

Y002216



南京大學

研究生畢業論文 (申請博士學位)

論文題目 光学超晶格、压电超晶格、磁电复合相超晶格与光子带隙材料的光学性质的研究

作者姓名 刘 辉

学科专业名称 凝聚态物理学

研究方向 微结构功能材料

指导教师 祝世宁 教授

2003 年 8 月 11 日

摘要

关键词：准位相匹配，光子带隙，电磁激元，纠缠态，负折射

光学超晶格、光子带隙材料、压电超晶格等是近年来迅速发展的具有特殊光电功能的微结构材料，是凝聚态物理学与经典光学、非线性光学、量子光学的交叉领域。本论文研究了以上微结构材料中的电磁波的非线性频率转化、光子带隙、Polariton 与声光耦合等物理问题。主要包括以下几个方面内容：

- 一、提出了普遍适用于各种准位相匹配过程的非周期光学超晶格的设计理论，并将其应用于三倍频、三基色激光、多波长倍频、通道展宽等方面；
- 二、提出等效介质场理论，建立了光子带隙材料倒格矢与禁带之间的联系，推导出了 Bloch 波矢的表达式，在此基础上研究了光子带隙材料的一些基本性质；
- 三、将准位相匹配理论的设计原理和方法应用于光子带隙材料中，提出了非周期光子带隙材料的设计方法；
- 四、提出了普遍的磁电复合相材料中的 Polariton 理论，建立了一般三维空间中介电系数张量、磁导率张量、磁电耦合系数张量的色散表达式；
- 五、提出一种非周期负折射材料的设计原理和方法；
- 六、采用二次量子化的方法处理压电超晶格中光子与声子的相互作用过程，建立了在压电互作用机制上的新的元激发理论；
- 七、提出了利用压电超晶格制备元激发准粒子纠缠态的物理模型。

Abstract

Keyword: quasi-phase matching, photonic band gap, polariton, entanglement state, negative refraction index

Quasi-phase matching (QPM) material, photonic band gap (PBG) material and piezoelectric superlattice are all the functional microstructures, which are the crossing fields of condensed matter physics and classic optics, nonlinear optics and quantum optics. They are developing very quickly in recent years. Some optical properties of these microstructures have been studied in this thesis, such as nonlinear frequency conversion, photonic band gap, polariton and phonon-photon coupling process. The obtained results are described as follows:

1. A new kind of aperiodic optical superlattice is invented, which can be applied in all the QPM processes, such as third-harmonic generation, three-element-color laser, multiwave second-harmonic generation and frequency conversion bandwidth broadening.
2. Equivalent media field theory is created which establishes the relationship between the reciprocal vectors and band gaps. The expression of bloch vector is given and some basic optic properties of PBG material have been studied.
3. Some techniques of quasi-phase matching theory are applied in PBG material and aperiodic PBG is invented for the first time.
4. The theory of polariton in magnetoelectric composites has been established and the dispersion properties of permittivity tensor, permeability tensor and magnetoelectric coefficient tensor are given.
5. An aperiodic negative-refraction-index material is invented for the first time.
6. The interaction process between phonon and photon in piezoelectric superlattice is dealt with second quantization method and the theory of a new kind of elementary excitation is established.
7. A new physical model is created to produce a new type of entanglement state in the piezoelectric superlattice.

第一章 前言

自 60 年代以来,随着科学技术的发展,学科间的交叉日益增加。人工调制微结构材料(超晶格)已成为凝聚态物理学的研究热点。从超晶格调制周期的尺寸来看,人工超晶格可分为纳米超晶格和微米超晶格。纳米超晶格主要涉及原子、电子等量子体系中的波,而微米超晶格主要涉及电磁波、声波等经典波。纳米超晶格发展比较早,已经取得了很大的进展。今年来,随着现代科学技术得发展,微米超晶格中经典波的研究逐渐受到物理工作者得重视。根据所调制的物理量的不同,这类微结构材料可以分为光子带隙材料(折射率调制),光学超晶格(二阶非线性系数调制),压电超晶格(压电耦合系数调制)等。

(1) 光学超晶格的发展背景

关于介电体超晶格中非线性光学效应的研究可以追溯到 1962 年,当时 Bloembergen 提出了非线性光学中的准位相匹配理论^[1]:通过晶体非线性极化率的周期调制可以补偿光参量过程中由于折射率色散造成的基波与谐波之间的位相失配,以此获得非线性光学效应的增强。这一思想奠定了介电体超晶格在非线性光学领域中理论和应用的基础。早期的光学超晶格主要涉及周期结构^[2]。在 1984 年 Shechtman 发现五次对称的准晶体以后^[3-4],大量的理论和实验工作集中于准晶的结构和性质研究上。同时,一维结构的准晶(准周期超晶格)的研究工作也得到了迅速的发展^[5-6]。上世纪 90 年代初,闵乃本院士领导的研究小组首先将准周期超晶格的概念引入到准位相匹配材料中来,提出了准周期光学超晶格的构想^[7-8],并利用室温极化技术成功地制备出具有 Fibonacci 序列的钽酸锂准周期光学超晶格,获得了高效的三倍频绿光输出^[9],这是自准晶发现以来,有关准晶、准周期材料的第一个有应用价值物理效应的实验结果,开拓了微结构材料研究的新领域。

现在,人们对微结构材料的研究正在逐步突破传统的研究模式,即不再局限于从现有的材料出发和从已知序列的微结构材料出发,来研究其性质及其应用,而是从实际应用的需要出发来设计和制备自然界中并不存在的全新的微结构材料。非周期光学超晶格设计理论就是在这样的背景下提出来的^[10-11]。与周期和准周期不同之处在于,非周期结构是自然界中完全不存在的结构,它是人为创造的新结构,它用结构函数来代表各种超晶格,形式上清楚明了,它的设计思想简单

灵活,可以适用于任何准位相匹配过程,因此,它较以往各种结构的光学超晶格更具优势。同时,由此产生的非周期结构的设计思想不仅应用于准位相匹配材料,它还同时可以应用于光子带隙材料、磁电复合相材料、压电超晶格等多种微结构材料的设计之中。

(2) 光子带隙材料的发展背景

光子晶体是上世纪80年代末由E. Yablonovitch^[12]和S. John^[13]提出来的新的光电功能材料,光子晶体是由不同折射率的材料在空间按一定规律调制分布形成的,由此会导致一些电磁波的禁带。由于光子禁带和半导体中的电子禁带有很多类似之处,人们就把半导体中的一些比较成熟的方法和技巧用来处理光子晶体中的问题,并且取得了很大得进展。在上世纪90年代,光子晶体得研究发展迅猛,有关光子晶体的文献报道如雨后春笋,层出不穷。而三维光子晶体的完全带隙是当时人们讨论的最多的问题,虽然人们从理论上发明了很多数值方法对光子晶体全带隙做了大量的计算,但是由于实验技术的限制,关于三维全带隙光子晶体的制备问题一直没有取得决定性的突破,因此,目前关于三维全带隙光子晶体的研究正在降温。另一方面,由于一维结构光子带隙材料结构简单,制备工艺成熟,具备光子晶体的最基本的禁带特征,而且比较容易与其他领域相结合产生新的物理内容,因此,人们对一维带隙材料的研究热度一直未减。近年来,一维带隙材料正被应用于非线性频率转化^[14-16],光脉冲的增强和压缩^[17],缺陷态和光子局域态^[18-19],超光速^[20-21]和光速减慢^[22],负折射带隙材料^[23]等方面。而且,一维光子带隙材料不再仅限于简单的周期结构,准周期^[24-25]、双周期结构^[26-27]的带隙材料也是人们研究的兴趣所在。

在本论文中,我们将首次提出一个等效介质场理论,并根据这个理论用解析的方法重新分析处理了光子带隙材料一些基本问题。在等效介质场中,电磁波的散射可以看作是沿不同方向传播的电磁波之间的耦合,当入射波与反射波之间满足波矢匹配关系时,就会产生光子禁带,倒格矢是补偿波矢失配的条件,也是禁带产生的根源。这样,我们可以将比较熟悉的准位相匹配理论的分析方法应用到光子带隙材料中来,完全从倒空间出发来分析各种结构的光子带隙材料。我们将首次提出非周期光子带隙材料的设计理论,根据这个设计方法,我们可以完全根据实际需要出发,人为设计具有各种禁带特征的非周期光子带隙材料。

(3) 负折射材料的发展背景

负折射材料是近一两年兴起的人工材料领域。根据我们的普通常识，自然界的材料都是正折射率的，比如水下的浆会向水面弯折而不会向水底弯折，这是因为水具有正的折射率。在悠久的历史中，人们一直认为所有材料的折射率只能是正数，负折射率是超出人们的常识而难以想象的。直到上世纪 60 年代，莫斯科 P. N. Lebedev 物理研究所的一个从事磁性理论研究的物理学家 Victor Veselago，对光在负折射材料中的传播发生了兴趣。他在一篇文献中描述了负折射材料的基本特征，即同时具有负介电系数和负磁导率^[28]。在负折射材料中，电波的相速和能速向相反的方向传播，光在其中传播时会发生负折射、反多普勒、反契仑柯夫辐射等效应。在这篇文献中，Veselago 还提出了在具有 Plasma 性质的磁性材料中可能会存在负折射性质。

由于 Veselago 对负折射材料只是纯理论的探讨，当时还没有任何负折射材料存在的实验证据，尤其是人们还没有发现能够直接在实验室中制造负折射材料的途径和方法，因此，在 Veselago 提出负折射理论之后，并没有引起很多人的注意。

其实，早在 Veselago 提出负折射材料之前，材料具有负介电系数就不是一件稀奇的事，常见的一些金属对可见光就具有负介电系数，例如银。但是，负折射材料要求介电系数和磁导率同时为负数，因此构造负磁导率的材料才是问题的关键。

直到 1999 年，伦敦帝国工学院的一个从事发展在雷达中控制微波装置的物理学家，J. B. Pendry 在一篇文献中发明一种在空间中紧密排列的细小的导电组元（例如金属环）组成的阵列，整体上形成一种复合材料，通过改变阵列的参数，例如组元的间距，可以得到负磁导率的性质^[29]。

在 Pendry 工作的基础上，美国加州圣迭戈分校的 D. R. Smith 领导的研究小组发明了一种在光纤玻璃薄层上镀刻铜线和铜环的组元结构，然后由这些组元组成一个阵列。在实验室中，当他们向这个阵列发出一束微波时，结果发现微波向负方向折射，从而证明了 Pendry 的理论是正确的，同时这也是证明负折射材料存在的第一个实验验证^[30]。

后来，Pendry 在 2000 年发表的一篇文献中研究了用负折射材料组成的长方形透镜的性质^[31]。对于普通透镜来说，一些从物体上发出的波很快衰减，使得它们

不能穿透透镜，其结果是即使是最好的透镜，这些衰减波包含的细节会被遗漏。但是，Pendry 预言负折射材料能够放大衰减波，于是它们包含的信息将会保留下来，因此，用负折射材料可以做成所谓“完美透镜”。

自从 Pendry 的理论工作和 Smith 的实验结果被报道以后，负折射率的问题引起了越来越多人的讨论。特别是当 Pendry 提出“完美透镜”的概念以后，很多人都提出反对意见^[32]，但 Pendry 和 Smith 都做了相应的答复^[33]。目前，由于这方面理论和实验的一些进展，越来越多的人倾向负折射材料是真实的观点，而且关于负折射材料的应用方面的研究也越来越多^[34-39]。

现在，实验室中得到的负折射材料有一个很大的局限性，那就是可产生负折射的波长范围主要局限在微波段，这主要是原来 Pendry 设计的结构太过复杂，由于尺寸限制使其只能应用于微波范围，寻找能够对短波长的电磁波产生负折射的材料是一个既具挑战性又很有意义的课题。在本论文中，我们将首次从磁电复合相材料的 Polariton 理论出发，设计一种非周期负折射材料，这种材料结构简单，而且可以在红外等较小波长范围内实现负折射性质，这是以前的负折射材料所不能做到的。

(4) 量子纠缠态的发展背景

在量子力学中，量子纠缠是存在于多体系量子系统中的一种奇妙现象，即对一个子系统的测量结果无法独立于其他子系统的测量。量子纠缠的概念最早可以追溯到 1935 年，Einstein、Podolsky、Rosen 三人提出的一个被人们称为 EPR 佯谬的著名假想实验^[40]。这个实验原理可作如下表述。设想总自旋为零的两个自旋为 $\hbar/2$ 的粒子 A 和 B（EPR 粒子对）沿相反方向传播，按照量子力学理论，在某个方向上测量粒子 A（或粒子 B）的自旋，测量值为 $\pm\hbar/2$ 的几率各为 1/2，但如果在 X 方向测量粒子 A 的自旋 $S_x^{(1)}$ 并得到 $\hbar/2$ ，那么粒子 B 必定会处于本征值为 $-\hbar/2$ 的自旋算符 $S_x^{(2)}$ 的本征态上。系统中对粒子 A 进行一次测量均会导致 B 以百分之百的几率给出某个确定输出值。Einstein 等人用 EPR 佯谬来反对量子力学的主要依据来源于局域性假设（若测量时两个子系统不再相互作用，影响其中之一不会使另一个发生变化）。根据上述理想实验，对粒子 A 某个量的测量显然会影响粒子 B 的量子态，因此量子力学违反局域性假设，导致可分性和超距作用，所以是不完备的。

在 1964—1965 年间,为了打破 EPR 论证, J. Bell 提出了一个与量子力学相容的隐变量模型,认为“任何局域隐变量理论均不能重现量子力学全部统计预言”(Bell 定理),提出两粒子分别沿空间不同方向作自旋投影时一些相关函数之间应满足的不等式(Bell 不等式)^[41]。这样, Bell 不等式成为了用于判断 Einstein 局域性假设是否正确的最主要的判据。后来,绝大多数实验结果都是违背 Bell 不等式,从而证实了非局域效应的存在。这样, Einstein 等人最初为了反对量子力学而提出的 EPR 对反而揭示出了非局域性是量子力学的基本特性,而 EPR 粒子对作为一个量子系统所处的量子态就是最早提出的纠缠态。

现在,人们已经给出了纠缠态的严格的数学定义:对于一个由 N 个子系统构成的复合系统,如果系统的密度矩阵不能写成各个子系统的密度矩阵的直积的线性和的形式,则这个复合系统所处的就是纠缠态。对于两个两态粒子(2×2)的量子系统,存在有如下 4 个量子态,即

$$|\Psi_{12}^{(\pm)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (|\uparrow\rangle_1 |\downarrow\rangle_2 \pm |\downarrow\rangle_1 |\uparrow\rangle_2), \quad |\Phi_{12}^{(\pm)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (|\uparrow\rangle_1 |\uparrow\rangle_2 \pm |\downarrow\rangle_1 |\downarrow\rangle_2)$$

$|\Psi_{12}^{(\pm)}\rangle$ 为单重态,其余的为三重态,它们构成了四维希尔伯特空间的完备正交归一基,称为 Bell 基。这里所指的两态粒子包括了很多不同类型的量子体系,例如,自旋为 $\hbar/2$ 的粒子,正交偏振的光子,两能级的原子等。EPR 粒子所处的量子态就是单重 Bell 基。2×2 量子系统是日前人们研究的比较清楚的体系,对于多态多粒子的纠缠态,还有很多问题需要研究。为了表示纠缠态所携带的纠缠量的多少,人们引入了纠缠度的概念,对于两体纯态,纠缠度被定义成系统的 Von Neumann 熵函数, Bell 基的纠缠度是 1,也称为一个 ebit(纠缠比特)。日前,人们已广泛使用四个 Bell 基作为定量两粒子系统纠缠的标准,纠缠度的提出为不同纠缠度之间建立了可比关系。

纠缠态的非局域性不仅是一个物理学家们讨论的基本理论问题,而且可以成为未来量子信息技术的手段和工具。1993 年, Bennett 等 4 个国家的 6 位科学家联合提出了一种利用纠缠态实现量子隐形传态的理论方案^[42],其基本思想是:为实现传送某个物体的未知量子态,可将原物的信息分成经典信息和量子信息两个部分,它们分别经由经典信道和量子信道传送给接受者,经典信息是发送者对原物进行某种测量而获得的,量子信息是发送者在测量中未提取的其余信息。接受

者在获得这两种信息之后,就可以制造出原物完美的复制品。在这个过程中,原物并未被传给接受者,它始终留在发送者处,被传送的仅仅是原物的量子态,发送者甚至可以对这个量子态一无所知,而接受者是将别的物质单元(如粒子)变换成为处于与原物完全相同的量子态,原物的量子态在发送者进行测量及提取经典信息时已遭破坏,因此,这是一种量子态的隐形传送,最终恢复原物量子态的粒子也可以不必与原物同类,只要它们满足相同的量子代数即可。

Bennett 等人的开创性论文发表以后,关于量子隐形传态的各种方案相继出现,其中有基于 Bell 基联合测量实现量子态传送的模型^[43]; Braunstein 提出利用量子计算机中的受控非门和单个量子比特操作所构成的量子回路实现量子隐形传态^[44]; L. Vaidman 等人提出用非局域测量方法实现量子态的隐形传送^[45]; A. Barenco 等人提出有别于量子隐形传态的量子态交换方案。在量子纠缠态的制备与隐形传态实验方面也有令世人举目的重大进展。1987 年,美国罗切斯特大学的 C. K. Hong 等利用 I 型切割的 KDP 晶体产生自发参量下转换的双光子对^[46]; 1988 年,马里兰大学的 Y. H. Shih 等利用 KDP 下转换光子对作为 EPR 实验的纠缠源,证明 Bell 不等式不成立^[47]; 1994 年, Y. H. Shih 等利用 BBO 晶体的 II 型参量下转换产生偏振纠缠的双光子对^[48]; 1999 年,奥地利因斯布鲁克大学的 Zeilinger 研究小组报道了世界上第一个实现量子隐形传态的实验方案,此事轰动了学术界和欧美的新闻界^[49]; 2003 年, Zeilinger 研究小组又发现了利用现有技术在实验可行的量子纠缠态纯化的理论方案^[50],原则上解决了日前在远距离量子通信中的根本问题。除了以上纯光子的纠缠态之外,关于原子、电子等其他粒子的纠缠态也是人们日前研究的热门课题,已经有多种理论方案被提出用来制备两原子纠缠态、多原子纠缠态等^[51-54]。在本论文中,我们将朱永元教授提出的压电超晶格的基础上^[55],采用二次量子化的方法处理光子和声子的压电互作用的过程,理论处理的结果表明压电超晶格可以作为制备元激发量子纠缠态的新方法。

参考文献

- [1] F. A. Armstrong, N. Bloembergen, J. Ducuing and P. S. Pershan, Phys. Rev. 127,1918(1962)
- [2] D. Feng, N. B. Ming, J. F. Hong, et al., Appl. Phys. Lett. 37, 607 (1980)

