon_1, -\epsilon_2)$ 成立。

4.1 引言

最近, 由于其在纳米技术上的潜在的应用价值, 介观Aharonov-Bohm (AB) 干涉环中的电子输运引起了广泛的关注。它可以通过探测不同路径的干涉结果来揭示不易观察的量子态的信息。连续谱和离散谱之间的干涉会导致非对称的隧穿几率 $T(E)$ 图像, 这就是典型的Fano效应[1]。它首先在1961年被Fano第一次在原子物理学中提出来。近年来, 随着纳米技术的飞速发展, 人们可以制造出可控制的量子点来模拟原子物理中的效应。最近就有实验上实现Fano效应的报道[2, 3]。把一个量子点放在AB干涉环的某一个臂上, 人们研究了Fano效应和Kondo-Fano效应[4]。直接隧穿和通过量子点之间的隧穿的干涉使得探测量子点内部的信息成为可能[5]。此外, 我们可以用加在AB环内部的磁通或者Rashba导致的电子位相差来调节电子干涉[6, 7], 而隧穿系数 $T(E)$ 则是位相差的周期函数。在这样的AB-Fano体系中, 当位相等于 Φ 时, $T(E)$ 是一个Breit-Wigner共振曲线, 而当 Φ 为0或者 π 时, $T(E)$ 就有明显的Fano非对称共振特征。此外, 当干涉电子的连续谱被切断时, 隧穿系数 $T(E)$ 还表现出原先的Breit-Wigner共振特征, 而当连续谱耦合增强时, Fano特征变得更加明显。以上两个参数, 位相和连续谱耦合系数都可以包含在一个简单的表达式 $T(E) \propto \frac{(\epsilon + q)^2}{\epsilon^2 + \Gamma^2}$ 中的 q 因子中。上式中, $\epsilon = \frac{E - \epsilon_d}{\Gamma}$ 而 E 是入射电子能量, ϵ_d 是量子点能级, Γ 是量子点和导线的耦合系数。Fano因子 q 通常是个复数, 它决定了隧穿系数的线形。

以往的关于Fano的工作一般都是普通电流通过包含量子点的Fano体系。如果我们一个AB环连接在两个超导导线之间, 就形成了一个约瑟夫森结, 这样无需加上电压, 库柏对电子就可在超导位相的驱动下通过介观体系。在本章中, 我们就要研究两条干涉路径如何影响约瑟夫森电流, 这样体系中的约瑟夫森电流是否有Fano特征。在正常金属Fano体系中, 电流总有耗散, 然而在约瑟夫森通过的干涉环中, 即便在零偏压情况下, 也没有任何电流耗散, 因此就可以在非耗散, 平衡条件下研究电流的Fano效应和干涉行为。最近, 由于科学的兴趣和潜在的应用价值, 介观体系的约瑟夫森电流广受关注。早在1970年, C.Ishii就曾于理论上得到约瑟夫森电流通过干净的约瑟夫森结随着超导位相 θ 可以在 $\theta = \pi$ 时发生跳跃, 从正值变为负值[8]。这个现象来源于荷载电流的Andreev束缚态在 $\theta = \pi$ 时发生交换, 从而使得电流方向发生变化[9]。当约瑟夫森结中存在杂质[10], 或是处于有限温度[11], 或者存在电子-电子相互作用时[11], 电流的跳跃就会变得缓和。关于约瑟夫森结还有一个有意思的效应就是 π 结, 所谓 π 结就是说约瑟夫森结的电流-位相关系由 $I_c \sin(\theta)$ 变为 $I_c \sin(\theta + \pi)$ [13]。关于 π 结有很多杰出的工作,

比如在超导导线-铁磁-超导导线构成的约瑟夫森结中[12, 13], 超导铁磁环中[14], 超导导线-量子点-超导导线中[15, 18], 超导导线-AB环-超导导线中[19, 20], 以及其它[39]。