- [3] P. J. Steinhardt and S. Ostlund, *The Physics of Quasicrystals*, World Scientific, Singapore (1987)
- [4] C. Janot, *Quasicrystals*, Clarendon Press, Oxford (1992)
- [5] R. Merlin, K. Bajema and R. Clarke, *Phys. Rev. Lett.* 55, 1768 (1985)
- [6] A. Hu, et al., *Phys. Lett. A* 119, 313 (1986)
- [7] Y. Y. Zhu and N. B. Ming, *Phys. Rev. B* 42, 3676 (1990)
- [8] J. Feng, Y. Y. Zhu and N. B. Ming, *Phys. Rev. B* 41, 5578 (1990)
- [9] S. N. Zhu, Y. Y. Zhu and N. B. Ming, *Science* 278, 843 (1997)
- [10] H. Liu, Y. Y. Zhu, S. N. Zhu, N. B. Ming, *Appl. Phys. Lett.*, 79, 728 (2001)
- [11] H. Liu, S. N. Zhu, Y. Y. Zhu, N. B. Ming, X. C. Lin, W. J. Ling, A. Y. Yao and Z. Y. Xu, *Appl. Phys. Lett.*, 81, 3326 (2002)
- [12] E. Yablonovitch, *Phys. Rev. Lett.* 58, 2091 (1987)
- [13] S. John, *Phys. Rev. Lett.* 58, 2486 (1987)
- [14] G. D. Aguanno, M. Centini, M. Scalora, et al., *Phys. Rev. E* 64, 016609 (2001)
- [15] M. Centini, G. D. Aguanno, M. Scalora, et al., *Phys. Rev. E* 64, 046606 (2001)
- [16] Y. Dumeige, I. Sagnes, P. Monnier, et al., *Phys. Rev. Lett.* 89, 043901 (2002)
- [17] A. V. Balakin, V. A. Bushuev, B. I. Mantsyzov, et al., *Phys. Rev. E* 63, 046609 (2002)
- [18] B. Shi, X. Wang, *Appl. Phys. Lett.*, 80, 3667 (2002)
- [19] B. Shi, Z. M. Zhang, X. Wang, *Opt. Lett.*, 26, 1194 (2001)
- [20] N. H. Liu, S. Y. Zhu, H. Chen, et al., *Phys. Rev. E* 65, 046607 (2002)
- [21] G. D. Aguanno, M. Centini, M. Scalora, et al., *Phys. Rev. E* 63, 036610 (2001)
- [22] S. Y. Zhu, N. H. Liu, H. Zheng, et al., *Opt. Commu.* 174, 139 (2000)
- [23] J. Li, Z. Lie, C. T. Chan and P. Sheng, *Phys. Rev. Lett.* 90, 083901 (2003)
- [24] E. Macia, *Phys. Rev. E* 63, 205421 (2001)
- [25] R. W. Peng, X. Q. Huang, F. Qiu, et al., *Appl. Phys. Lett.*, 80, 3063 (2002)
- [26] R. Shimada, T. Koda, T. Ueta, et al., *J. Appl. Phys.*, 90, 3905 (2001)
- [27] Q. Qin, H. Lu, S. N. Zhu, et al., *Appl. Phys. Lett.*, 82, 4654 (2003)
- [28] V. G. Veselago, *Sov. Phys. Usp.* 10, 509 (1968)
- [29] J. B. Pendry, A. J. Holden, D. J. Robbins, and W. J. Stewart, *IEEE Trans*

- Microwave Theory Tech. 47,2075 (1999)
- [30] R. A. Shelby, D. R. Smith, and S. Schultz, *Science* 292,77 (2001)
- [31] J. B. Pendry, *Phys. Rev. Lett*, 85, 3966 (2000)
- [32] G. W. Hoof, *Phys. Rev. Lett*, 87, 249701 (2001)
- [33] J. B. Pendry, *Phys. Rev. Lett*, 87, 249702 (2001)
- [34] J. Pacheco, T. M. Grzegorzcyk, B. I. Wu, et al. , *Phys. Rev. Lett*, 89, 257401 (2003)
- [35] D. R. Smith, D. Schurig, *Phys. Rev. Lett*, 90, 077405 (2003)
- [36] G. Gomez-Santos, *Phys. Rev. Lett*, 90, 077401 (2003)
- [37] J. Li, L. Zhou, C. T. Chan, et al., *Phys. Rev. Lett*, 90, 083901 (2003)
- [38] S. Foteinopoulou, E. N. Economou, C. M. Soukoulis, *Phys. Rev. Lett*, 90, 107402 (2003)
- [39] A. A. Houck, J. B. Brock, I. L. Chuang, *Phys. Rev. Lett*, 90, 137401 (2003)
- [40] A. Einstein, B. Podolsky, N. Rosen, *Phys. Rev.* 47, 777 (1935)
- [41] J. S. Bell, *Physics* 1, 195 (1964)
- [42] C. H. Bennett, G. Brassard, C. Crepeau, et al, *Phys. Rev.* 70, 1895 (1993)
- [43] L. davidovich, N. Zagury, M. Brune, et al. *Phys. Rev. A* 50, 895 (1994)
- [44] S. L. Braustein, A. Mann, *Phys. Rev. A* 51, 1727 (1995)
- [45] L. Vaidman, *Phys. Rev. A* 49, 1473 (1994)
- [46] C. K. Hong, Z. Y. Ou, L. Mandel, *Phys. Rev. Lett*, 59, 2044 (1987)
- [47] Y. H. Shih, C. O. Alley, *Phys. Rev. Lett*, 61, 2921 (1988)
- [48] Y. H. Shih, A. V. Sergienko, *Phys. Rev. A* 186, 24 (1994)
- [49] D. Bouwmeester, K. Mattle, M. Eibl, H. Weinfurter, A. Zeilinger, *Nature* 390, 575 (1997)
- [50] J. W. Pan, S. Gasparoni, R. Ursin, G. Weihs, A. Zeilinger, *Nature* 423, 417 (2003)
- [51] S. J. D. Phenix, S. M. Barnett, *J. Modern Opt.* 40, 979 (1993)
- [52] I. K. Kudryavisev, P. L. Knight, *J. Modern Opt.* 40, 1673 (1993)
- [53] J. I. Grac, P. Zoller, *Phys. Rev. A* 50, 2799 (1996)
- [54] C. C. Gerry, *Phys. Rev. A* 53, 2857 (1996)
- [55] Y. Y. Zhu, X. J. Zhang, Y. Q. Lu, Y. F. Cheng, S. N. Zhu and N. B. Ming, *Phys.*

Rev. Lett, 90, 053903 (2003)

第二章 非周期光学超晶格

光学超晶格是利用介电材料中自发极化方向按照周期^[1-3]、准周期^[4-10]、双周期^[11-12]或非周期^[13-15]规律调制后形成的多畴结构,极化方向调制的结果是使介电材料的非线性光学系数在空间中形成周期、准周期或者非周期分布的函数,对分布函数进行傅立叶变换,可以得到光学超晶格的倒格矢分布,我们可以利用这些倒格矢去补偿非线性光学频率转换过程中的位相失配。非周期光学超晶格的设计方法主要优势在于:完全是从倒格矢出发设计光学超晶格,并且用结构函数的形式给出针对各种准位相匹配过程设计的非周期结构。

2-1 非周期光学超晶格的设计

首先,我们在周期光学超晶格的基础上给出非周期光学超晶格的设计方法。假设实际当中的一个准位相匹配过程的波矢失配是 Δk ,那么我们需要光学超晶格提供倒格矢 $G = \Delta k$,我们定义周期 $\Lambda = 2\pi/G$,及相应的周期函数

$$F_{\Lambda}(x) = 1 - 2 \cdot \text{floor}\left(\frac{2 \cdot x}{\Lambda}\right) + 4 \cdot \text{floor}\left(\frac{x}{\Lambda}\right) \quad (2-1-1)$$

其中 $\text{floor}(x)$ 被定义为不大于 x 的最大整数。 $F_{\Lambda}(x)$ 的倒格矢是 $G_m = m \cdot \frac{2\pi}{\Lambda}$, ($m=1, 3, 5, \dots$),相应的傅立叶系数是 $f_m = \frac{2}{m \cdot \pi}$, ($m=1, 3, 5, \dots$)。

在以上周期结构函数的基础上,我们可以定义最简单的非周期函数,

$$H(x) = F_{\Lambda}\left(\left(\text{floor}\left(\frac{x}{d}\right) + \text{ceil}\left(\frac{x}{d}\right)\right) \cdot \frac{d}{2}\right) \quad (2-1-2)$$

其中 $\text{floor}(x)$ 被定义为不小于 x 的最小整数, d 是我们在此引入的最小畴宽, d 的取值可以认为选定。 $F_{\Lambda}(x)$ 的倒格矢 G_1 在 $H(x)$ 傅立叶谱中仍然出现,但其傅立叶系数与最小畴 d 的选取有关,我们定义 $\sigma = 2 \cdot d/\Lambda$, G_1 的傅立叶系数可以写做 σ 的函数。当 σ 或者 $1/\sigma$ 是整数时,我们有

$$f(\sigma) = \begin{cases} \frac{2}{\sigma \cdot \pi} \cdot \sin\left(\frac{\sigma \cdot \pi}{2}\right) & \sigma \geq 1 \\ \frac{2}{\pi} & \sigma < 1 \end{cases} \quad (2-1-3)$$

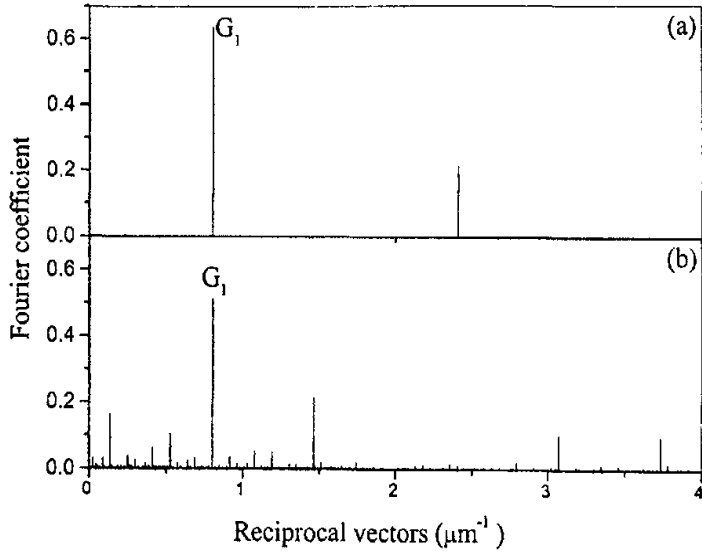


图 2-1-a. (a)Fourier spectrum of $F_\lambda(x)$; (b)Fourier spectrum of $H(x)$

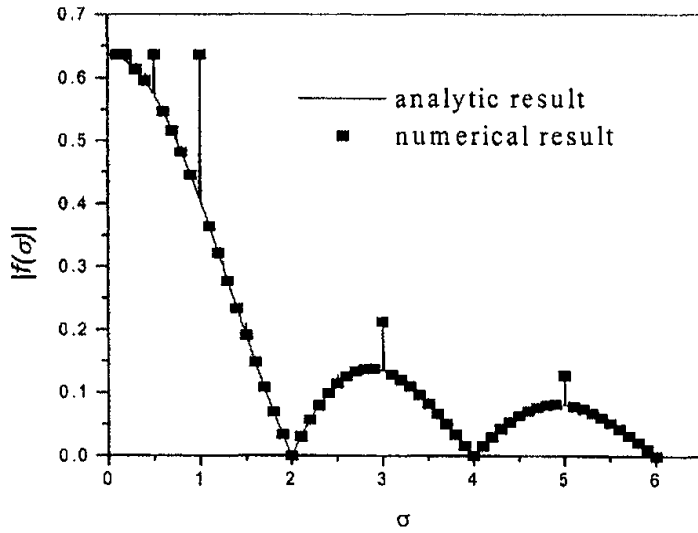


图 2-1-b. The curve of Fourier coefficient on structure parameter σ

当 σ 、 $1/\sigma$ 都不是整数时，我们有

$$f(\sigma) = \frac{4}{\sigma \cdot \pi^2} \cdot \sin\left(\frac{\sigma \cdot \pi}{2}\right) \quad (2-1-4)$$

图 (2-1-a) 中给出了 $F_\Lambda(x)$ 和 $H(x)$ 的傅立叶谱, 其中 $\Lambda = 7.839 \mu\text{m}$, $d = 2.727 \mu\text{m}$, $\sigma = \sqrt{2}/2$. 图 (2-1-b) 中给出了傅立叶系数 $f(\sigma)$ 与结构参数 σ 的关系曲线。

2-2 非周期光学超晶格中的三倍频

THG 耦合方程可以写成

$$\begin{cases} \frac{dA_1}{dx} = -i \cdot \kappa_2 \cdot A_3 \cdot A_2^* \cdot \exp(-i \cdot \Delta k_2 \cdot x) - i \cdot 2 \cdot \kappa_1 \cdot A_2 \cdot A_1^* \cdot \exp(-i \cdot \Delta k_1 \cdot x) \\ \frac{dA_2}{dx} = -i \cdot \kappa_2 \cdot A_3 \cdot A_1^* \cdot \exp(-i \cdot \Delta k_2 \cdot x) - i \cdot \kappa_1 \cdot A_1^2 \cdot \exp(i \cdot \Delta k_1 \cdot x) \\ \frac{dA_3}{dx} = -i \cdot \kappa_2 \cdot A_2 \cdot A_1 \cdot \exp(i \cdot \Delta k_2 \cdot x) \end{cases} \quad (2-2-1)$$

其中倍频失配 $\Delta k_1 = k_{2\omega} - 2k_\omega$, 和频失配 $\Delta k_2 = k_{3\omega} - k_{2\omega} - k_\omega$, 需要非周期超晶格提供倒格矢 $G_1 = \Delta k_1$, $G_2 = \Delta k_2$, 相应周期是 $\Lambda_1 = 2\pi/G_1$, $\Lambda_2 = 2\pi/G_2$ 。我们定义周期函数

$$F_1(x) = 1 - 2 \cdot \text{floor}\left(\frac{2 \cdot x}{\Lambda_1}\right) + 4 \cdot \text{floor}\left(\frac{x}{\Lambda_1}\right) \quad (2-2-2)$$

$$F_2(x) = 1 - 2 \cdot \text{floor}\left(\frac{2 \cdot x}{\Lambda_2}\right) + 4 \cdot \text{floor}\left(\frac{x}{\Lambda_2}\right) \quad (2-2-3)$$

在此基础上, 我们定义两个非周期函数

$$H_1(x) = F_1\left(\left(\text{floor}\left(\frac{x}{d}\right) + \text{ceil}\left(\frac{x}{d}\right)\right) \cdot \frac{d}{2}\right) \quad (2-2-4)$$

$$H_2(x) = F_2\left(\left(\text{floor}\left(\frac{x}{d}\right) + \text{ceil}\left(\frac{x}{d}\right)\right) \cdot \frac{d}{2}\right) \quad (2-2-5)$$

d 仍然是人为选取的最小畴宽。最后, 我们可以得到实现三倍频的非周期函数是

$$H(x) = H_2(x) + \left(\text{floor}\left(\text{floor}\left(\frac{x}{d}\right) \cdot \gamma\right) - \text{floor}\left(\text{ceil}\left(\frac{x}{d}\right) \cdot \gamma\right)\right) \cdot (H_2(x) - H_1(x)) \quad (2-2-6)$$

在 $H(x)$ 的傅立叶谱中, 我们可以同时得到倒格矢 G_1 、 G_2 , 并且相应的傅立叶系数是 $f_1 = \gamma \cdot f(\sigma_1)$ 和 $f_2 = (1 - \gamma) \cdot f(\sigma_2)$, 此处, $\sigma_1 = 2 \cdot d / \Lambda_1$, $\sigma_2 = 2 \cdot d / \Lambda_2$ 。由此, 我们可以得到 (2-2-1) 中的耦合系数为

$$\kappa_1 = \frac{d_{33} \cdot \gamma \cdot f(\sigma_1)}{2 \cdot c} \cdot \sqrt{\frac{\omega_1^2 \cdot \omega_2}{n_1^2 \cdot n_2}} \quad (2-2-7)$$

$$\kappa_2 = \frac{d_{33} \cdot (1-\gamma) \cdot f(\sigma_2)}{c} \cdot \sqrt{\frac{\omega_1 \cdot \omega_2 \cdot \omega_3}{n_1 \cdot n_2 \cdot n_3}} \quad (2-2-8)$$

我们定义 $\kappa_1 : \kappa_2 = \delta$ ，可以得到

$$\gamma = \frac{2 \cdot \delta \cdot \sigma_1 \cdot \left| \sin\left(\frac{\pi \cdot \sigma_2}{2}\right) \right| \cdot \sqrt{3 \cdot n_1}}{2 \cdot \delta \cdot \sigma_1 \cdot \left| \sin\left(\frac{\pi \cdot \sigma_2}{2}\right) \right| \cdot \sqrt{3 \cdot n_1} + \sigma_2 \cdot \left| \sin\left(\frac{\pi \cdot \sigma_1}{2}\right) \right| \cdot \sqrt{n_3}} \quad (2-2-9)$$

根据以前的理论，THG 的转换效率在耦合系数比 $\delta = 0.4429$ 时达到最理想，由此可以根据 (2-2-9) 计算结构参数 γ 。

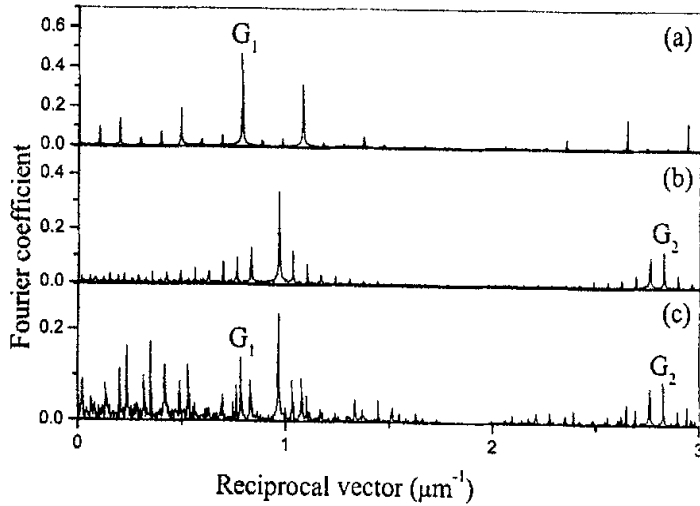


图 2-2-a. (a) $H_1(x)$ 的傅立叶谱；(b) $H_2(x)$ 的傅立叶谱；(c) $H(x)$ 的傅立叶谱

如果我们利用 $LiTaO_3$ 非周期光学超晶格实现 $1.064 \mu m$ 激光 THG，可以计算得到周期 $\Lambda_1 = 7.839 \mu m$ ， $\Lambda_2 = 2.174 \mu m$ ，在此，我们选取最小畴为 $d = 3.3 \mu m$ ，相应地，我们可以计算得到 $\sigma_1 = 0.842$ ， $\sigma_2 = 3.306$ 。将以上数据代入 (2-2-9)，我们可以最后得到 $\gamma = 0.295$ 。由这些数据，我们可以最终确定产生 $1.064 \mu m$ 激光

THG 的 $LiTaO_3$ 非周期光学超晶格 $H(x)$ 的结构。

图 (2-2-a) 中分别给出了非周期结构 $H_1(x)$ 、 $H_2(x)$ 和 $H(x)$ 的傅立叶谱, 由图中, 我们可以清楚地看出, $H(x)$ 同时提供了 $1.064\mu m$ 激光倍频与和频所需的倒格矢 G_1 、 G_2 。在 (2-2-b) 中, 我们给出了非周期光学超晶格中基波、倍频波和三倍频波的场分布曲线, 可以看出, 在选择合适的结构参数的情况下, 我们可以使三倍频的转换效率大于 90%。

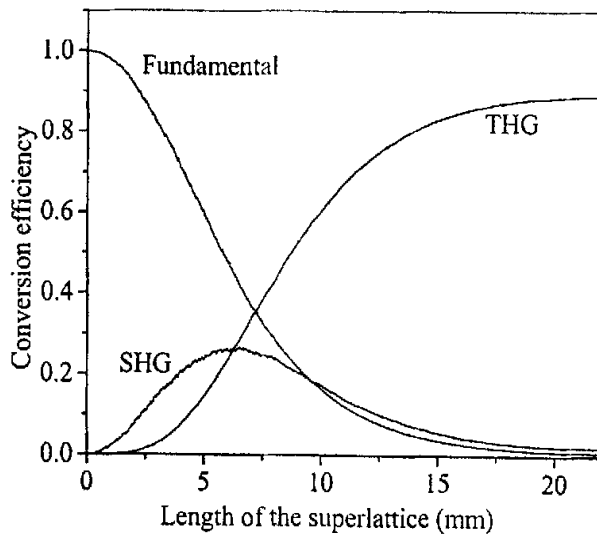


图 2-2-b. The curve of conversion efficiency on the length of superlattice

2-3 非周期光学超晶格中的三基色激光

利用非周期光学超晶格设计方法, 我们可以同时实现对 $\lambda_1 = 1.342\mu m$ 激光的倍频、三倍频以及 $\lambda_2 = 1.064\mu m$ 激光的倍频三个准位相匹配过程, 从而产生 $0.677\mu m$ 红光、 $0.532\mu m$ 绿光、 $0.447\mu m$ 蓝光的三基色激光输出。这时, 三基色激光的耦合方程组可以写作