类似于以上AB-Fano模型, 如果我们在连接于两个超导导线的量子点(1号)上再连接一个量子点(2号), 也就是一个T型量子点模型连接在超导导线上, 也是一个Fano模型。在此模型中, 侧量子点并没有直接连接到超导导线上, 因此和量子点2相比, 量子点1中的能级相当于电子连续谱, 而量子点2中的电子能级相当于离散谱。电子通过T型双量子点有两条路径, 一条路径是电子从左导线通过量子点1直接到量子点2, 另外一条路径中, 电子从左导线进入量子点1, 随后经由量子点2再返回量子点1, 然后再进入右导线。通过这两条路径的电子发生干涉, 导致Fano效应。在此Fano模型中, 量子点2的能级 ϵ_2 决定了Fano共振曲线的线形, 这是因为电子进入量子点2散射时获得了一个额外的位相 Θ_{QD} [11]。当量子点2能级 $\epsilon_2 = 0$ 时, $\Theta_{QD} = 0$, 而当 $\epsilon_2 \gg 0$ ($\epsilon_2 \ll 0$)时, Θ_{QD} 为 $\pi/2$ ($-\pi/2$)。为此我们可以通过调节量子点的能级和量子点之间的耦合系数来实现干涉增强和干涉削弱。以往的工作中, 很多工作集中于电子通过导线-T型双量子点-导线模型。Güçlü及其合作者研究了电流通过T型双量子点, 而侧耦合量子点为一近藤杂质, 他们发现电导被抑制的效应[11]。Wu等人研究了T型双量子点模型, 中间量子点是一个近藤杂质, 他们发现近藤效应导致的全透射电导被侧耦合的量子点破坏了[12, 13]。Cornaglia和Grepel研究发现当两个量子点都是近藤杂质时, 体系的电导会被量子点之间的耦合和各个量子点的近藤温度所控制[13]。以往的工作主要集中在T型双量子点连接在正常导线上的模型, 而约瑟夫森电流通过T型双量子点却没有表内研究过。当把T型双量子点连接于两个超导导线时, 即便在零偏压的时候库珀对都可以通过。我们在此章中主要研究电流经过T型双量子点的干涉增强与干涉相消效应以及约瑟夫森电流的Fano效应。

本章中我们研究含有量子点的介观结构的约瑟夫森结的电流输运特性。这包含以下两个体系, 第一, 约瑟夫森电流通过一个臂上含有一个量子点的Aharonov-Bohm (AB) 环的输运特性, AB环中还有可变化的磁场; 第二, 约瑟夫森电流通过T型双量子点的输运特性。

一, 我们研究了约瑟夫森电流通过AB-Fano干涉环的输运性质, 干涉环包括一个量子点处于一个臂上且有磁通 Φ 通过环内。主要使用非平衡格林函数方法得到通过体系的约瑟夫森电流。由于电子-空穴对称性, 约瑟夫森电流 I 有如下性质 $I(\epsilon_d, \Phi) = I(-\epsilon_d, \Phi + \pi)$ 。在没有磁通的情况下, 电流-位相关系($I-\theta$)通常表

现为一个正弦函数线形。当存在磁通时, $I-\theta$ 关系会变的非常复杂, 且在适当的参数下 $I-\theta$ 可以实现 π 结。由于电流经过超导导线的直接耦合和通过量子点的耦合的干涉效应, 我们研究的体系有两对Andreev束缚态。当其中的一对束缚态与费米能级 $E_F = 0$ 持平时, 约瑟夫森电流发生跳跃。我们通过分析电流表达式得到了电流发生跳跃的精确条件。特别地我们发现电流发生跳跃的条件与约瑟夫森临界电流 I_c 的峰值的条件一致。由于电流通过两臂的干涉效应, 临界电流 I_c 随着量子点能级 ϵ_d 的图线表现出明显的Fano特征。其中临界电流 I_c 干涉相长和相消对应的参数关系与正常体系的干涉相长相消的参数关系一致。有别于正常电流Fano效应的是, 即便在干涉相消的情况下, 超导电流也不会到达零值, 而正常电流的Fano效应在干涉相消($\Phi = n\pi$, n 为整数)时可以得到零值。此外, 临界电流在量子点能级 $\epsilon_d = 0$ 时随磁通位相表现为一个周期函数且周期为 π , 而当 $\epsilon_d \neq 0$ 不为零时临界电流随磁通位相是周期为 2π 的周期函数。