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dA_1}{dx} &= -i \cdot \kappa_2 \cdot A_3 \cdot A_2^* \cdot \exp(-i \cdot \Delta k_2 \cdot x) - i \cdot 2 \cdot \kappa_1 \cdot A_2 \cdot A_1^* \cdot \exp(-i \cdot \Delta k_1 \cdot x) \\ \frac{dA_2}{dx} &= -i \cdot \kappa_2 \cdot A_3 \cdot A_1^* \cdot \exp(-i \cdot \Delta k_2 \cdot x) - i \cdot \kappa_1 \cdot A_1^2 \cdot \exp(i \cdot \Delta k_1 \cdot x) \\ \frac{dA_3}{dx} &= -i \cdot \kappa_2 \cdot A_2 \cdot A_1 \cdot \exp(i \cdot \Delta k_2 \cdot x) \\ \frac{dA_4}{dx} &= -i \cdot 2 \cdot \kappa_3 \cdot A_5 \cdot A_4^* \cdot \exp(-i \cdot \Delta k_3 \cdot x) \\ \frac{dA_5}{dx} &= -i \cdot \kappa_3 \cdot A_4^2 \cdot \exp(i \cdot \Delta k_3 \cdot x) \end{aligned} \right. \quad (2-3-1)$$

其中 A_1 、 A_2 、 A_3 、 A_4 、 A_5 分别是 1.342、0.677、0.447、1.064、0.532 μm 波长激光的振幅，1.342 μm 倍频失配 $\Delta k_1 = k_{2\omega_1} - 2k_{\omega_1}$ ，1.342 μm 和频失配 $\Delta k_2 = k_{3\omega_1} - k_{2\omega_1} - k_{\omega_1}$ ，1.064 μm 倍频失配 $\Delta k_3 = k_{2\omega_2} - 2k_{\omega_2}$ 。我们需要引进三个倒格矢 $G_1 = \Delta k_1$ ， $G_2 = \Delta k_2$ ， $G_3 = \Delta k_3$ ，相应的周期是 $\Lambda_1 = 2\pi/G_1$ ， $\Lambda_2 = 2\pi/G_2$ ， $\Lambda_3 = 2\pi/G_3$ ，我们定义周期函数

$$F_1(x) = 1 - 2 \cdot \text{floor}\left(\frac{2 \cdot x}{\Lambda_1}\right) + 4 \cdot \text{floor}\left(\frac{x}{\Lambda_1}\right) \quad (2-3-2)$$

$$F_2(x) = 1 - 2 \cdot \text{floor}\left(\frac{2 \cdot x}{\Lambda_2}\right) + 4 \cdot \text{floor}\left(\frac{x}{\Lambda_2}\right) \quad (2-3-3)$$

$$F_3(x) = 1 - 2 \cdot \text{floor}\left(\frac{2 \cdot x}{\Lambda_3}\right) + 4 \cdot \text{floor}\left(\frac{x}{\Lambda_3}\right) \quad (2-3-4)$$

在此基础上，我们定义非周期函数

$$H_1(x) = F_1\left(\left(\text{floor}\left(\frac{x}{d}\right) + \text{ceil}\left(\frac{x}{d}\right)\right) \cdot \frac{d}{2}\right) \quad (2-3-5)$$

$$H_2(x) = F_2\left(\left(\text{floor}\left(\frac{x}{d}\right) + \text{ceil}\left(\frac{x}{d}\right)\right) \cdot \frac{d}{2}\right) \quad (2-3-6)$$

$$H_3(x) = F_3\left(\left(\text{floor}\left(\frac{x}{d}\right) + \text{ceil}\left(\frac{x}{d}\right)\right) \cdot \frac{d}{2}\right) \quad (2-3-7)$$

我们定义 1.342 μm 激光三倍频的非周期结构

$$H_4(x) = H_2(x) + \left(\text{floor}\left(\text{floor}\left(\frac{x}{d}\right) \cdot \gamma_1\right) - \text{floor}\left(\text{ceil}\left(\frac{x}{d}\right) \cdot \gamma_1\right)\right) \cdot (H_2(x) - H_1(x)) \quad (2-3-8)$$

最后，我们得到产生三基色激光的非周期结构

$$H(x) = H_4(x) + \left(\text{floor} \left(\text{floor} \left(\frac{x}{d} \right) \cdot \gamma_2 \right) - \text{floor} \left(\text{ceil} \left(\frac{x}{d} \right) \cdot \gamma_2 \right) \right) \cdot (H_4(x) - H_3(x)) \quad (2-3-9)$$

在以上定义中， d 仍然是人为选定的最小畴宽，我们定义 $\sigma_1 = 2 \cdot d / \Lambda_1$ ，

$\sigma_2 = 2 \cdot d / \Lambda_2$ ， $\sigma_3 = 2 \cdot d / \Lambda_3$ 。结构参数 γ_1 、 γ_2 被定为

$$\gamma_1 = \frac{2 \cdot \delta \cdot \sigma_1 \cdot \left| \sin \left(\frac{\pi \cdot \sigma_2}{2} \right) \right| \cdot \sqrt{3 \cdot n_1}}{2 \cdot \delta \cdot \sigma_1 \cdot \left| \sin \left(\frac{\pi \cdot \sigma_2}{2} \right) \right| \cdot \sqrt{3 \cdot n_1} + \sigma_2 \cdot \left| \sin \left(\frac{\pi \cdot \sigma_1}{2} \right) \right| \cdot \sqrt{n_3}}, \quad \gamma_2 = 0.333\dots$$

2-4 非周期光学超晶格中的多波长倍频

利用非周期光学超晶格设计方法，我们可以同时对任意多个波长的激光实现倍频。下面我们设计出一个非周期结构实例，能够同时实现 $\lambda_{1,2,3,4} = 1.2, 1.3, 1.4, 1.5 \mu\text{m}$ 四个波长的倍频输出。它们的失配分别是： $1.2 \mu\text{m}$ SHG $\Delta k_1 = k_{2\omega_1} - 2 \cdot k_{\omega_1}$ ； $1.3 \mu\text{m}$ SHG $\Delta k_2 = k_{2\omega_2} - 2 \cdot k_{\omega_2}$ ； $1.4 \mu\text{m}$ SHG $\Delta k_3 = k_{2\omega_3} - 2 \cdot k_{\omega_3}$ ； $1.5 \mu\text{m}$ SHG $\Delta k_4 = k_{2\omega_4} - 2 \cdot k_{\omega_4}$ 。我们需要引进倒格矢 $G_1 = \Delta k_1$ ； $G_2 = \Delta k_2$ ； $G_3 = \Delta k_3$ ； $G_4 = \Delta k_4$ 。我们定义周期 $G_1 = 2\pi / \Lambda_1$ ， $G_2 = 2\pi / \Lambda_2$ ， $G_3 = 2\pi / \Lambda_3$ ， $G_4 = 2\pi / \Lambda_4$ 和周期函数

$$F_1(x) = 1 - 2 \cdot \text{floor} \left(\frac{2 \cdot x}{\Lambda_1} \right) + 4 \cdot \text{floor} \left(\frac{x}{\Lambda_1} \right) \quad (2-4-1)$$

$$F_2(x) = 1 - 2 \cdot \text{floor} \left(\frac{2 \cdot x}{\Lambda_2} \right) + 4 \cdot \text{floor} \left(\frac{x}{\Lambda_2} \right) \quad (2-4-2)$$

$$F_3(x) = 1 - 2 \cdot \text{floor} \left(\frac{2 \cdot x}{\Lambda_3} \right) + 4 \cdot \text{floor} \left(\frac{x}{\Lambda_3} \right) \quad (2-4-3)$$

$$F_4(x) = 1 - 2 \cdot \text{floor} \left(\frac{2 \cdot x}{\Lambda_4} \right) + 4 \cdot \text{floor} \left(\frac{x}{\Lambda_4} \right) \quad (2-4-4)$$

在此基础上，定义非周期函数

$$H_1(x) = F_1 \left(\left(\text{floor} \left(\frac{x}{d} \right) + \text{ceil} \left(\frac{x}{d} \right) \right) \cdot \frac{d}{2} \right) \quad (2-4-5)$$

$$H_2(x) = F_2 \left(\left(\text{floor} \left(\frac{x}{d} \right) + \text{ceil} \left(\frac{x}{d} \right) \right) \cdot \frac{d}{2} \right) \quad (2-4-6)$$

$$H_3(x) = F_3 \left(\left(\text{floor} \left(\frac{x}{d} \right) + \text{ceil} \left(\frac{x}{d} \right) \right) \cdot \frac{d}{2} \right) \quad (2-4-7)$$

$$H_4(x) = F_4 \left(\left(\text{floor} \left(\frac{x}{d} \right) + \text{ceil} \left(\frac{x}{d} \right) \right) \cdot \frac{d}{2} \right) \quad (2-4-8)$$

最后，我们得到同时实现四波长倍频的非周期函数是

$$H(x) = H_1(x) \cdot \delta_1(x) + H_2(x) \cdot \delta_2(x) + H_3(x) \cdot \delta_3(x) + H_4(x) \cdot \delta_4(x) \quad (2-4-9)$$

其中 $\delta_i(x) = \delta(\text{floor}(x/d) - 4 \cdot \text{floor}(x/d) + 1 - i)$ ($i=1, 2, 3, 4$)， $\delta(x)$ 是规一化的

delta 函数。与 G_i ($i=1, 2, 3, 4$) 相应的傅立叶系数是 $f_i = \sin(\sigma_i \cdot \pi/2) / (\sigma_i \cdot \pi^2)$

($i=1, 2, 3, 4$)，其中 $\sigma_i = 2 \cdot d / \Lambda_i$ ($i=1, 2, 3, 4$)。

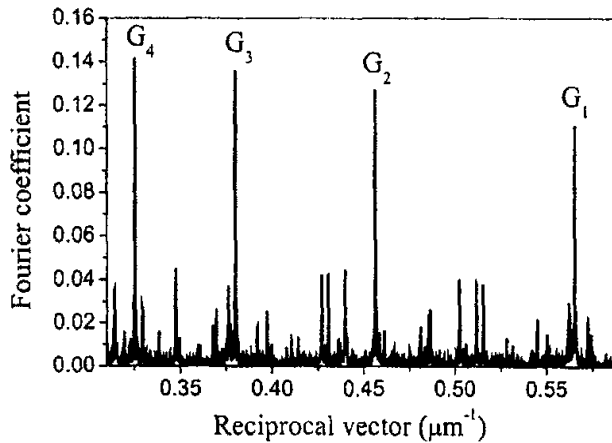


图 2-4-a. The Fourier spectrum of $H(x)$

在此，我们仍然用 $LiTaO_3$ 非周期超晶格做实例，周期是 $\Lambda_{1,2,3,4} = 11.11, 13.76, 16.53, 19.32 \mu m$ 。最小畴取做 $d = 5.0 \mu m$ ，那么 $\sigma_{1,2,3,4} = 0.45, 0.363, 0.302, 0.269$ 。

在图(2-4-a)中,我们给出了四波长倍频非周期光学超晶格的傅立叶谱,在表格(2-4),我们给出了四波长倍频对应的傅立叶系数的解析计算和数值计算的结果。在图(2-4-b)中,我们给出了四波长非周期光学超晶格的倍频谱的理论计算和实验测量的结果比较。实验中,光源是可调谐的皮秒 OPA,波长可调范围是 470~1500nm,激光脉冲宽度是 35ps,重复频率是 10Hz。在 $\lambda_{1,2,3,4} = 1.2, 1.3, 1.4, 1.5 \mu\text{m}$ 波长处,倍频的转换效率分别达到 48.9%, 71.2%, 64.3% 和 74.5%。

Wavelength (μm)	Fourier coefficients (μm^{-1})	
	Numerical results	Analytic results
1.2	0.113	0.111
1.3	0.128	0.127
1.4	0.138	0.136
1.5	0.143	0.142

表 2-4. The Fourier coefficients at four wavelength $\lambda_{1,2,3,4}$

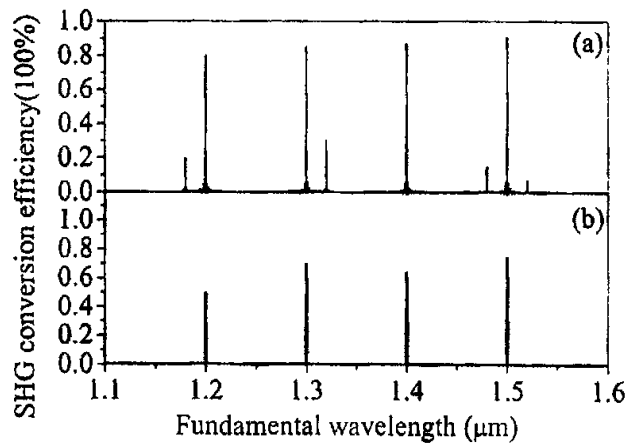


图 2-4-b The SHG spectrum of $H(x)$

(a) numerical calculating result; (b) experiment result

2-5 非周期光学超晶格中的通道展宽

根据准位相匹配理论，位相失配对非线性光学频率转化效率影响很大，在实际操作中，很多因素都会导致位相失配，例如环境温度的波动，入射光波长的偏移，光线入射角度的变化，材料折射率的改变，超晶格样品的制备误差等。根据 Fejer 的分析，如果我们用参数 ζ 代表以上某个因素，那么准位相匹配所能允许的波动范围可以用频率转化通道的半高宽来表示

$$\delta\zeta = \frac{5.57}{L} \left| \frac{\partial \Delta k}{\partial \zeta} \right|^{-1} \quad (2-5-1)$$

其中 L 是样品的长度。在实际操作中， ζ 的改变经常会超过 $\delta\zeta$ 的范围，这样频率转换效率会下降很多，对于多个准位相匹配的级联过程， ζ 的波动对输出光的影响会更大。

非周期光学超晶格是一种非常灵活的设计方法，利用这种方法，我们可以得到比较宽的频率转换通道，这样输出光的转化效率可以保持更好的稳定性，同时还可以补偿级联过程中不同匹配条件之间的偏差。下面我们就以三倍频过程中温度变化通道展宽来说明这种设计方法。

在此，我们将倍频与和频的位相失配都定义成温度的函数

$$\Delta k_1'(t) = k_{2\omega}(t) - 2k_\omega(t) \quad (2-5-2)$$

$$\Delta k_2'(t) = k_{3\omega}(t) - k_{2\omega}(t) - k_\omega(t) \quad (2-5-3)$$

现在我们采用最简单的两通道展宽，我们假设倍频有两个可能的匹配温度 $t_1 = 148^\circ\text{C}$ ， $t_2 = 152^\circ\text{C}$ ，对应的周期是

$$\Lambda_1 = \frac{2\pi}{\Delta k_1'(t_1)} \quad (2-5-4)$$

$$\Lambda_2 = \frac{2\pi}{\Delta k_1'(t_2)} \quad (2-5-5)$$

和频的匹配温度是 $t_3 = 150^\circ\text{C}$ ，对应的周期是

$$\Lambda_3 = \frac{2\pi}{\Delta k_2'(t_3)} \quad (2-5-6)$$

下面，我们定义三个周期结构函数

$$F_1(x) = 1 - 2 \cdot \text{floor}\left(\frac{2 \cdot x}{\Lambda_1}\right) + 4 \cdot \text{floor}\left(\frac{x}{\Lambda_1}\right) \quad (2-5-7)$$

$$F_2(x) = 1 - 2 \cdot \text{floor}\left(\frac{2 \cdot x}{\Lambda_2}\right) + 4 \cdot \text{floor}\left(\frac{x}{\Lambda_2}\right) \quad (2-5-8)$$

$$F_3(x) = 1 - 2 \cdot \text{floor}\left(\frac{2 \cdot x}{\Lambda_3}\right) + 4 \cdot \text{floor}\left(\frac{x}{\Lambda_3}\right) \quad (2-5-9)$$

在此基础上，我们定义三个非周期函数

$$H_1(x) = F_1\left(\left(\text{floor}\left(\frac{x}{d}\right) + \text{ceil}\left(\frac{x}{d}\right)\right) \cdot \frac{d}{2}\right) \quad (2-5-10)$$

$$H_2(x) = F_2\left(\left(\text{floor}\left(\frac{x}{d}\right) + \text{ceil}\left(\frac{x}{d}\right)\right) \cdot \frac{d}{2}\right) \quad (2-5-11)$$

$$H_3(x) = F_3\left(\left(\text{floor}\left(\frac{x}{d}\right) + \text{ceil}\left(\frac{x}{d}\right)\right) \cdot \frac{d}{2}\right) \quad (2-5-12)$$

于是，我们定义倍频的两通道展宽非周期函数

$$H_4(x) = \sum_{i=1}^2 H_i(x) \cdot \delta \left(\text{floor}\left(\frac{x}{d} - 2 \cdot \text{floor}\left(\frac{x}{2 \cdot d}\right)\right) + 1 - i \right) \quad (2-5-13)$$

最后，我们得到通道展宽后的三倍频结构函数

$$H_5(x) = H_4(x) + \left(\text{floor}\left(\text{floor}\left(\frac{x}{d}\right) \cdot \gamma\right) - \text{floor}\left(\text{ceil}\left(\frac{x}{d}\right) \cdot \gamma\right) \right) \cdot (H_4(x) - H_3(x)) \quad (2-5-14)$$

其中

$$\gamma = \frac{2 \cdot \delta \cdot \sigma_1 \cdot \left| \sin\left(\frac{\pi \cdot \sigma_2}{2}\right) \right| \cdot \sqrt{3 \cdot n_1}}{2 \cdot \delta \cdot \sigma_1 \cdot \left| \sin\left(\frac{\pi \cdot \sigma_2}{2}\right) \right| \cdot \sqrt{3 \cdot n_1} + \frac{1}{2} \cdot \sigma_2 \cdot \left| \sin\left(\frac{\pi \cdot \sigma_1}{2}\right) \right| \cdot \sqrt{n_3}} \quad (2-5-15)$$

$$\delta = 0.4429, \quad \sigma_1 = 2d/(\Lambda_1 + \Lambda_2), \quad \sigma_2 = d/\Lambda_3.$$

在图(2-5)中，我们给出了用10mm长的LiTaO₃非周期光学超晶格实现1.342微米基波三倍频的输出光效率随温度变化的数值计算的结果。其中，(a)、(b)、(c)对应没有通道展宽的样品；(d)、(e)、(f)对应两通道展宽的样品；(a)、(d)对应倍频匹配温度与和频匹配温度相差0°C；(b)、(e)对应两个匹配温度相差1.5°C；(c)、

(f)对应两个匹配温度相差 2.5°C 。由比较可以看出，对于没有通道展宽的样品，随着和频匹配温度偏移倍频匹配温度，三倍频的输出效率迅速下降，而对于两通道展宽的样品，三倍频能够在比较宽的范围内保持稳定的输出。



THG efficiencies versus the detuning from nominal SFG phase-matching temperatures
 (a) one-channel, $\Delta T=0^{\circ}\text{C}$; (b) one-channel, $\Delta T=1.5^{\circ}\text{C}$; (c) one-channel, $\Delta T=2.5^{\circ}\text{C}$;
 (d) two-channel, $\Delta T=0^{\circ}\text{C}$; (e) two-channel, $\Delta T=1.5^{\circ}\text{C}$; (f) two-channel, $\Delta T=2.5^{\circ}\text{C}$;
 The dotted lines denote SHG tuning curves and the solid lines denote THG tuning curves.