二, 我们研究了约瑟夫森电流通过T型双量子点的输运特性。使用非平衡格林函数方法, 我们得到了约瑟夫森电流的表达式和Andreev束缚态的位置。Andreev束缚态能量取决于两个量子点的能级位置 ϵ_1 和 ϵ_2 , 以及两个量子点之间的耦合系数 t_c 。在双量子点和超导导线弱耦合情形下, Andreev束缚态的位置和未耦合双量子点的能级位置非常相近。在此模型下, 只通过一个量子点的电子会和相继通过两个量子点的电子发生干涉, 从而在特定的条件下导致干涉增强和干涉削弱。具体的讲, 当 $\epsilon_2 = 0$ 时, 满足干涉相消条件, 约瑟夫森临界电流 I_c 被强烈抑制; 当条件 $t_c^2 = \epsilon_1\epsilon_2$ 满足时, 干涉增强发生, 约瑟夫森电流最大。通过调节侧耦合量子点能级 ϵ_2 , 临界电流 I_c 随着 ϵ_2 的变化曲线呈现Fano共振特征, 而Fano共振的线形由量子点能级 ϵ_1 决定。当 $\epsilon_1 \neq 0$ 时, $I_c-\epsilon_2$ 关系表现出明显的Fano非对称形状, 而当 $\epsilon_1 = 0$ 时, $I_c-\epsilon_2$ 关系是对称的。最后, 我们在此体系也发现约瑟夫森电流由于电子空穴的对称性有关系: $I(\epsilon_1, \epsilon_2) = I(-\epsilon_1, -\epsilon_2)$ 。

4.2 约瑟夫森电流通过含量子点的AB环的Fano效应

在此节中, 我们首先给出研究模型的哈密尔顿, 格林函数计算, 电流公式推导以及电流公式的物理意义。随后给出数值计算的结果以及物理解释。其中包括约瑟夫森电流-超导位相关系, 电流跃变发生条件, 临界电流和量子点能级关系, 临界电流和位相关系等等。

4.2.1 体系哈密尔顿以及公式推导

我们研究的体系是一个AB-Fano干涉环连接在两个BCS超导电极上, 干涉环的一臂上嵌有一个量子点, 且有磁通穿过干涉环。在二次量子化表象下超导电

极的哈密顿写作 $H_\alpha = \sum_{k\sigma} \epsilon_k C_{k\sigma,\alpha}^\dagger C_{k\sigma,\alpha} + \sum_k (\Delta_\alpha C_{k\downarrow,\alpha} C_{-k\uparrow,\alpha} + \Delta_\alpha^* C_{-k\uparrow,\alpha} C_{k\downarrow,\alpha}^\dagger)$, 其中 $\alpha = L, R$ 表示左右导线, $\Delta_\alpha = \Delta e^{i\theta_\alpha}$ 是复的超导序参量, Δ 是超导能隙, θ_α 是超导体位相。导线之间耦合以及导线和量子点之间的耦合哈密顿表示为 $H_T = \sum_{k\sigma,\alpha} (t_\alpha C_{k\sigma,\alpha}^\dagger d_\sigma + t_\alpha d_\sigma^\dagger C_{k\sigma,\alpha}) + \sum_{k,k',\sigma} (t_{RL} C_{k\sigma,L}^\dagger C_{k'\sigma,R} + t_{LR} C_{k'\sigma,R}^\dagger C_{k\sigma,L})$ 。这里 t_α 表示量子点到第 α 超导导线的耦合系数, $t_{LR} = t_{RL}^* = t e^{i\Phi} = t e^{i2\pi\frac{\phi}{\phi_0}}$ 是两个超导导线之间的直接耦合系数。考虑到 AB 环中的磁通 ϕ , 我们把位相 $\Phi = 2\pi\phi/\phi_0$ 加到耦合系数 t 上, 其中 $\phi_0 = e/h$ 是量子磁通。我们取量子点单能级而不考虑量子点间的电子-电子相互作用。量子点的哈密顿表示为 $H_{dot} = \sum_\sigma \epsilon_d d_\sigma^\dagger d_\sigma$ 。因此整个系统的哈密顿表示为 $H = H_L + H_R + H_{dot} + H_T$ 。