图 (2-5)

参考文献

- [1] D. Feng, N. B. Ming, J. F. Hong, et al., Appl. Phys. Lett. 37, 607 (1980)
- [2] H. Liu, X. Y. Liang,, W. Hou, et al., FERROELECTRICS 253, 811 (2001)
- [3] G. Z. Luo , S. N. Zhu, J. L. He, et al., Appl. Phys. Lett. 78, 3006 (2001)
- [4] Y. Du, S. N. Zhu, Y. Y. Zhu, et al., Appl. Phys. Lett. 81, 1573 (2002)
- [5] H. Wei, C. Zhang, Y. Y. Zhu, et al., PHYS STATUS SOLIDI B 229, 1275 (2002)
- [6] C. Zhang, H. Wei, Y. Y. Zhu, et al., Opt. Lett. 26, 899 (2001)
- [7] Y. B. Chen, C. Zhang, Y. Y. Zhu, et al., Appl. Phys. Lett. 78, 577 (2001)
- [8] Y. Q. Qin, Y. Y. Zhu, S. N. Zhu, et al., Appl. Phys. Lett. 75, 448 (1999)
- [9] S. N. Zhu, Y. Y. Zhu, Y. Q. Qin,, et al., Phys. Rev. Lett. 78, 2752 (1997)

- [10] S. N. Zhu, Y. Y. Zhu, N. B. Ming, Science 278, 843 (1997)
- [11] Z. W. Liu, S. N. Zhu, Y. Y. Zhu, et al., SOLID STATE COMMUN 119, 363 (2001)
- [12] Z. W. Liu, S. N. Zhu, Y. Y. Zhu, et al., CHINESE PHYS LETT 18, 539 (2001)
- [13] J. Liao, J. L. He, H. Liu, et al., Appl. Phys. Lett. 82, 3159 (2003)
- [14] H. Liu, Y. Y. Zhu, S. N. Zhu, N. B. Ming, Appl. Phys. Lett.,79, 728 (2001)
- [15] H. Liu, S. N. Zhu, Y. Y. Zhu, N. B. Ming, et al. Appl. Phys. Lett.,81, 3326 (2002)

第三章 非周期光子带隙材料

光子带隙材料是由不同折射率材料在空间按一定规律调制分布形成的功能材料。近年来,一维带隙材料正被应用于非线性频率转化^[1-3],光脉冲的增强和压缩^[4],缺陷态和光子局域态^[5-6],超光速^[7-8]和光速减慢^[9],负折射带隙材料^[10]等方面。而且,一维光子带隙材料不再仅限于简单的周期结构,准周期^[11-12]、双周期结构^[13-14]的带隙材料也是人们研究的兴趣所在。在本章中,我们将首次提出一个等效介质场理论,并根据这个理论用解析的方法重新分析处理了光子带隙材料一些基本问题。在等效介质场中,电磁波的散射可以看作是沿不同方向传播的电磁波之间的耦合,当入射波与反射波之间满足波矢匹配关系时,就会产生光子禁带,倒格矢是补偿波矢失配的条件,也是禁带产生的根源。这样,我们可以将熟悉的准位相匹配理论的分析方法应用到光子带隙材料中来,完全从倒空间出发来分析各种结构的光子带隙材料。我们也将首次提出非周期光子带隙材料的设计理论,根据这个设计方法,我们可以完全根据实际需要出发,人为设计具有各种禁带特征的非周期光子带隙材料。

3-1 等效介质场

现在,我们来分析一下由两种不同折射率材料组成的一维光子带隙材料。两种材料的相对介电常数分别是 ϵ_1 、 ϵ_2 ,折射率是 $n_1 = \sqrt{\epsilon_1}$, $n_2 = \sqrt{\epsilon_2}$ 。假设有一束频率 ω 的单色平面光波垂直入射到光子带隙材料中,当这束光在光子带隙材料一直向前面传播,如果不考虑散射光的话,其电场可以写成

$$E(z) = A(z) \cdot e^{i(\omega t - \phi(z))} \quad (3-1-1)$$

其中空间位相

$$\phi(z) = \phi_0 + \frac{\omega}{c} \cdot \int_0^z n(t) \cdot dt \quad (3-1-2)$$

其中 ϕ_0 是入射时的初位相, $n(t) = n_1$ 或 n_2 ,取决于折射率的空间分布。在此,我们对坐标做如下变换

$$z' = \frac{1}{n_u} \cdot \int_0^z n(z) \cdot dz \quad (3-1-3)$$

其中 $n_u = \sqrt{\frac{n_1^2 + n_2^2}{2}}$ ，并定义波矢 $k_u = \frac{\omega}{c} \cdot n_u$ ，那么

$$\phi(z') = \phi_0 + k_u \cdot z' \quad (3-1-4)$$

于是

$$E(z') = A(z') \cdot e^{i(\omega t - k_u \cdot z' - \phi_0)} \quad (3-1-5)$$

以上坐标变换其实是将光子带隙材料经过空间的拓扑变换成为一个背景折射率是 n_u 的等效介质场，原来光子带隙材料折射率的空间调制可以看作是等效介质场中的扰动，扰动的幅度是

$$\Delta n = \sqrt{\frac{n_1^2 - n_2^2}{2}} \quad (3-1-6)$$

接下来，我们将把光波导中的耦合模理论应用于此。在没有扰动的等效介质场中，平面电磁波的波矢是

$$k_u = \frac{\omega}{c} \cdot n_u \quad (3-1-7)$$

向不同方向传播的电磁波相当于互相正交的本征模，不同本征模之间没有能量交换。当考虑折射率的扰动以后，不同本征模之间会发生耦合，光子带隙材料中电磁波的散射可以看作是等效介质场中向不同方向传播的本征模之间耦合的结果。由于光子带隙材料于等效介质场是一一对应的关系，等效介质场中的各种结构在光子带隙材料中都有唯一的结构与其对应，等效介质场中的物理过程在光子带隙材料中同样发生。下面，我们主要在一维体系的等效介质场中讨论前进波与反射波耦合的问题，简化起见，我们将等效介质场直接称为光子带隙材料，并将坐标 z' 中的一撇去掉，记做 z 。

3-2 一维光子带隙材料中入射波和反射波的耦合方程

一维光子带隙材料等效介质场中的电磁波方程

$$\frac{d^2 E(z)}{dz^2} + \omega^2 \mu \epsilon_0 \epsilon(z) E(z) = 0 \quad (3-2-1)$$

介电系数是沿 z 方向一维扰动调制, $\varepsilon(z) = \varepsilon_0 + \Delta\varepsilon \cdot F(z)$, 其中 $F(z)$ 是调制结构函数, 一维光子带隙材料可以是任何结构(周期、准周期、双周期、非周期), 每一种结构都有相应的结构函数。在此, 我们并不讨论一维光子带隙材料的具体结构, 只是一般的给出结构函数的傅立叶变换是

$$F(z) = \sum_G f_G \cdot e^{iG \cdot z} \quad (3-2-2)$$

一维光子带隙材料等效介质场中, 电磁波只有正向传播的入射波和反向传播的反射波,

$$E(z) = A_1(z) \cdot e^{-ik \cdot z} + A_2(z) \cdot e^{ik \cdot z} \quad (3-2-3)$$

这里 $k = \frac{\omega}{c} \cdot \sqrt{\varepsilon_0}$ 。

将 (3-2-3) 代入 (3-2-1),

$$-2ik \cdot \frac{dA_1}{dz} \cdot e^{-ik \cdot z} + 2ik \cdot \frac{dA_2}{dz} \cdot e^{ik \cdot z} + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \cdot \Delta\varepsilon \cdot \sum_G f_G \cdot (A_1 \cdot e^{-i(k-G) \cdot z} + A_2 \cdot e^{i(k-G) \cdot z}) = 0 \quad (3-2-4)$$

考虑到波矢守恒

$$\begin{cases} \frac{dA_1}{dz} = -i\kappa \cdot A_2 \cdot e^{i\Delta k \cdot z} \\ \frac{dA_2}{dz} = i\kappa \cdot A_1 \cdot e^{-i\Delta k \cdot z} \end{cases} \quad (3-2-5)$$

其中 $\kappa = \frac{\omega}{c} \cdot \frac{\Delta\varepsilon}{2n_0} \cdot f_G$, $\Delta k = 2k - G$

考虑到边界条件 $A_1(0) = 1$, $A_2(L) = 0$

$$\begin{aligned} A_1(z) &= e^{i \cdot \frac{\Delta k}{2} \cdot z} \cdot \frac{s \cdot \cosh(s \cdot (L - z)) + i \cdot \frac{\Delta k}{2} \cdot \sinh(s \cdot (L - z))}{s \cdot \cosh(s \cdot L) + i \cdot \frac{\Delta k}{2} \cdot \sinh(s \cdot L)} \\ A_2(z) &= e^{-i \cdot \frac{\Delta k}{2} \cdot z} \cdot \frac{-i \cdot \kappa \cdot \sinh(s \cdot (L - z))}{s \cdot \cosh(s \cdot L) + i \cdot \frac{\Delta k}{2} \cdot \sinh(s \cdot L)} \end{aligned} \quad (3-2-6)$$

其中 $s = \sqrt{\kappa^2 - \left(\frac{\Delta k}{2}\right)^2}$

这样可以得到入射波

$$E_1(z) = a_1 \cdot e^{-i\left(\frac{G}{2}-is\right)z} + b_1 \cdot e^{-i\left(\frac{G}{2}+is\right)z} \quad (3-2-7)$$

$$\text{其中 } a_1 = \frac{\left(\frac{s}{2} + \frac{i\Delta k}{4}\right) \cdot e^{s \cdot L}}{s \cdot \cosh(s \cdot L) + \frac{i\Delta k}{2} \cdot \sinh(s \cdot L)}, \quad b_1 = \frac{\left(\frac{s}{2} - \frac{i\Delta k}{4}\right) \cdot e^{-s \cdot L}}{s \cdot \cosh(s \cdot L) + \frac{i\Delta k}{2} \cdot \sinh(s \cdot L)}$$

反射波

$$E_1(z) = a_2 \cdot e^{i\left(\frac{G}{2}+is\right)z} + b_2 \cdot e^{i\left(\frac{G}{2}-is\right)z} \quad (3-2-8)$$

$$\text{其中 } a_2 = \frac{-\frac{i\kappa}{2} \cdot e^{s \cdot L}}{s \cdot \cosh(s \cdot L) + \frac{i\Delta k}{2} \cdot \sinh(s \cdot L)}, \quad b_2 = \frac{\frac{i\kappa}{2} \cdot e^{-s \cdot L}}{s \cdot \cosh(s \cdot L) + \frac{i\Delta k}{2} \cdot \sinh(s \cdot L)}$$

最后可以得到一维光子带隙材料中的 Bloch 波矢

$$K(\omega) = \frac{G}{2} \pm i \sqrt{\kappa^2 - \left(\frac{\Delta k}{2}\right)^2} \quad (3-2-9)$$

3-3 一维光子带隙材料中的 Bloch 波矢

根据一维光子带隙材料的耦合方程得到 Bloch 波矢是

$$K(\omega) = \frac{G}{2} \pm i \sqrt{\left(\frac{\omega}{c} \cdot \frac{\Delta \varepsilon}{2n_a} \cdot f_G\right)^2 - \left(\frac{\omega}{c} \cdot n_a - \frac{G}{2}\right)^2} \quad (3-3-1)$$

我们定义所谓光子带隙材料禁带是指 Bloch 波矢的虚部不为零的频率范围, 这时我们得到的是前进方向的衰减波。

$$(1) \text{ 在光子带隙材料的光子禁带中, } \left(\frac{\omega}{c} \cdot n_a - \frac{G}{2}\right)^2 < \left(\frac{\omega}{c} \cdot \frac{\Delta \varepsilon}{2n_a} \cdot f_G\right)^2,$$

$$\text{Re}(K) = \frac{G}{2}, \quad |\text{Im}(K)| = \sqrt{\left(\frac{\omega}{c} \cdot \frac{\Delta \varepsilon}{2n_a} \cdot f_G\right)^2 - \left(\frac{\omega}{c} \cdot n_a - \frac{G}{2}\right)^2} \quad (3-3-2)$$

$$(2) \text{ 在光子带隙材料的光子导带中, } \left(\frac{\omega}{c} \cdot n_a - \frac{G}{2}\right)^2 > \left(\frac{\omega}{c} \cdot \frac{\Delta \varepsilon}{2n_a} \cdot f_G\right)^2,$$

$$\text{Re}(K) = \frac{G}{2} \pm i \sqrt{\left(\frac{\omega}{c} \cdot \frac{\Delta \varepsilon}{2n_a} \cdot f_G\right)^2 - \left(\frac{\omega}{c} \cdot n_a - \frac{G}{2}\right)^2}, \quad \text{Im}(K) = 0 \quad (3-3-3)$$

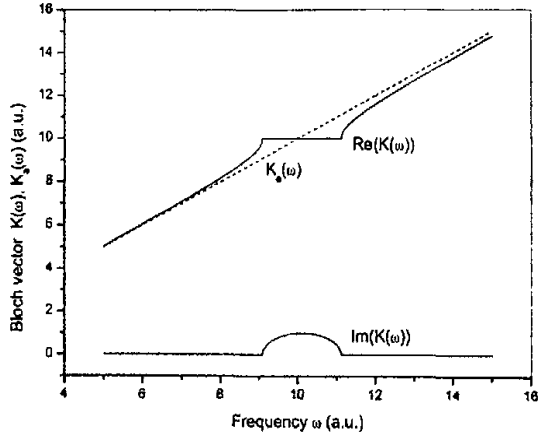


图 3-3. The dispersion curve of bloch wave vector $K(\omega)$

而当频率远离禁带频率时，

$$\left(\frac{\omega}{c} \cdot n_u - \frac{G}{2}\right)^2 \gg \left(\frac{\omega}{c} \cdot \frac{\Delta \epsilon}{2n_u} \cdot f_G\right)^2, \quad \text{可以得到 } K(\omega) = \frac{\omega}{c} \cdot n_u.$$

根据光子带隙材料远离禁带频率满足正常的色散关系 $K_u(\omega) = \frac{\omega}{c} \cdot n_u$ ，最后我们可以得到 Bloch 波矢应该满足

$$K(\omega) = \begin{cases} \frac{G}{2} + i \sqrt{\left(\frac{\omega}{c} \cdot \frac{\Delta \epsilon}{2n_u} \cdot f_G\right)^2 - \left(\frac{\omega}{c} \cdot n_u - \frac{G}{2}\right)^2} & \left(K < \frac{G}{2}\right) \\ \frac{G}{2} - i \sqrt{\left(\frac{\omega}{c} \cdot \frac{\Delta \epsilon}{2n_u} \cdot f_G\right)^2 - \left(\frac{\omega}{c} \cdot n_u - \frac{G}{2}\right)^2} & \left(K > \frac{G}{2}\right) \end{cases} \quad (3-3-4)$$

3-4 一维光子带隙材料的禁带结构

利用 (3-2-9) 公式，我们可以得到一维光子带隙材料在 Bloch 波矢空间中的能量色散关系， $\omega = \omega(K)$ 。对于一般的色散介质，(3-2-9) 其实已经给出了光子能带的隐函数的表示，当介质色散相对于禁带边缘的能量色散很小而可以忽略时，这时用非色散介质近似处理，可以直接得到能量色散的公式

$$\omega(K) = \frac{1}{\frac{n_a}{c} \cdot \left(1 - \left(\frac{\Delta\varepsilon}{2}\right)^2 \cdot f_G^2\right)} \cdot \left(\frac{G}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{G}{2}\right)^2 + (K^2 - K \cdot G) \cdot \left(1 - \left(\frac{\Delta\varepsilon}{2 \cdot n_a^2}\right)^2 \cdot f_G^2\right)} \right) \quad (3-4-1)$$

这时，能量色散分成上下两只，分别对应上下两个能带，我们定义

$$\omega^{(+)}(K) = \frac{1}{\frac{n_a}{c} \cdot \left(1 - \left(\frac{\Delta\varepsilon}{2 \cdot n_a^2}\right)^2 \cdot f_G^2\right)} \cdot \left(\frac{G}{2} + \sqrt{\left(\frac{G}{2}\right)^2 + (K^2 - K \cdot G) \cdot \left(1 - \left(\frac{\Delta\varepsilon}{2 \cdot n_a^2}\right)^2 \cdot f_G^2\right)} \right)$$

$$\omega^{(-)}(K) = \frac{1}{\frac{n_a}{c} \cdot \left(1 - \left(\frac{\Delta\varepsilon}{2 \cdot n_a^2}\right)^2 \cdot f_G^2\right)} \cdot \left(\frac{G}{2} - \sqrt{\left(\frac{G}{2}\right)^2 + (K^2 - K \cdot G) \cdot \left(1 - \left(\frac{\Delta\varepsilon}{2 \cdot n_a^2}\right)^2 \cdot f_G^2\right)} \right) \quad (3-4-2)$$

在上能带 $\omega^{(+)}(K)$ 下能带 $\omega^{(-)}(K)$ 之间，出现所谓光子带隙材料禁带，如图 (3-4) 所示。为了比较，在图 (3-4) 中，我们也给出了介质中的光子正常的能量色散曲线 $\omega = \omega_u(K)$ 。

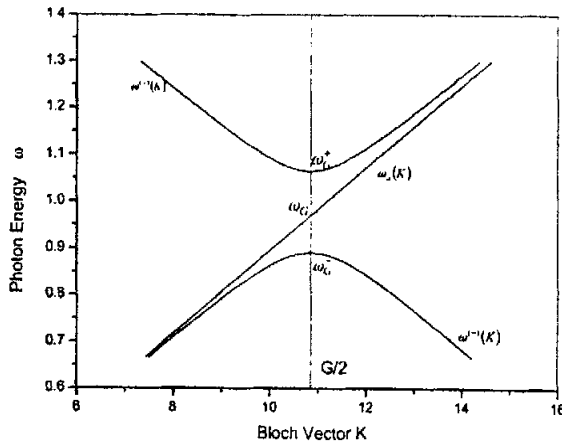


图 3—4. The band gap

为了更精确的描述禁带结构，现在我们给出几个新定义：

1) 禁带的中心频率

$$\omega_G = \omega_a \left(\frac{G}{2} \right) = \frac{G}{2} \cdot \frac{c}{n_a}; \quad (3-4-3)$$

2) 禁带的上限频率

$$\omega_G^+ = \omega^{(+)} \left(\frac{G}{2} \right) = \frac{\omega_G}{1 - \frac{\Delta\varepsilon}{2 \cdot n_a^2} \cdot f_G} \quad (3-4-4)$$

3) 禁带的下限频率

$$\omega_G^- = \omega^{(-)} \left(\frac{G}{2} \right) = \frac{\omega_G}{1 + \frac{\Delta\varepsilon}{2 \cdot n_a^2} \cdot f_G} \quad (3-4-5)$$

4) 禁带宽度

$$\Delta \left(\frac{1}{\omega} \right)_G = \frac{1}{\omega_G^-} - \frac{1}{\omega_G^+} = \frac{1}{\omega_G} \cdot \frac{\Delta\varepsilon}{n_a^2} \cdot f_G \quad (3-4-6)$$

通过以上分析,我们可以发现,光子带隙材料的禁带结构与光子带隙材料的倒格矢有很紧密的关系,禁带的中心频率由倒格矢的位置决定,而禁带的宽度则是由与倒格矢相关的傅立叶系数的大小决定。这样,就为我们完全从倒空间出发,设计各种结构的光子带隙材料用于满足各种实际需要提供了理论依据。

3-5 一维光子带隙材料的透射谱和反射谱

由 (3-2-6), 我们可以得到一维光子带隙材料的透射谱和反射谱

$$T(\omega) = |A_1(L)|^2 = \left| \frac{s(\omega)}{s(\omega) \cdot \cosh(s(\omega) \cdot L) + i \cdot \frac{\Delta k(\omega)}{2} \cdot \sinh(s(\omega) \cdot L)} \right| \quad (3-5-1)$$

$$R(\omega) = |A_2(0)|^2 = \left| \frac{-i \cdot \kappa(\omega) \cdot \sinh(s(\omega) \cdot L)}{s(\omega) \cdot \cosh(s(\omega) \cdot L) + i \cdot \frac{\Delta k(\omega)}{2} \cdot \sinh(s(\omega) \cdot L)} \right|$$

其中 $\Delta k(\omega) = 2 \cdot \frac{\omega}{c} \cdot n_a - G$, $\kappa(\omega) = \frac{\omega}{c} \cdot \frac{\Delta\varepsilon}{2n_a} \cdot f_G$,

$$s(\omega) = \sqrt{\left(\frac{\omega}{c} \cdot \frac{\Delta \varepsilon}{2n_u} \cdot f_G\right)^2 - \left(\frac{\omega}{c} \cdot n_v(\omega) - \frac{G}{2}\right)^2}$$

根据公式 (3-5-1)，我们计算了禁带附近的透射谱和反射谱，如图 (3-5)，

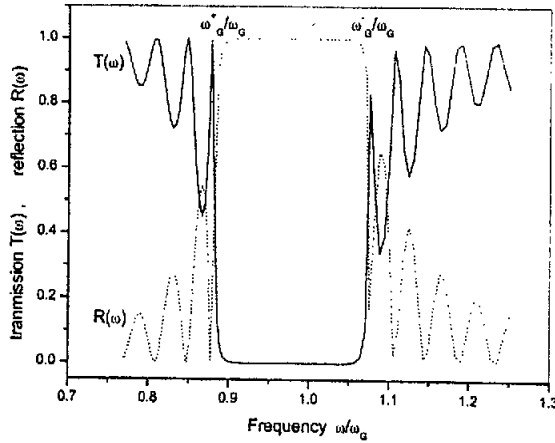


图 3-5. Transmission and reflection spectrum

3-6 一维光子带隙材料的禁带边的电场增强效应

我们引入 $s(\omega) = i \cdot \alpha(\omega)$ ，根据公式 (3-2-6)，晶体中透射电场分布是

$$A_1(z) = e^{i \frac{\Delta k}{2} z} \cdot \frac{i \cdot \alpha(\omega) \cdot \cos(\alpha(\omega) \cdot (L-z)) - \frac{\Delta k}{2} \cdot \sin(\alpha(\omega) \cdot (L-z))}{i \cdot \alpha(\omega) \cdot \cos(\alpha(\omega) \cdot L) - \frac{\Delta k}{2} \cdot \sin(\alpha(\omega) \cdot L)} \quad (3-6-1)$$

$$A_2(z) = e^{i \frac{\Delta k}{2} z} \cdot \frac{\kappa \cdot \sin(\alpha(\omega) \cdot (L-z))}{i \cdot \alpha(\omega) \cdot \cos(\alpha(\omega) \cdot L) - \frac{\Delta k}{2} \cdot \sin(\alpha(\omega) \cdot L)} \quad (3-6-2)$$

因此，当光子带隙材料长度满足光场来回共振条件 $\alpha(\omega) \cdot L = \pi$ 时，

$$A_1(z) = e^{i \frac{\Delta k}{2} z} \cdot \left(\cos(\alpha(\omega) \cdot (L-z)) + i \cdot \frac{\Delta k(\omega)}{2 \cdot \alpha} \cdot \sin(\alpha(\omega) \cdot (L-z)) \right) \quad (3-6-3)$$

$$A_2(z) = e^{i \frac{\Delta k}{2} z} \cdot \left(-i \cdot \frac{\kappa(\omega)}{\alpha(\omega)} \cdot \sin(\alpha(\omega) \cdot (L-z)) \right) \quad (3-6-4)$$

当电磁波的频率在禁带边时， $\alpha(\omega) \rightarrow 0$ ， $\left|A_1\left(\frac{L}{2}\right)\right|^2 = \left(\frac{\Delta k}{2 \cdot \alpha}\right)^2 \rightarrow \infty$ ，

$\left|A_2\left(\frac{L}{2}\right)\right|^2 = \left(\frac{\kappa}{\alpha}\right)^2 \rightarrow \infty$ ，这样，我们可以得到一维光子带隙材料中的电场增强。

下面，我们计算了一维光子带隙材料中的带边电场分布

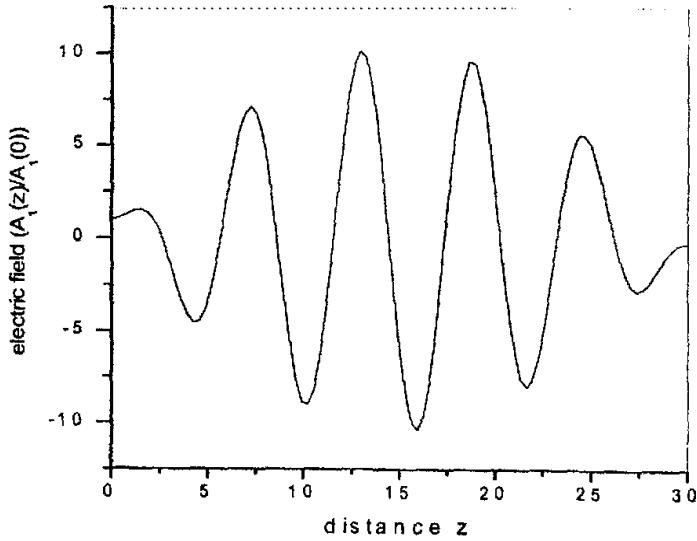


图 3-6. The electric field at the edge of band gap

3-7 一维光子带隙材料中的 Bloch 波的有效折射率和衰减系数色散

$$n(\omega) = \frac{c}{\omega} \cdot \text{Re}(K(\omega)) = \begin{cases} \frac{c}{\omega} \cdot \text{Re}\left(\frac{G}{2} + i \sqrt{\left(\frac{\omega}{c} \cdot \frac{\Delta \epsilon}{2n_a} \cdot f_G\right)^2 - \left(\frac{\omega}{c} \cdot n_a - \frac{G}{2}\right)^2}\right) & (K < \frac{G}{2}) \\ \frac{c}{\omega} \cdot \text{Re}\left(\frac{G}{2} - i \sqrt{\left(\frac{\omega}{c} \cdot \frac{\Delta \epsilon}{2n_a} \cdot f_G\right)^2 - \left(\frac{\omega}{c} \cdot n_a - \frac{G}{2}\right)^2}\right) & (K > \frac{G}{2}) \end{cases} \quad (3-7-1)$$

$$\alpha(\omega) = \frac{c}{\omega} \cdot \text{Im}(K(\omega)) = \begin{cases} \frac{c}{\omega} \cdot \text{Im}\left(\frac{G}{2} + i \sqrt{\left(\frac{\omega}{c} \cdot \frac{\Delta \epsilon}{2n_a} \cdot f_G\right)^2 - \left(\frac{\omega}{c} \cdot n_a - \frac{G}{2}\right)^2}\right) & (K < \frac{G}{2}) \\ \frac{c}{\omega} \cdot \text{Im}\left(\frac{G}{2} - i \sqrt{\left(\frac{\omega}{c} \cdot \frac{\Delta \epsilon}{2n_a} \cdot f_G\right)^2 - \left(\frac{\omega}{c} \cdot n_a - \frac{G}{2}\right)^2}\right) & (K > \frac{G}{2}) \end{cases} \quad (3-7-2)$$

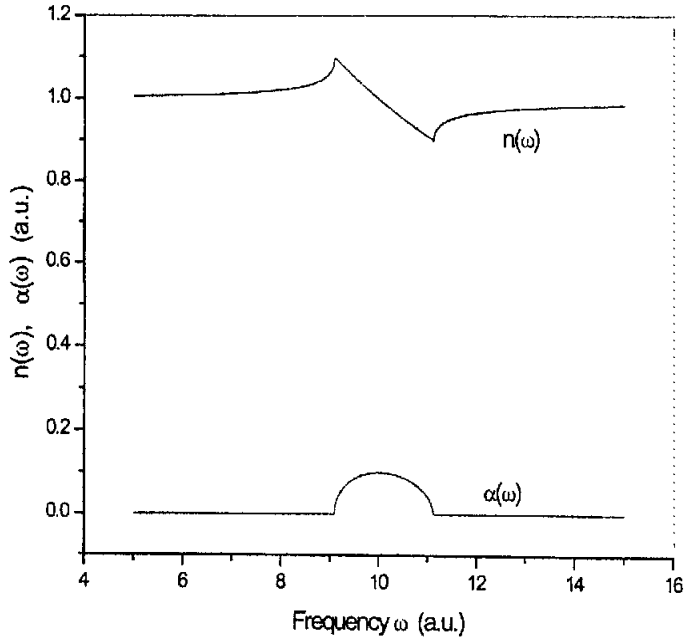


图 3-7. The dispersion curve of effect refraction

如图 (3-7) 所见, 在禁带周围, Bloch 波的有效折射率呈现反常色散; 在禁带中, 衰减系数不为零。

3-8 一维光子带隙材料中的 Bloch 波的群速度

$$v_g(\omega) = \left(\frac{dK}{d\omega}\right)^{-1} = \begin{cases} -2i \cdot \frac{\sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \cdot \left(\frac{\Delta\varepsilon \cdot f_{ij}}{n_a}\right)^2 - 4 \cdot \left(\frac{n_a}{c}\right)^2 \cdot (\omega - \omega_a)^2}}{\left(\frac{\omega}{c^2}\right) \cdot \left(\frac{\Delta\varepsilon \cdot f_{ij}}{n_a}\right)^2 - 4 \cdot \left(\frac{n_a}{c}\right)^2 \cdot (\omega - \omega_a)} & \left(K < \frac{G}{2}\right) \\ 2i \cdot \frac{\sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \cdot \left(\frac{\Delta\varepsilon \cdot f_{ij}}{n_a}\right)^2 - 4 \cdot \left(\frac{n_a}{c}\right)^2 \cdot (\omega - \omega_a)^2}}{\left(\frac{\omega}{c^2}\right) \cdot \left(\frac{\Delta\varepsilon \cdot f_{ij}}{n_a}\right)^2 - 4 \cdot \left(\frac{n_a}{c}\right)^2 \cdot (\omega - \omega_a)} & \left(K > \frac{G}{2}\right) \end{cases} \quad (3-8-1)$$

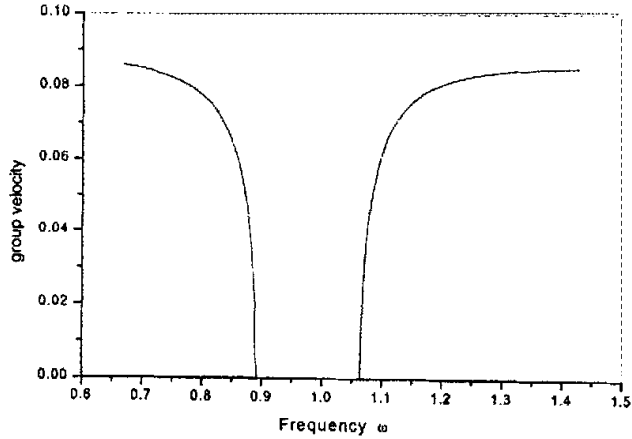


图 3-8. The dispersion curve of group velocity near the band gap

如图 (3-8) 所见, 在禁带周围, Bloch 波的群速呈现反常的急速变化, 在低频边, 群速随频率增加而快速下降, 在高频边, 群速随频率增加而快速上升。

3-9 一维光子带隙材料中的飞秒脉冲压缩

我们假设入射的高斯飞秒脉冲是

$$E(z=0, t) = e^{-\alpha t^2} \cdot e^{i\omega_0 t} = e^{i\omega_0 t} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} F(\Omega) \cdot e^{i\Omega t} \cdot d\Omega \quad (3-9-1)$$

其中飞秒的脉冲宽度 $\tau_0 = \sqrt{\frac{2 \ln 2}{\alpha}}$, $F(\Omega) = \sqrt{\frac{1}{4\pi\alpha}} \cdot e^{-\Omega^2 / 4\alpha}$

一维光子带隙材料对 Bloch 波矢取二阶近似

$$K(\omega) = K_0 + \left(\frac{dK}{d\omega}\right)_{\omega_0} \cdot \Omega + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{d^2K}{d\omega^2}\right)_{\omega_0} \cdot \Omega^2 \quad (3-9-2)$$

其中 $K_0 = K(\omega_0)$

入射飞秒电磁波

$$E(z, t) = e^{-\alpha t^2} \cdot e^{i(\omega_0 t - K \cdot z)} = e^{i(\omega_0 t - K_0 \cdot z)} \cdot A(z, t) \quad (3-9-3)$$

其中入射波的包络

$$A(z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\Omega) \cdot \exp\left\{i\left[\Omega t - \left(\frac{dK}{d\omega}\right)_{\omega_0} \cdot \Omega \cdot z - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{d^2K}{d\omega^2}\right)_{\omega_0} \cdot \Omega^2 \cdot z\right]\right\} \cdot d\Omega \quad (3-9-4)$$

当飞秒脉冲在光子带隙材料禁带中传播时，Bloch 波矢是虚数，我们定义

$$\frac{i}{v_g} = \left(\frac{dK}{d\omega} \right)_{\omega_0}, \quad i \cdot a = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{d^2K}{d\omega^2} \right)_{\omega_0} \quad (3-9-5)$$

于是

$$\begin{aligned} A(z,t) &= \int_{-\infty}^{\infty} F(\Omega) \cdot \exp\left(i \left(\Omega t - \frac{i}{v_g} \cdot \Omega \cdot z - i \cdot a \cdot \Omega^2 \cdot z \right) \right) \cdot d\Omega \\ &= \sqrt{\frac{1}{4\pi\alpha}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\Omega^2}{4\alpha} \right) \cdot \exp\left(i \left(\Omega t - \frac{i}{v_g} \cdot \Omega \cdot z - i \cdot a \cdot \Omega^2 \cdot z \right) \right) \cdot d\Omega \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-4\alpha az}} \cdot e^{-\alpha(z)t^2} \cdot \exp\left(\frac{(z/v_g)^2}{1/\alpha - 4az} \right) \cdot \exp\left(-i \frac{2 \cdot t \cdot z/v_g}{1/\alpha - 4az} \right) \end{aligned} \quad (3-9-6)$$

其中 $\alpha(z) = \frac{1}{1/\alpha - 4az}$

最后我们得到飞秒的脉冲宽度 随着透光距离的变化关系是

$$\tau = \sqrt{\frac{2 \ln 2}{\alpha(z)}} = \tau_0 \sqrt{1 - 4\alpha az} \quad (3-9-7)$$

因此，利用一维光子带隙材料的禁带，飞秒脉冲可以压缩，但是由于部分反射的作用，能量要损失。

3-10 非周期光子带隙材料

在本章前面几节的论述中，通过引进有效介质场的概念和耦合模理论，我们知道了光子带隙材料的倒格矢与光子带隙材料的禁带结构有很紧密的联系。因此，我们完全可以只从道空间出发来设计各种结构的光子带隙材料去满足各种实际需要。非周期光学超晶格是一种比较成熟的设计理论，在此，我们将把它用来设计光子带隙材料结构。

首先，我们还是从最简单的周期结构的光子带隙材料出发，在等效介质场中，周期结构函数是

$$F_{\Lambda}(x) = 1 - 2 \cdot \text{floor}\left(\frac{2 \cdot x}{\Lambda} \right) + 4 \cdot \text{floor}\left(\frac{x}{\Lambda} \right) \quad (3-10-1)$$

它的倒格矢是

$$G_m = \frac{2 \cdot \pi}{\Lambda} \cdot m \quad (m=1,3,5,\dots) \quad (3-10-2)$$

G_m 的傅立叶系数是

$$f_m = \frac{2}{m \cdot \pi} \quad (m=1,3,5,\dots) \quad (3-10-3)$$

由此，我们可以得到周期结构光子带隙材料禁带的中心频率是

$$\omega_m = \frac{c}{n_a} \cdot \frac{\pi}{\Lambda} \cdot m \quad (m=1,3,5,\dots) \quad (3-10-4)$$

禁带的上限频率是

$$\omega_m^{(+)} = \frac{\frac{c}{n_a} \cdot \frac{\pi}{\Lambda} \cdot m}{1 - \frac{\Delta \varepsilon}{n_a^2} \cdot \frac{1}{m \cdot \pi}} \quad (3-10-5)$$

禁带的下限频率是

$$\omega_m^{(-)} = \frac{\frac{c}{n_a} \cdot \frac{\pi}{\Lambda} \cdot m}{1 + \frac{\Delta \varepsilon}{n_a^2} \cdot \frac{1}{m \cdot \pi}} \quad (3-10-6)$$

禁带的宽度是

$$\Delta \left(\frac{1}{\omega} \right)_m = \frac{\Lambda \cdot \Delta \varepsilon}{c \cdot n_a} \cdot \frac{2}{(m \cdot \pi)^2} \quad (3-10-7)$$

图 (3-10-a) 中用数值方法分别计算了一个周期光子带隙材料的傅立叶谱和透射谱，我们选定两种材料的折射率是 $n_1 = 2.5$ ， $n_2 = 1.5$ ，那么 $n_a = 2.062$ 。在等效介质场中，我们选择周期 $\Lambda = 1.2 \mu\text{m} / (2 \cdot n_a) = 0.291 \mu\text{m}$ ，那么相应的光子带隙材料中两种材料的层厚分别是 $L_1 = \Lambda \cdot n_a / (2 \cdot n_1) = 0.12 \mu\text{m}$ ， $L_2 = \Lambda \cdot n_a / (2 \cdot n_2) = 0.2 \mu\text{m}$ 。对于傅立叶谱，我们主要利用公式 $G(k) = \int F_\lambda(x) \cdot \exp(i \cdot k \cdot x) \cdot dx$ ，在此， $k = \omega \cdot n_a / c$ ，于是 $G(\omega) = \int F_\lambda(x) \cdot \exp(i \cdot \omega \cdot n_a / c \cdot x) \cdot dx$ 。对于光子带隙材料透射谱的计算，我们采用最常用的转移矩阵方法。图 (3-10-a) 数值计算结果表明，对于周期光子带隙材料来说，其倒格矢与光子禁带有很好的对应关系。

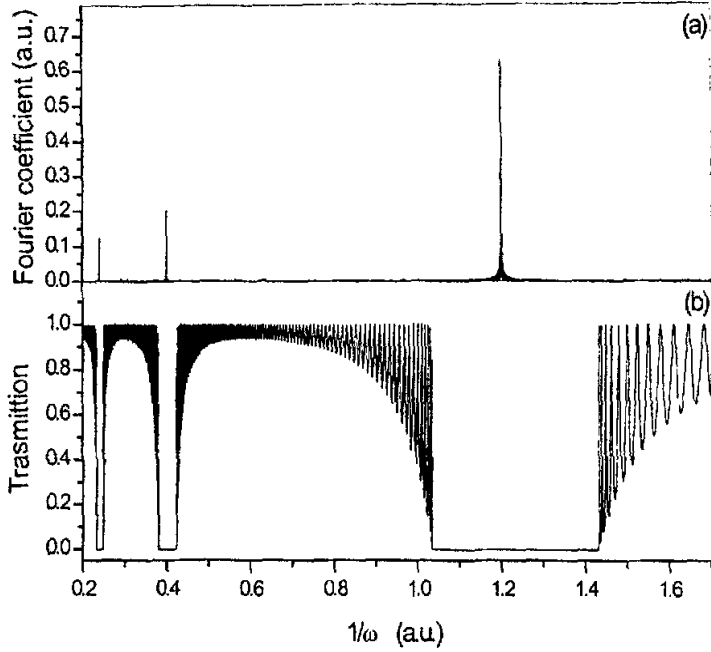


图 3-10-a. The Fourier spectrum and transmission spectrum of $F_{\Lambda}(x)$

在此周期结构的基础上，我们可以定义非周期的光子带隙材料，其在等价介质场中的结构函数是

$$H(x) = F_{\Lambda} \left(\left(\text{floor} \left(\frac{x}{d} \right) + \text{ceil} \left(\frac{x}{d} \right) \right) \cdot \frac{d}{2} \right) \quad (3-10-8)$$

其中， d 是我们所选取的最小结构单元，我们定义一个结构参数是 $\sigma = d/\Lambda$ 。根据前一章中非周期光学超晶格的理论，周期结构 $F_{\Lambda}(x)$ 的一阶倒格矢 $G_1 = 2 \cdot \pi/\Lambda$ 在非周期结构 $H(x)$ 的傅立叶谱中保留下来，但其傅立叶系数发生了变化，主要取决于结构参数 σ ，

$$f(\sigma) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} & 1/\sigma \text{ 是整数} \\ \frac{2}{\sigma \cdot \pi} \cdot \sin \left(\frac{\sigma \cdot \pi}{2} \right) & \sigma \text{ 是整数} \\ \frac{4}{\sigma \cdot \pi^2} \cdot \sin \left(\frac{\sigma \cdot \pi}{2} \right) & \sigma, 1/\sigma \text{ 都不是整数} \end{cases} \quad (3-10-9)$$