为了方便计算和表述, 我们用算符 $U = \exp\{\sum_{k\sigma,\alpha} \frac{i\theta_\alpha}{2} C_{k\sigma,\alpha}^\dagger C_{k\sigma,\alpha}\}$ 对哈密顿做一个么正变换[22]。因此哈密顿变为:

$$\begin{aligned} H_\alpha &= \sum_{k\sigma} \epsilon_k C_{k\sigma,\alpha}^\dagger C_{k\sigma,\alpha} \\ &\quad + \sum_k \Delta (C_{k\downarrow,\alpha} C_{-k\uparrow,\alpha} + C_{-k\uparrow,\alpha}^\dagger C_{k\downarrow,\alpha}^\dagger) \\ H_T &= \sum_{k\sigma,\alpha} (t_\alpha e^{\frac{i\theta_\alpha}{2}} C_{k\sigma,\alpha}^\dagger d_\sigma + t_\alpha e^{-\frac{i\theta_\alpha}{2}} d_\sigma^\dagger C_{k\sigma,\alpha}) \\ &\quad + \sum_{k,k',\sigma} (t e^{-i\frac{\varphi}{2}} C_{k\sigma,L}^\dagger C_{k'\sigma,R} + t e^{i\frac{\varphi}{2}} C_{k'\sigma,R}^\dagger C_{k\sigma,L}) \\ H_{dot} &= \sum_\sigma \epsilon_d d_\sigma^\dagger d_\sigma. \end{aligned} \quad (4.1)$$

其中, $\varphi = 2\Phi - \theta_L + \theta_R$ 。

通过 AB-Fano 干涉环的电流 I 可以通过计算左导线电子数对时间的导数得到 $N_L = \sum_{k\sigma} C_{k\sigma,L}^\dagger C_{k\sigma,L}$ [23, 24],

$$\begin{aligned} I &= -e\langle \dot{N} \rangle \\ &= \frac{4e}{\hbar} \text{Re} \int \frac{dE}{2\pi} [t L e^{\frac{i\theta_L}{2}} G_{dL,11}^<(E) + t e^{-i\frac{\theta_L}{2}} G_{RL,11}^<(E)] \end{aligned} \quad (4.2)$$

这里我们使用了 Nambu 表象。其中格林函数 $G_{dL}^<(E)$ 和 $G_{RL}^<(E)$ 是时间格林函数 $G_{dL}^<(t-t')$ 和 $G_{RL}^<(t-t')$ 的傅里叶变换。我们如下定义:

$$\begin{aligned} G_{d,L}^<(t-t') &= i \sum_k \begin{pmatrix} \langle C_{k\uparrow,L}^\dagger(t') d_\uparrow(t) \rangle & \langle C_{k\uparrow,L}^\dagger(t') d_\downarrow^\dagger(t) \rangle \\ \langle C_{-k\downarrow,L}(t') d_\uparrow(t) \rangle & \langle C_{-k\downarrow,L}(t') d_\downarrow^\dagger(t) \rangle \end{pmatrix} \\ G_{R,L}^<(t-t') &= i \sum_{k,k'} \begin{pmatrix} \langle C_{k\uparrow,L}^\dagger(t') C_{k'\uparrow,R}(t) \rangle & \langle C_{k\uparrow,L}^\dagger(t') C_{-k'\downarrow,R}^\dagger(t) \rangle \\ \langle C_{-k\downarrow,L}(t') C_{k'\uparrow,R}(t) \rangle & \langle C_{-k\downarrow,L}(t') C_{-k'\downarrow,R}^\dagger(t) \rangle \end{pmatrix} \end{aligned}$$