现在, 我们考虑普通情况下, σ 、 $1/\sigma$ 都不是整数时, 在非周期光子带隙材料的透射谱中, 倒格矢 G_1 对应的禁带中心频率是

$$\omega_1 = \frac{c}{n_u} \cdot \frac{\pi}{\Lambda} \quad (3-10-10)$$

禁带的上限频率是

$$\omega_m^{(+)} = \frac{\frac{c}{n_u} \cdot \frac{\pi}{\Lambda}}{1 - \frac{\Delta\varepsilon}{n_u^2} \cdot \frac{2}{\sigma \cdot \pi^2} \cdot \sin\left(\frac{\sigma \cdot \pi}{2}\right)} \quad (3-10-11)$$

禁带的下限频率是

$$\omega_m^{(-)} = \frac{\frac{c}{n_u} \cdot \frac{\pi}{\Lambda}}{1 + \frac{\Delta\varepsilon}{n_u^2} \cdot \frac{2}{\sigma \cdot \pi^2} \cdot \sin\left(\frac{\sigma \cdot \pi}{2}\right)} \quad (3-10-12)$$

禁带的宽度是

$$\Delta\left(\frac{1}{\omega}\right)_1 = \frac{\Lambda \cdot \Delta\varepsilon}{c \cdot n_u} \cdot \frac{4}{\sigma \cdot \pi^3} \cdot \sin\left(\frac{\sigma \cdot \pi}{2}\right) \quad (3-10-13)$$

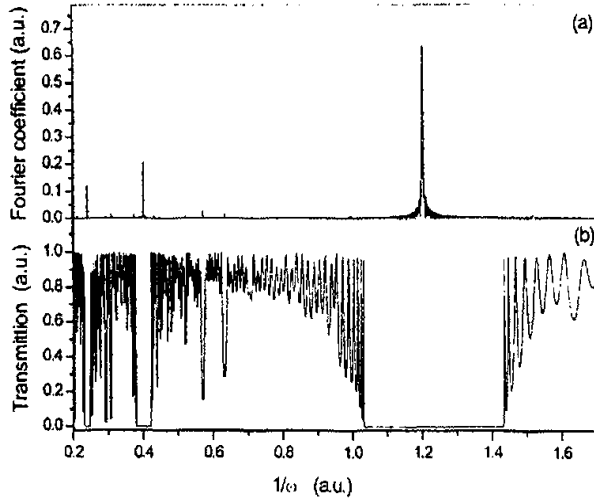


图 3-10-b. The Fourier spectrum and transmission spectrum of $H(x)$

图(3-10-b)我们计算了一个非周期光子带隙材料的傅立叶谱和透射谱。计算方法如上述周期光子带隙材料中一样。在等效介质场中,所选的最小层厚是 $d = 0.01\mu\text{m}$,那么实际非周期光子带隙材料两个材料中的最小层厚分别是 $d_1 = d \cdot n_d / n_1 = 0.008\mu\text{m}$, $d_2 = d \cdot n_d / n_2 = 0.014\mu\text{m}$ 。图(3-10-b)中的计算结果表明对于非周期光子带隙材料来说,其倒格矢分布与禁带同样有很好的对应关系。

3-11 非周期光子带隙材料禁带中的缺陷态

和非周期光学超晶格一样,我们也可以将多个非周期函数耦合在一起,这样可以根据需要对禁带的结构进行人为的控制,下面我们以最简单的两个非周期函数的耦合来说明。我们先定义两个非周期函数

$$\begin{aligned} H_1(x) &= F_{\Lambda_1} \left(\left(\text{floor} \left(\frac{x}{d} \right) + \text{ceil} \left(\frac{x}{d} \right) \right) \cdot \frac{d}{2} \right) \\ H_2(x) &= F_{\Lambda_2} \left(\left(\text{floor} \left(\frac{x}{d} \right) + \text{ceil} \left(\frac{x}{d} \right) \right) \cdot \frac{d}{2} \right) \end{aligned} \quad (3-11-1)$$

其中 $F_{\Lambda_1}(x)$ 、 $F_{\Lambda_2}(x)$ 是周期为 Λ_1 、 Λ_2 的周期函数, d 是最小结构单元,同时我们定义结构参数 $\sigma_1 = d / \Lambda_1$, $\sigma_2 = d / \Lambda_2$ 。

在此基础上,我们可以得到 $H_1(x)$ 、 $H_2(x)$ 耦合之后的非周期结构函数

$$H(x) = H_2(x) + \left(\text{floor} \left(\text{floor} \left(\frac{x}{d} \right) \cdot \gamma \right) - \text{floor} \left(\text{ceil} \left(\frac{x}{d} \right) \cdot \gamma \right) \right) \cdot (H_2(x) - H_1(x)) \quad (3-11-2)$$

其中 γ 是耦合系数。

根据非周期光学超晶格理论, $H(x)$ 的傅立叶谱中任然包含有原来的两个倒格矢 $G_1 = 2 \cdot \pi / \Lambda_1$, $G_2 = 2 \cdot \pi / \Lambda_2$ 。它们对应的傅立叶系数分别是

$$f_1 = \gamma \cdot \frac{4}{\sigma_1 \cdot \pi^2} \cdot \sin \left(\frac{\sigma_1 \cdot \pi}{2} \right) \quad f_2 = (1 - \gamma) \cdot \frac{4}{\sigma_2 \cdot \pi^2} \cdot \sin \left(\frac{\sigma_2 \cdot \pi}{2} \right) \quad (3-11-3)$$

G_1 对应的禁带中心是

$$\omega_1 = \frac{c}{n_u} \cdot \frac{\pi}{\Lambda_1} \quad (3-11-4)$$

禁带上限是

$$\omega_1^{(+)} = \frac{\frac{c}{n_u} \cdot \frac{\pi}{\Lambda_1}}{1 - \frac{\Delta\varepsilon}{n_u^2} \cdot \gamma \cdot \frac{2}{\sigma_1 \cdot \pi^2} \cdot \sin\left(\frac{\sigma_1 \cdot \pi}{2}\right)} \quad (3-11-5)$$

禁带下限是

$$\omega_1^{(-)} = \frac{\frac{c}{n_u} \cdot \frac{\pi}{\Lambda_1}}{1 + \frac{\Delta\varepsilon}{n_u^2} \cdot \gamma \cdot \frac{2}{\sigma_1 \cdot \pi^2} \cdot \sin\left(\frac{\sigma_1 \cdot \pi}{2}\right)} \quad (3-11-6)$$

禁带宽度是

$$\Delta\left(\frac{1}{\omega}\right)_1 = \frac{\Lambda \cdot \Delta\varepsilon}{c \cdot n_u} \cdot \gamma \cdot \frac{4}{\sigma_1 \cdot \pi^3} \cdot \sin\left(\frac{\sigma_1 \cdot \pi}{2}\right) \quad (3-11-7)$$

G_2 对应的禁带中心是

$$\omega_2 = \frac{c}{n_u} \cdot \frac{\pi}{\Lambda_2} \quad (3-11-8)$$

禁带上限是

$$\omega_2^{(+)} = \frac{\frac{c}{n_u} \cdot \frac{\pi}{\Lambda_2}}{1 - \frac{\Delta\varepsilon}{n_u^2} \cdot (1 - \gamma) \cdot \frac{2}{\sigma_2 \cdot \pi^2} \cdot \sin\left(\frac{\sigma_2 \cdot \pi}{2}\right)} \quad (3-11-9)$$

禁带下限是

$$\omega_2^{(-)} = \frac{\frac{c}{n_u} \cdot \frac{\pi}{\Lambda_2}}{1 + \frac{\Delta\varepsilon}{n_u^2} \cdot (1 - \gamma) \cdot \frac{2}{\sigma_2 \cdot \pi^2} \cdot \sin\left(\frac{\sigma_2 \cdot \pi}{2}\right)} \quad (3-11-10)$$

禁带宽度是

$$\Delta\left(\frac{1}{\omega}\right)_2 = \frac{\Lambda \cdot \Delta\varepsilon}{c \cdot n_u} \cdot (1 - \gamma) \cdot \frac{4}{\sigma_2 \cdot \pi^3} \cdot \sin\left(\frac{\sigma_2 \cdot \pi}{2}\right) \quad (3-11-11)$$

如果 $\omega_1^{(+)} = \omega_2^{(-)}$ ，那么两个禁带就会连接在一起形成一个禁带，而且在频率 $\omega_1^{(+)}$ 处会出现一个禁带中的缺陷态。由此，我们得到周期 Λ_1 和 Λ_2 之间应该满足

$$\Lambda_1 \cdot \left(1 - \frac{\Delta\varepsilon}{n_u^2} \cdot \gamma \cdot \frac{2}{\sigma_1 \cdot \pi^2} \cdot \sin\left(\frac{\sigma_1 \cdot \pi}{2}\right) \right) = \Lambda_2 \cdot \left(1 - \frac{\Delta\varepsilon}{n_u^2} \cdot (1-\gamma) \cdot \frac{2}{\sigma_2 \cdot \pi^2} \cdot \sin\left(\frac{\sigma_2 \cdot \pi}{2}\right) \right) \quad (3-11-12)$$

如果 d 选取的很小， $\sin(\sigma_1 \cdot \pi/2) \approx \sigma_1 \cdot \pi/2$ ， $\sin(\sigma_2 \cdot \pi/2) \approx \sigma_2 \cdot \pi/2$ ，我们有

$$\Lambda_1 \cdot \left(1 - \frac{\Delta\varepsilon}{n_u^2} \cdot \gamma \cdot \frac{1}{\pi} \right) = \Lambda_2 \cdot \left(1 - \frac{\Delta\varepsilon}{n_u^2} \cdot (1-\gamma) \cdot \frac{1}{\pi} \right) \quad (3-11-13)$$

这就是当禁带中出现缺陷态时两个周期应该满足的条件。

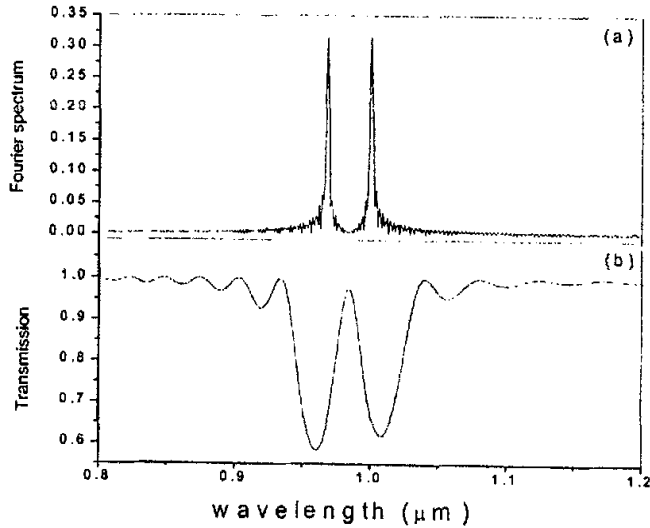


图 3-11. The Fourier spectrum and transmission spectrum of $H(x)$

图 (3-11) 中，我们计算了一个非周期光子带隙材料的缺陷态的傅立叶谱和透射谱，这里，两种材料的折射率是 $n_1 = 2.0$ ， $n_2 = 1.9$ 。我们选择 $\gamma = 0.5$ ，禁带中心波长分别是 $\lambda_1 = 1.0\mu\text{m}$ ， $\lambda_2 = 0.968\mu\text{m}$ ，分别对应等效介质场中周期 $\Lambda_1 = 0.513\mu\text{m}$ ， $\Lambda_2 = 0.496\mu\text{m}$ ，可以证明它们满足关系式 (3-11-13)。图 (3-11)

的计算结果表明, 非周期光子带隙材料的缺陷态是由成对的两个倒格矢产生的。

3-12 非周期光子带隙材料在 DWDM 中的应用

根据上一节介绍的两个非周期函数耦合方法, 只要做一个简单的推广, 我们可以得到一般 N 个非周期函数耦合的方法。现在有 N 个非周期函数,

$$H_i(x) = F_{\Lambda_i} \left(\left(\text{floor} \left(\frac{x}{d} \right) + \text{ceil} \left(\frac{x}{d} \right) \right) \cdot \frac{d}{2} \right) \quad (i=1, 2, \dots, N) \quad (3-12-1)$$

其中有 N 个周期 Λ_i ($i=1, 2, \dots, N$), 我们定义 N 个结构参数 $\sigma_i = d/\Lambda_i$ ($i=1, 2, \dots, N$)。 N 个非周期函数耦合之后得到

$$H(x) = \sum_{i=1}^N H_i(x) \cdot \delta_i(x) \quad (3-12-2)$$

其中 $\delta_i(x) = \delta(\text{floor}(x/d) - N \cdot \text{floor}(x/d) + 1 - i)$ ($i=1, 2, \dots, N$)。 $H(x)$ 的傅立叶谱中包含了 N 个倒格矢 $G_i = 2 \cdot \pi / \Lambda_i$ ($i=1, 2, \dots, N$), 它们的傅立叶系数是

$$f_i = \frac{1}{N} \cdot \frac{4}{\sigma_i \cdot \pi^2} \cdot \sin \left(\frac{\sigma_i \cdot \pi}{2} \right) \quad (i=1, 2, \dots, N) \quad (3-12-3)$$

禁带中心是

$$\omega_i = \frac{c}{n_a} \cdot \frac{\pi}{\Lambda_i} \quad (i=1, 2, \dots, N) \quad (3-12-4)$$

禁带的上限是

$$\omega_i^{(+)} = \frac{\frac{c}{n_a} \cdot \frac{\pi}{\Lambda_i}}{1 - \frac{\Delta \varepsilon}{n_a^2} \cdot \frac{1}{N} \cdot \frac{2}{\sigma_i \cdot \pi^2} \cdot \sin \left(\frac{\sigma_i \cdot \pi}{2} \right)} \quad (i=1, 2, \dots, N) \quad (3-12-5)$$

禁带的下限是

$$\omega_i^{(-)} = \frac{\frac{c}{n_a} \cdot \frac{\pi}{\Lambda_i}}{1 + \frac{\Delta \varepsilon}{n_a^2} \cdot \frac{1}{N} \cdot \frac{2}{\sigma_i \cdot \pi^2} \cdot \sin \left(\frac{\sigma_i \cdot \pi}{2} \right)} \quad (i=1, 2, \dots, N) \quad (3-12-6)$$

禁带的宽度是

$$\Delta\left(\frac{1}{\omega}\right)_i = \frac{\Delta\varepsilon \cdot \Lambda_i}{c \cdot n_u} \cdot \frac{1}{N} \cdot \frac{4}{\sigma_i \cdot \pi^3} \cdot \sin\left(\frac{\sigma_i \cdot \pi}{2}\right) \quad (i=1, 2, \dots, N) \quad (3-12-7)$$

现在，我们将 N 个禁带首尾相接形成一个禁带， $\omega_i^{(+)} = \omega_{i+1}^{(-)}$ ($i=1, 2, \dots, N$)，其中有 $N-1$ 个缺陷态， N 个周期之间的关系是

$$\Lambda_i \cdot \left(1 - \frac{1}{N} \cdot \frac{\Delta\varepsilon}{n_u^2} \cdot \frac{1}{\pi}\right) = \Lambda_{i+1} \cdot \left(1 + \frac{1}{N} \cdot \frac{\Delta\varepsilon}{n_u^2} \cdot \frac{1}{\pi}\right) \quad (i=1, 2, \dots, N-1) \quad (3-12-8)$$

这是一个等比级数的关系，只要我们确定了其中任何一个周期，其他 $N-1$ 个周期都可以得到。

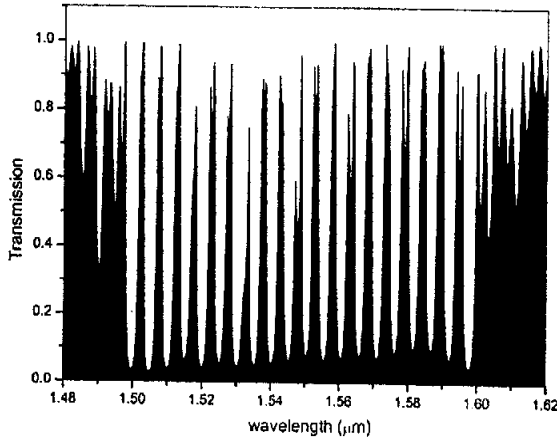


图 3-12. The transmission spectrum of $H(x)$

图 (3-12) 中，我们计算了用于实现密集波分复用(DWDM)的非周期光子带隙材料的透射谱。我们所用两种材料的折射率是 $n_2 = 2.0$ ， $n_1 = 1.9$ ，那么 $n_u = 1.951$ 。参与耦合的周期数是 $N = 20$ ，我们先确定一个周期 $\Lambda_1 = 1.5 \mu\text{m} / (2 \cdot n_u) = 0.384 \mu\text{m}$ ，那么其余 19 个周期的大小可由等比关系 (3-12-8) 确定。最后，我们在波长 $1.5 - 1.6 \mu\text{m}$ 禁带之间实现了 19 个密集分布的缺陷透射峰，每个峰的宽度不超过 5nm。图 (3-12) 的结果表明，非周期光子带隙材料有可能成为一种实现 DWDM 的器件。

3-13 非周期光子带隙材料中展 Bloch 波的准位相匹配

3-14 非周期光子带隙材料中赝 Bloch 波的带边准位相匹配

在上一节中, 我们得到了一维光子带隙材料中赝 Bloch 波倍频的电场分布公式 (3-13-10) 和 (3-13-11)。现在, 我们可以利用这个公式考察波矢匹配条件下带边准位相过程。

首先, 我们给出波矢匹配条件 $\Delta k_1 = 2 \cdot k_1 - G_1 = 0$, $\Delta k_2 = 2 \cdot k_1 + k_2 - G_2 = 0$ 。另外, 我们定义 $s = i \cdot \alpha$, 我们规定光子带隙材料的长度满足的共振条件 $\alpha \cdot L = \pi$, 禁带边的定义是 $s = 0$, 当光子频率接近带边时, $\alpha \rightarrow 0$, 增加一维光子带隙材料的长度可以同时满足共振条件和带边条件。

代入 (3-13-8)、(3-13-9), 我们得到

$$a_1 = b_1 = -\frac{1}{2}, \quad a_2 = -\frac{\kappa_1}{2 \cdot \alpha}, \quad b_2 = \frac{\kappa_1}{2 \cdot \alpha} \quad (3-14-1)$$

代入 (3-13-10), 并考虑 $\frac{\sin(\alpha \cdot z)}{\alpha \cdot z} \rightarrow 1$, 我们得到

$$\begin{aligned} A_1^{(2\omega)}(z) &= (-i \cdot \kappa_2) \cdot \left(a_2^2 \cdot e^{-i \cdot \alpha \cdot z} \cdot \frac{\sin(\alpha \cdot z)}{\alpha} + b_2^2 \cdot e^{i \cdot \alpha \cdot z} \cdot \frac{\sin(\alpha \cdot z)}{\alpha} + 2 \cdot a_2 \cdot b_2 \cdot z \right) \\ &= (-i \cdot \kappa_2) \cdot \left(\frac{\kappa_1}{2 \cdot \alpha} \right)^2 \cdot z \cdot \left(e^{-i \cdot \alpha \cdot z} \cdot \frac{\sin(\alpha \cdot z)}{\alpha \cdot z} + e^{i \cdot \alpha \cdot z} \cdot \frac{\sin(\alpha \cdot z)}{\alpha \cdot z} - 2 \right) \\ &= (-i \cdot \kappa_2) \cdot \left(\frac{\kappa_1}{2 \cdot \alpha} \right)^2 \cdot z \cdot \left(e^{-i \cdot \alpha \cdot z} + e^{i \cdot \alpha \cdot z} - 2 \right) = (i \cdot \kappa_2) \cdot \left(\frac{\kappa_1}{2 \cdot \alpha} \right)^2 \cdot z \cdot 4 \cdot \left(\sin\left(\frac{\alpha \cdot z}{2}\right) \right)^2 \\ &= (i \cdot \kappa_2) \cdot \left(\frac{\kappa_1}{2 \cdot \alpha} \right)^2 \cdot z \cdot 4 \cdot \left(\frac{\alpha \cdot z}{2} \right)^2 = \frac{i}{4} \cdot \kappa_2 \cdot \kappa_1^2 \cdot z^3 \end{aligned} \quad (3-14-2)$$

代入 (3-13-10), 并考虑 $\frac{\sin(\alpha \cdot (z-L))}{\alpha \cdot (z-L)} \rightarrow 1$ 和 $e^{i \cdot 2\alpha \cdot L} = 1$, 我们得到

$$\begin{aligned} A_2^{(2\omega)}(z) &= (i \cdot \kappa_2) \cdot \left(a_1^2 \cdot e^{-i \cdot \alpha \cdot (z+L)} \cdot \frac{\sin(\alpha \cdot (z-L))}{\alpha} + b_1^2 \cdot e^{i \cdot \alpha \cdot (z+L)} \cdot \frac{\sin(\alpha \cdot (z-L))}{\alpha} + 2 \cdot a_1 \cdot b_1 \cdot (z-L) \right) \\ &= (i \cdot \kappa_2) \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(e^{-i \cdot \alpha \cdot (z+L)} \cdot \frac{\sin(\alpha \cdot (z-L))}{\alpha \cdot (z-L)} + e^{i \cdot \alpha \cdot (z+L)} \cdot \frac{\sin(\alpha \cdot (z-L))}{\alpha \cdot (z-L)} - 2 \right) \cdot (z-L) \\ &= (i \cdot \kappa_2) \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(e^{-i \cdot \alpha \cdot (z-L)} + e^{i \cdot \alpha \cdot (z-L)} - 2 \right) \cdot (z-L) \\ &= (i \cdot \kappa_2) \cdot (z-L) \cdot \left(\sin\left(\frac{\alpha \cdot (z-L)}{2}\right) \right)^2 = \frac{i}{4} \cdot \kappa_2 \cdot \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \cdot (L-z)^3 \end{aligned} \quad (3-14-3)$$

最后我们可以得到倍频波的功率

$$I_1^{(2\omega)}(z) = |A_1^{(2\omega)}|^2 = \frac{1}{16} \cdot \kappa_2^2 \cdot \kappa_1^4 \cdot z^6 \quad (3-14-4)$$

$$I_2^{(2\omega)}(z) = |A_2^{(2\omega)}|^2 = \frac{1}{16} \cdot \kappa_2^2 \cdot \left(\frac{\pi}{L}\right)^4 \cdot (L-z)^6 \quad (3-14-5)$$

因此, 我们可以得到一个重要的结论: 一维光子带隙材料中带边倍频光场能量与通光长度成六次方的关系。

参考文献

- [1] G. D. Aguanno, M. Centini, M. Scalora, et al., Phys. Rev. E 64, 016609 (2001)
- [2] M. Centini, G. D. Aguanno, M. Scalora, et al., Phys. Rev. E 64, 046606 (2001)
- [3] Y. Dumeige, I. Sagnes, P. Monnier, et al., Phys. Rev. Lett. 89, 043901 (2002)
- [4] A. V. Balakin, V. A. Bushuev, B. I. Mantsyzov, et al., Phys. Rev. E 63, 046609 (2002)
- [5] B. Shi, X. Wang, Appl. Phys. Lett., 80, 3667 (2002)
- [6] B. Shi, Z. M. Zhang, X. Wang, Opt. Lett., 26, 1194 (2001)
- [7] N. H. Liu, S. Y. Zhu, H. Chen, et al., Phys. Rev. E 65, 046607 (2002)
- [8] G. D. Aguanno, M. Centini, M. Scalora, et al., Phys. Rev. E 63, 036610 (2001)
- [9] S. Y. Zhu, N. H. Liu, H. Zheng, et al., Opt. Commu. 174, 139 (2000)
- [10] J. Li, Z. Lie, C. T. Chan and P. Sheng, Phys. Rev. Lett. 90, 083901 (2003)
- [11] E. Macia, Phys. Rev. E 63, 205421 (2001)
- [12] R. W. Peng, X. Q. Huang, F. Qiu, et al., Appl. Phys. Lett., 80, 3063 (2002)
- [13] R. Shimada, T. Koda, T. Ueta, et al., J. Appl. Phys., 90, 3905 (2001)
- [14] Q. Qin, H. Lu, S. N. Zhu, et al., Appl. Phys. Lett., 82, 4654 (2003)

第四章 压电、压磁复合相材料的 Polariton 理论与非周期负折射材料

电磁波与晶格振动声波耦合可以通过两种途径完成,一种是在压电晶体中,晶格振动通过压电效应与电磁场中的电场耦合,另一种是在压磁晶体中,晶格振动通过压磁效应与电磁波中的磁场耦合。无论是哪一种耦合,声波波矢与电磁波波矢都需要满足波矢匹配条件。在一般情况下,晶体中同频率的声波波矢与电磁波波矢相差很大,不可能满足波矢匹配条件。但是,如果我们能够在压电(压磁)晶体中实现压电应力张量(压磁应力张量)的空间调制分布,利用这种空间结构提供的倒格矢去补偿声波与电磁波之间的波矢失配,我们就有可能实现声波与电磁波的耦合。前不久,朱永元教授在一篇文章中描述了一维周期极化 LN 超晶格中声波通过压电效应与电磁波耦合的情况^[1]。在本章中,我们将对压电、压磁晶体中的声光耦合过程进行广泛的讨论。首先,我们将不拘于周期极化结构,我们将主要研究由两种不同材料在空间中进行调制分布形成的复合材料中的压电、压磁效应导致的声光耦合过程。第二,我们将把介电材料中的声光耦合理论推广到磁性材料中,并且得到类似介电 Polariton 的磁 Polariton 的结果。第三,我们不限于讨论一维体系,我们在本章对声光耦合的理论分析将适用于三维中的各种结构体系。第四,我们将研究由压电压磁材料复合在一起的既有压电又有压磁的复合相材料,在这种复合相材料中,电 Polariton 和磁 Polariton 将同时产生,并且有相同的共振频率。第五,我们将研究具有非周期结构的压电-压磁复合相材料声光耦合,结果发现它可以形成一种新型的负折射材料。

4-1 压电晶体中的 Polariton 理论

压电晶体的耦合方程写作^[2]

$$\begin{cases} T_{ij} = c_{ijkl} \cdot \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + e_{ijk} \cdot E_k \\ D_i = -e_{ijk} \cdot \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \varepsilon_{ij}^s \cdot E_j \end{cases} \quad (4-1-1)$$

其中, u_j ($j=1, 2, 3$) 是晶格位移场矢量。

在此,我们研究的压电晶体是由两种压电材料组成的按一定规律进行空间调

制的结构体系。所以，应力应变张量 c_{ijkl} 、压电应力张量 e_{ijk} 、介电系数 ε_{ij} 都是空间位置的函数。

$$\begin{aligned}
 c_{ijkl} &= \bar{c}_{ijkl} + \Delta c_{ijkl} \cdot F(\bar{r}) \\
 \bar{c}_{ijkl} &= \frac{1}{2} \cdot (c_{ijkl}^a + c_{ijkl}^b) \\
 \Delta c_{ijkl} &= \frac{1}{2} \cdot (c_{ijkl}^a - c_{ijkl}^b) \\
 e_{ijk} &= \bar{e}_{ijk} + \Delta e_{ijk} \cdot F(\bar{r}) \\
 \bar{e}_{ijk} &= \frac{1}{2} \cdot (e_{ijk}^a + e_{ijk}^b) \\
 \Delta e_{ijk} &= \frac{1}{2} \cdot (e_{ijk}^a - e_{ijk}^b) \\
 \varepsilon_{ij}^s &= \bar{\varepsilon}_{ij}^s + \Delta \varepsilon_{ij}^s \cdot F(\bar{r}) \\
 \bar{\varepsilon}_{ij}^s &= \frac{1}{2} \cdot (\varepsilon_{ij}^{s,a} + \varepsilon_{ij}^{s,b}) \\
 \Delta \varepsilon_{ij}^s &= \frac{1}{2} \cdot (\varepsilon_{ij}^{s,a} - \varepsilon_{ij}^{s,b})
 \end{aligned} \tag{4-1-2}$$

c_{ijkl}^a 、 c_{ijkl}^b 、 e_{ijk}^a 、 e_{ijk}^b 分别是两种材料的应力应变张量和压电应力张量。 $F(\bar{r})$ 是我们引入的结构函数， $F(\bar{r})$ 取值 +1 或者 -1，代表两种不同的材料。

晶格振动方程

$$\rho \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_i} \tag{4-1-3}$$

将 (4-1-1) 代入上述方程，

$$\rho \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x_i} c_{ijkl} \cdot \frac{\partial u_k}{\partial x_l} = \frac{\partial}{\partial x_i} e_{ijk} E_k \tag{4-1-4}$$

考虑到声波波长是远离布里渊区边界，我们可以将 c_{ijkl} 取零阶近似，那么上述方程可以简化为

$$\rho \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} - \bar{c}_{ijkl} \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} = \frac{\partial}{\partial x_i} e_{ijk} E_k \tag{4-1-5}$$

为了简化考虑，以后我们就认为 $c_{ijkl} = \bar{c}_{ijkl}$ 。

对位移场 u_j 、电场 E_j 、压电应力张量 e_{ijk} 和结构函数 $F(\bar{r})$ 进行傅立叶变换得到

$$u_j(\vec{r}, t) = \int \tilde{u}_j(\vec{q}) \cdot e^{i(\omega t - \vec{q} \cdot \vec{r})} d\vec{q} \quad (4-1-6)$$

$$E_k(\vec{r}, t) = \int \tilde{E}_k(\vec{K}) \cdot e^{i(\omega t - \vec{K} \cdot \vec{r})} d\vec{K} \quad (4-1-7)$$

$$e_{ijk}(\vec{r}) = \int \tilde{e}_{ijk}(\vec{G}) \cdot e^{-i\vec{G} \cdot \vec{r}} d\vec{G} \quad (4-1-8)$$

$$F(\vec{r}) = \int f_{\vec{G}} \cdot e^{-i\vec{G} \cdot \vec{r}} d\vec{G} \quad (4-1-9)$$

其中 \vec{q} 是声波波矢, \vec{K} 是电磁波波矢, \vec{G} 是结构函数 $F(\vec{r})$ 的倒格矢。根据 $e_{ijk}(\vec{r})$

的定义, 我们可以有 $\tilde{e}_{ijk}(\vec{G}) = \Delta e_{ijk} \cdot f_{\vec{G}}$ 。对方程 (4-1-5) 左边,

$$\begin{aligned} & \rho \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} - c_{ijkl} \cdot \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_l} \\ &= \iint (-\rho \omega^2) \cdot \tilde{u}_j \cdot e^{i(\omega t - \vec{q} \cdot \vec{r})} d\vec{q} + \iint c_{ijkl} \cdot q_i \cdot q_l \cdot \tilde{u}_k \cdot e^{i(\omega t - \vec{q} \cdot \vec{r})} d\vec{q} \quad (4-1-10) \\ &= \iint (-\rho \omega^2 \cdot \delta_{jk} + c_{ijkl} \cdot q_i \cdot q_l) \cdot \tilde{u}_k \cdot e^{i(\omega t - \vec{q} \cdot \vec{r})} d\vec{q} \end{aligned}$$

对方程 (4-1-5) 右边, 考虑到 $|\vec{K}| \ll |\vec{G}|$,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(e_{ijk} E_k)}{\partial x_i} \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i} \iint \tilde{e}_{ijk} \cdot \tilde{E}_k \cdot e^{i(\omega t - (\vec{K} + \vec{G}) \cdot \vec{r})} d\vec{K} d\vec{G} \\ &= \iint (-i)(\vec{K} + \vec{G})_i \tilde{e}_{ijk} \cdot \tilde{E}_k \cdot e^{i(\omega t - (\vec{K} + \vec{G}) \cdot \vec{r})} d\vec{K} d\vec{G} \\ &= \iint (-i)(\vec{G})_i \tilde{e}_{ijk} \cdot \tilde{E}_k \cdot e^{i(\omega t - (\vec{K} + \vec{G}) \cdot \vec{r})} d\vec{G} \end{aligned} \quad (4-1-11)$$

比较 (4-1-10) 和 (4-1-11), 要两边相等, 需满足波矢匹配条件 $\vec{q} = \vec{K} + \vec{G}$,

$$(-\rho \omega^2 \cdot \delta_{jk} + c_{ijkl} \cdot G_i \cdot G_l) \cdot \tilde{u}_k(\vec{q} = \vec{K} + \vec{G}) = (-i) \cdot G_i \cdot \tilde{e}_{ijk} \cdot \tilde{E}_k \quad (4-1-12)$$

于是

$$\tilde{u}_k(\vec{q} = \vec{K} + \vec{G}) = i \cdot (\rho \omega^2 \cdot \delta_{jk} - c_{ijkl} \cdot G_i \cdot G_l)^{-1} \cdot G_i \cdot \tilde{e}_{ijk} \cdot \tilde{E}_k \quad (4-1-13)$$

由此

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u_k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \int \tilde{u}_k \cdot e^{i(\omega t - \vec{q} \cdot \vec{r})} d\vec{q} \\ &= \int (-iq_j) \tilde{u}_k \cdot e^{i(\omega t - \vec{q} \cdot \vec{r})} \cdot d\vec{q} \\ &= e^{-i\vec{q} \cdot \vec{r}} \cdot \int q_j \cdot (\rho \omega^2 \delta_{jk} - c_{ijkl} \cdot G_i \cdot G_l)^{-1} \cdot G_i \cdot \tilde{e}_{ijk} \cdot \tilde{E}_k \cdot e^{i(\omega t - \vec{K} \cdot \vec{r})} d\vec{K} \quad (4-1-14) \\ &= e^{-i\vec{q} \cdot \vec{r}} \cdot G_j \cdot (\rho \omega^2 \delta_{jk} - c_{ijkl} \cdot G_i \cdot G_l)^{-1} \cdot G_i \cdot \tilde{e}_{ijk} \cdot E_k(\vec{r}, t) \end{aligned}$$

将上式代入 (4-1-1)，并且介电系数张量取零级近似， $\varepsilon_{ik}^s = \bar{\varepsilon}_{ik}^s$

$$\begin{aligned}
 D_i &= \varepsilon_{ik}^s \cdot E_k(\bar{r}, t) - e_{ikj}(\bar{r}) \cdot \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \\
 &= \varepsilon_{ik}^s \cdot E_k(\bar{r}, t) - e_{ikj}(\bar{r}) \cdot e^{-i\bar{G}\cdot\bar{r}} \cdot G_j \cdot \left(\rho\omega^2 \cdot \delta_{jk} - c_{ijkl} \cdot G_l \cdot G_l \right)^{-1} \cdot G_i \cdot \tilde{e}_{ijk} \cdot E_k(\bar{r}, t) \\
 &= \left(\varepsilon_{ik}^s - e_{ikj}(\bar{r}) \cdot e^{-i\bar{G}\cdot\bar{r}} \cdot G_j \cdot \left(\rho\omega^2 \cdot \delta_{jk} - c_{ijkl} \cdot G_l \cdot G_l \right)^{-1} \cdot G_i \cdot \tilde{e}_{ijk} \right) \cdot E_k(\bar{r}, t)
 \end{aligned} \tag{4-1-15}$$

我们定义 $\varepsilon_{ik}(\bar{r})$: $D_i = \varepsilon_{ik}(\bar{r}) \cdot E_k(\bar{r}, t)$ ，于是

$$\varepsilon_{ik}(\bar{r}) = \varepsilon_{ik}^s + e_{ikj}(\bar{r}) \cdot e^{-i\bar{G}\cdot\bar{r}} \cdot G_j \cdot \left(-\rho\omega^2 \cdot \delta_{jk} + c_{ijkl} \cdot G_l \cdot G_l \right)^{-1} \cdot G_i \cdot \tilde{e}_{ijk} \tag{4-1-16}$$

因为 $|\bar{K}| \ll |\bar{G}|$ ，电磁波波长远远大于空间调制结构的周期，我们可以将晶体看作是均匀介质，利用上式对空间坐标平均，我们可以得到压电晶体中介电系数张量的 Polariton 色散关系

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{ik}(\omega) &= \frac{1}{V} \cdot \iiint_V \varepsilon_{ik}(\bar{r}) \cdot d\bar{r} \\
 &= \varepsilon_{ik}^s + \tilde{e}_{ikj} G_j \cdot \left(-\rho\omega^2 \cdot \delta_{jk} + c_{ijkl} \cdot G_l \cdot G_l \right)^{-1} \cdot G_i \cdot \tilde{e}_{ijk} \\
 &= \varepsilon_{ik}^s + f_G^2 \cdot \Delta e_{ikj} G_j \cdot \left(-\rho\omega^2 \cdot \delta_{jk} + c_{ijkl} \cdot G_l \cdot G_l \right)^{-1} \cdot G_i \cdot \Delta e_{ijk}
 \end{aligned} \tag{4-1-17}$$

为简化起见，下面我们都定义 $e_{ikj} = \Delta e_{ikj}$ ，最后我们可以得到

$$\varepsilon_{ik}(\omega) = \varepsilon_{ik}^s + f_G^2 \cdot e_{ikj} G_j \cdot \left(-\rho\omega^2 \cdot \delta_{jk} + c_{ijkl} \cdot G_l \cdot G_l \right)^{-1} \cdot G_i \cdot e_{ijk} \tag{4-1-18}$$

在上式中， c_{ijkl} 是 6×6 矩阵， e_{ijk} 是 3×6 矩阵，但是最后计算得到的 $\varepsilon_{ik}(\omega)$ 是 3×3 矩阵。为了可以比较清楚直观的计算，我们定义两个新的 3×3 矩阵张量，

$$A_{ij} = G_1 \cdot e_{1ij} + G_2 \cdot e_{2ij} + G_3 \cdot e_{3ij} \tag{4-1-19}$$

$$\begin{aligned}
 B_{ij} &= -\rho\omega^2 \delta_{ij} + G_1^2 \cdot c_{1ij1} + G_1 \cdot G_2 \cdot c_{1ij2} + G_1 \cdot G_3 \cdot c_{1ij3} + G_2 \cdot G_1 \cdot c_{2ij1} + G_2^2 \cdot c_{2ij2} \\
 &\quad + G_2 \cdot G_3 \cdot c_{2ij3} + G_3 \cdot G_1 \cdot c_{3ij1} + G_3 \cdot G_2 \cdot c_{3ij2} + G_3^2 \cdot c_{3ij3}
 \end{aligned} \tag{4-1-20}$$

这样，介电系数张量就可以表示成

$$\varepsilon_{ik}(\omega) = \varepsilon_{ik}^s + f_G^2 \cdot A_{ik} \cdot \left(B_{kj} \right)^{-1} \cdot A_{jk} \tag{4-1-21}$$

这里，A、B 是两个非常重要的矩阵，只要计算得到 A、B 两个矩阵，压电 Polariton

的色散关系就可以完全确定。从 A、B 两个矩阵的定义可以看出，A 矩阵中不包含频率 ω ，而 B 矩阵包含 ω ，所以压电 Polariton 的共振频率由 B 矩阵完全确定。另外，B 矩阵中不包含压电应力张量 e_{ijk} ，因此压电 Polariton 的共振频率与晶体的压电性质无关，只取决于应力应变张量 c_{ijkl} 和倒格矢 \vec{G} 。

4-2 压电晶体点群与 Polariton 色散关系

每一种晶体结构都有自己的点群对称性，应力应变张量与压电应力张量都有相应的对称形式，因此，对于不同的空间点群的晶体，(4-1-21) 中计算的介电系数张量也有不同的对称形式。下面，我们将计算几个常见点群晶体中的介电系数张量矩阵。

由于我们研究的复合材料是由两种不同的材料组成，其中每一种材料又都有各自的空间点群结构。根据上一节中的理论分析，复合材料的应力应变分量是 $c_{ijkl} = (c_{ijkl}^a + c_{ijkl}^b)/2$ ，可以看出， c_{ijkl} 是与 c_{ijkl}^a 、 c_{ijkl}^b 中对称性较低的那个张量取相同的对称性。同理， e_{ijk} 也是与 e_{ijk}^a 、 e_{ijk}^b 中对称性较低的那个张量取相同的对称性。所以，复合材料空间点群是与组成复合材料的两种材料中对称性较低的那种材料取相同的空间点群结构。下面，我们将给出常见的 6mm、3m 点群晶格中的压电 Polariton 的计算结果。

(一) 6mm 空间群

介电系数张量

$$(\epsilon_{ij}) = \begin{bmatrix} \epsilon_{11}^s & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{11}^s & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{33}^s \end{bmatrix} \quad (4-2-1)$$

应力应变张量

$$(c_{IJ}) = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{13} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{c_{11}-c_{12}}{2} \end{bmatrix} \quad (4-2-2)$$

这里需用到脚标缩写规则: (1, 1) → 1, (2, 2) → 2, (3, 3) → 3, (2, 3) 和 (3, 2) → 4, (1, 3) 和 (3, 1) → 5, (1, 2) 和 (2, 1) → 6。

压电应变张量

$$(e_{ij}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{31} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4-2-3)$$

通过上节对矩阵 A、B 的定义, 我们可以计算得到

$$(A_{ij}) = \begin{bmatrix} G_3 \cdot e_{31} & 0 & G_1 \cdot e_{15} \\ 0 & G_3 \cdot e_{31} & G_2 \cdot e_{15} \\ G_1 \cdot e_{15} & G_2 \cdot e_{15} & G_3 \cdot e_{33} \end{bmatrix} \quad (4-2-4)$$

$$(B_{ij}) = \begin{bmatrix} -\rho\omega^2 + G_1^2 \cdot c_{11} + G_2^2 \cdot \frac{c_{11} - c_{12}}{2} + G_3^2 \cdot c_{44} & G_1 \cdot G_2 \cdot \frac{c_{11} + c_{12}}{2} \\ G_1 \cdot G_2 \cdot \frac{c_{11} + c_{12}}{2} & -\rho\omega^2 + G_1^2 \cdot \frac{c_{11} - c_{12}}{2} + G_2^2 \cdot c_{11} + G_3^2 \cdot c_{44} \\ G_1 \cdot G_3 \cdot (c_{13} + c_{44}) & G_2 \cdot G_3 \cdot (c_{13} + c_{44}) \\ G_1 \cdot G_3 \cdot (c_{13} + c_{44}) & \\ G_2 \cdot G_3 \cdot (c_{13} + c_{44}) & \\ -\rho\omega^2 + (G_1^2 + G_2^2) \cdot c_{44} + G_3^2 \cdot c_{33} & \end{bmatrix} \quad (4-2-5)$$

最后将 (e_{ij}) 、 (A_{ij}) 和 (B_{ij}) 代入 (4-1-21), 就可以得到 6mm 点群压电晶体中的介电系数张量的色散关系。

(二) 3m 空间群

介电系数张量

$$(\varepsilon_{ij}^s) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11}^s & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{11}^s & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33}^s \end{bmatrix} \quad (4-2-6)$$

应力应变张量

$$(c_{IJ}) = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{13} & -c_{14} & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{13} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ c_{14} & -c_{14} & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & c_{14} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{14} & \frac{c_{11} - c_{12}}{2} \end{bmatrix} \quad (4-2-7)$$

压电应变张量

$$(e_{ij}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & -e_{22} \\ -e_{22} & e_{22} & 0 & e_{15} & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{31} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4-2-8)$$

通过上节对矩阵 A、B 的定义，我们可以计算得到

$$(A_{ij}) = \begin{bmatrix} -G_2 \cdot e_{22} + G_3 \cdot e_{31} & -G_1 \cdot e_{22} & G_1 \cdot e_{15} \\ -G_1 \cdot e_{22} & G_2 \cdot e_{22} + G_3 \cdot e_{31} & G_2 \cdot e_{15} \\ G_1 \cdot e_{15} & G_2 \cdot e_{15} & G_3 \cdot e_{33} \end{bmatrix} \quad (4-2-9)$$

$$(B_{ij}) = \begin{bmatrix} -\rho\omega^2 + G_1^2 \cdot c_{11} + G_2^2 \cdot \frac{c_{11} - c_{12}}{2} + G_3^2 \cdot c_{44} + 2 \cdot G_2 \cdot G_3 \cdot c_{14} \\ G_1 \cdot G_2 \cdot \frac{c_{11} + c_{12}}{2} + 2 \cdot G_1 \cdot G_3 \cdot c_{14} \\ G_1 \cdot G_3 \cdot (c_{13} + c_{44}) + 2 \cdot G_1 \cdot G_2 \cdot c_{14} \end{bmatrix} \quad (4-2-10)$$

$$G_1 \cdot G_2 \cdot \frac{c_{11} + c_{12}}{2} + 2 \cdot G_1 \cdot G_3 \cdot c_{14}$$

$$-\rho\omega^2 + G_1^2 \cdot \frac{c_{11} - c_{12}}{2} + G_2^2 \cdot c_{11} + G_3^2 \cdot c_{44} - 2 \cdot G_2 \cdot G_3 \cdot c_{14}$$

$$G_2 \cdot G_3 \cdot (c_{13} + c_{44}) + (G_1^2 - G_2^2) \cdot c_{14}$$

$$\begin{bmatrix} G_1 \cdot G_3 \cdot (c_{13} + c_{44}) + 2 \cdot G_1 \cdot G_2 \cdot c_{14} \\ G_2 \cdot G_3 \cdot (c_{13} + c_{44}) + (G_1^2 - G_2^2) \cdot c_{14} \\ -\rho\omega^2 + (G_1^2 + G_2^2) \cdot c_{44} + G_3^2 \cdot c_{33} \end{bmatrix}$$

最后将 (ϵ_{ij}) 、 (A_{ij}) 和 (B_{ij}) 代入 (4-1-21)，就可以得到 3m 点群压电晶体中的介电系数张量的色散关系。

4-3 一维压电晶体中的 Polariton 色散

上一节中我们给出了三维压电晶体中的 Polariton 色散张量矩阵，这一节我们将在一维压电晶体中给出更具体的结果。我们这里所讲的一维压电晶体是指压电晶体的压电应力张量只是沿 x、y、z 方向进行调制，例如周期极化超晶格或多层膜结构就是如此。这样，倒格矢只在调制方向上有分量，其他方向上分量为零。在上一节中，我们计算了常见点群中三维空间中介电系数张量的色散关系，有了这些公式，对于一维的情况则很容易处理，只要将倒格矢沿某两个方向上的分量取作零，代入上一节中的公式，就可以计算出一维体系中的 Polariton。下面我们

将给出 6mm、3m 点群中沿 x、z 方向上的一维结构的计算结果。因为对于 6mm、3m 点群来说, x、y 方向是对称的, 所以 y 方向上的 Polariton 和 x 方向上的 Polariton 是同样的结果。

(一) 6mm 点群

(1) z 方向上的一维调制结构

倒格矢

$$\vec{G} = (0 \ 0 \ G_3) \quad (4-3-1)$$

A 矩阵

$$A = \begin{bmatrix} G_3 \cdot e_{31} & 0 & 0 \\ 0 & G_3 \cdot e_{31} & 0 \\ 0 & 0 & G_3 \cdot e_{33} \end{bmatrix} \quad (4-3-2)$$

B 矩阵

$$B = \begin{bmatrix} -\rho\omega^2 + G_3^2 \cdot c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & -\rho\omega^2 + G_3^2 \cdot c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & -\rho\omega^2 + G_3^2 \cdot c_{33} \end{bmatrix} \quad (4-3-3)$$

介电系数张量矩阵

$$\varepsilon(\omega) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11}^r + \frac{e_{31}^2 \cdot f_{G_3}^2 \cdot G_3^2}{G_3^2 \cdot c_{44} - \rho\omega^2} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{11}^r + \frac{e_{31}^2 \cdot f_{G_1}^2 \cdot G_3^2}{G_3^2 \cdot c_{44} - \rho\omega^2} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33}^r + \frac{e_{33}^2 \cdot f_{G_1}^2 \cdot G_3^2}{G_3^2 \cdot c_{33} - \rho\omega^2} \end{bmatrix} \quad (4-3-4)$$

(2) x 方向上的一维调制结构

倒格矢

$$\vec{G} = (G_1 \ 0 \ 0) \quad (4-3-5)$$

A 矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & G_1 \cdot e_{15} \\ 0 & 0 & 0 \\ G_1 \cdot e_{15} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4-3-6)$$

B 矩阵

$$B = \begin{bmatrix} -\rho\omega^2 + G_1^2 \cdot c_{11} & 0 & 0 \\ 0 & -\rho\omega^2 + G_1^2 \cdot \frac{c_{11} - c_{12}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\rho\omega^2 + G_1^2 \cdot c_{44} \end{bmatrix} \quad (4-3-7)$$

介电系数张量矩阵

$$\varepsilon(\omega) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11}^s + \frac{e_{15}^2 \cdot f_{G_1}^2 \cdot G_1^2}{G_3^2 \cdot c_{44} - \rho\omega^2} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{11}^s & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33}^s + \frac{e_{15}^2 \cdot f_{G_1}^2 \cdot G_1^2}{G_1^2 \cdot c_{11} - \rho\omega^2} \end{bmatrix} \quad (4-3-8)$$

(二) 3m 点群

(1) z 方向上的一维调制结构

倒格矢

$$\vec{G} = (0 \quad 0 \quad G_3) \quad (4-3-9)$$

A 矩阵

$$A = \begin{bmatrix} G_3 \cdot e_{31} & 0 & 0 \\ 0 & G_3 \cdot e_{31} & 0 \\ 0 & 0 & G_3 \cdot e_{33} \end{bmatrix} \quad (4-3-10)$$

B 矩阵

$$B = \begin{bmatrix} -\rho\omega^2 + G_3^2 \cdot c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & -\rho\omega^2 + G_3^2 \cdot c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & -\rho\omega^2 + G_3^2 \cdot c_{33} \end{bmatrix} \quad (4-3-11)$$

介电系数张量矩阵

$$\varepsilon(\omega) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11}^s + \frac{e_{31}^2 \cdot f_{G_3}^2 \cdot G_3^2}{G_3^2 \cdot c_{44} - \rho\omega^2} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{11}^s + \frac{e_{31}^2 \cdot f_{G_3}^2 \cdot G_3^2}{G_3^2 \cdot c_{44} - \rho\omega^2} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33}^s + \frac{e_{33}^2 \cdot f_{G_3}^2 \cdot G_3^2}{G_3^2 \cdot c_{33} - \rho\omega^2} \end{bmatrix} \quad (4-3-12)$$

(2) x 方向上的一维调制结构

倒格矢

$$\begin{cases} T_{ij} = c_{ijkl} \cdot \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + q_{ijk} \cdot H_k \\ B_i = -q_{ijk} \cdot \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \mu_{ij} \cdot H_j \end{cases} \quad (4-4-1)$$

压磁晶体中晶格振动方程

$$\rho \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} - c_{ijkl} \cdot \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_l} = \frac{\partial (q_{ijk} H_k)}{\partial x_i} \quad (4-4-2)$$

在此，我们提出一个压电晶体声光耦合理论和压磁晶体声光耦合理论的对应规则： $E_k \leftrightarrow H_k$ ， $e_{ijk} \leftrightarrow q_{ijk}$ 。在这个对应规则下，本章前三节所讨论的关于压电晶体中介电 Polariton 理论全部适用于压磁晶体。这样，我们得到压磁晶体中的磁导率张量系数的色散关系

$$\mu_{ik}(\omega) = \mu_{ik}^0 + f_G^2 \cdot C_{ik} \cdot (B_{ij})^{-1} \cdot C_{jk} \quad (4-4-3)$$

其中

$$C_{ij} = G_1 \cdot q_{1ij} + G_2 \cdot q_{2ij} + G_3 \cdot q_{3ij} \quad (4-4-4)$$

$$\begin{aligned} B_{ij} = & -\rho \omega^2 \delta_{ij} + G_1^2 \cdot c_{1ij1} + G_1 \cdot G_2 \cdot c_{1ij2} + G_1 \cdot G_3 \cdot c_{1ij3} + G_2 \cdot G_1 \cdot c_{2ij1} + G_2^2 \cdot c_{2ij2} \\ & + G_2 \cdot G_3 \cdot c_{2ij3} + G_3 \cdot G_1 \cdot c_{3ij1} + G_3 \cdot G_2 \cdot c_{3ij2} + G_3^2 \cdot c_{3ij3} \end{aligned} \quad (4-4-5)$$

我们发现，压电 Polariton 和压磁 Polariton 的有相同的 B 矩阵，因此，只要压电、压磁材料有一样的应变应力张量，它们就有相同的共振频率，这一点对压电—压磁复合相材料很有意义。

4-5 压电—压磁复合相材料中的介电 Polariton 和磁 Polariton

压电—压磁复合相材料是一种新型的复合型材料，它有很好的磁电耦合性质，正引起越来越多人的兴趣^[3-5]。在本章的上几节中，我们分别研究了压电晶体中的电 Polariton 和压磁晶体中的磁 Polariton，在本节中，我们将把以上的理论处理方法应用于压电—压磁复合相材料之中，以期同时得到电 Polariton 和磁 Polariton，这对于最后得到左手材料很有意义。在此，我们想要讨论的压电—压磁复合相材料并不是两种材料的简单混合，而是压电、压磁材料在空间按照周期或着非周期进行调制的结果。

首先，我们给出压电—压磁复合材料中的耦合方程，

$$\begin{cases} T_{ij} = c_{ijkl} \cdot \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + e_{ijk} \cdot E_k + q_{ijk} \cdot H_k \\ D_i = -e_{ijk} \cdot \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \varepsilon_{ij}^s \cdot E_j \\ B_i = -q_{ijk} \cdot \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \mu_{ij}^s \cdot H_j \end{cases} \quad (4-5-1)$$

其中, 应力应变张量 c_{ijkl} 、压电应力张量 e_{ijk} 、压磁应力张量 q_{ijk} 、介电系数张量 ε_{ij}^s 、磁导率张量 μ_{ij}^s 都是空间坐标的函数。

$$\begin{aligned} c_{ijkl} &= \bar{c}_{ijkl} + \Delta c_{ijkl} \cdot F(\bar{r}) \\ \bar{c}_{ijkl} &= \frac{1}{2} \cdot (c_{ijkl}^a + c_{ijkl}^b) \\ \Delta c_{ijkl} &= \frac{1}{2} \cdot (c_{ijkl}^a - c_{ijkl}^b) \\ e_{ijk} &= \bar{e}_{ijk} + \Delta e_{ijk} \cdot F(\bar{r}) \\ \bar{e}_{ijk} &= \frac{1}{2} \cdot (e_{ijk}^a + e_{ijk}^b) \\ \Delta e_{ijk} &= \frac{1}{2} \cdot (e_{ijk}^a - e_{ijk}^b) \\ q_{ijk} &= \bar{q}_{ijk} + \Delta q_{ijk} \cdot F(\bar{r}) \\ \bar{q}_{ijk} &= \frac{1}{2} \cdot (q_{ijk}^a + q_{ijk}^b) \\ \Delta q_{ijk} &= \frac{1}{2} \cdot (q_{ijk}^a - q_{ijk}^b) \\ \varepsilon_{ij}^s &= \bar{\varepsilon}_{ij}^s + \Delta \varepsilon_{ij}^s \cdot F(\bar{r}) \\ \bar{\varepsilon}_{ij}^s &= \frac{1}{2} \cdot (\varepsilon_{ij}^{s,a} + \varepsilon_{ij}^{s,b}) \\ \Delta \varepsilon_{ij}^s &= \frac{1}{2} \cdot (\varepsilon_{ij}^{s,a} - \varepsilon_{ij}^{s,b}) \\ \mu_{ij}^s &= \bar{\mu}_{ij}^s + \Delta \mu_{ij}^s \cdot F(\bar{r}) \\ \bar{\mu}_{ij}^s &= \frac{1}{2} \cdot (\mu_{ij}^{s,a} + \mu_{ij}^{s,b}) \\ \Delta \mu_{ij}^s &= \frac{1}{2} \cdot (\mu_{ij}^{s,a} - \mu_{ij}^{s,b}) \end{aligned} \quad (4-5-2)$$

c_{ijkl}^a 、 c_{ijkl}^b 、 e_{ijk}^a 、 e_{ijk}^b 、 q_{ijk}^a 、 q_{ijk}^b 、 $\varepsilon_{ij}^{s,a}$ 、 $\varepsilon_{ij}^{s,b}$ 、 $\mu_{ij}^{s,a}$ 、 $\mu_{ij}^{s,b}$ 分别是两种材料的应力应变张量、压电应力张量、压磁应力张量、介电系数张量和磁导率张量。 $F(\bar{r})$

是我们引入的结构函数， $F(\vec{r})$ 取值+1 或者-1，代表两种不同的材料。和本章第一节讨论的一样，我们对 c_{ijkl} 、 ϵ_{ij}^s 、 μ_{ij}^s 都取平均近似，

$$\begin{aligned} c_{ijkl} &= \frac{1}{2} \cdot (c_{ijkl}^a + c_{ijkl}^b) \\ \epsilon_{ij}^s &= \frac{1}{2} \cdot (\epsilon_{ij}^{s,a} + \epsilon_{ij}^{s,b}) \\ \mu_{ij}^s &= \frac{1}{2} \cdot (\mu_{ij}^{s,a} + \mu_{ij}^{s,b}) \end{aligned} \quad (4-5-3)$$

考虑了压电、压磁与晶格振动的耦合之后，晶格振动方程变成

$$\rho \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} - c_{ijkl} \cdot \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_l} = \frac{\partial(e_{ijk} E_k)}{\partial x_i} + \frac{\partial(q_{ijk} E_k)}{\partial x_i} \quad (4-5-4)$$

在此，我们引入傅立叶变换

$$\begin{aligned} u_j &= \int \tilde{u}_j \cdot e^{i(\omega t - \vec{q} \cdot \vec{r})} d\vec{q} \\ E_k &= \int \tilde{E}_k \cdot e^{i(\omega t - \vec{K} \cdot \vec{r})} d\vec{K} \\ H_k &= \int \tilde{H}_k \cdot e^{i(\omega t - \vec{K} \cdot \vec{r})} d\vec{K} \\ e_{ijk} &= \int \tilde{e}_{ijk} \cdot e^{-i\vec{G} \cdot \vec{r}} d\vec{G} \\ q_{ijk} &= \int \tilde{q}_{ijk} \cdot e^{-i\vec{G} \cdot \vec{r}} d\vec{G} \\ F(\vec{r}) &= \int f_{\vec{G}} \cdot e^{-i\vec{G} \cdot \vec{r}} d\vec{G} \end{aligned} \quad (4-5-5)$$

其中

$$\tilde{e}_{ijk}(\vec{G}) = \Delta e_{ijk} \cdot f_{\vec{G}}, \quad \tilde{q}_{ijk}(\vec{G}) = \Delta q_{ijk} \cdot f_{\vec{G}} \quad (4-5-6)$$

下面为了简化处理，我们定义 $e_{ikj} = \Delta e_{ikj}$ ， $q_{ikj} = \Delta q_{ikj}$ ，所以

$$\tilde{e}_{ijk}(\vec{G}) = e_{ijk} \cdot f_{\vec{G}}, \quad \tilde{q}_{ijk}(\vec{G}) = q_{ijk} \cdot f_{\vec{G}} \quad (4-5-7)$$

对于(4-5-4)左边：

$$\begin{aligned} &\rho \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} - c_{ijkl} \cdot \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_l} \\ &= \int \left(-\rho \omega^2 \right) \cdot \tilde{u}_j \cdot e^{i(\omega t - \vec{q} \cdot \vec{r})} d\vec{q} + \int c_{ijkl} \cdot q_i \cdot q_l \cdot \tilde{u}_k \cdot e^{i(\omega t - \vec{q} \cdot \vec{r})} d\vec{q} \\ &= \int \left(-\rho \omega^2 \cdot \delta_{jk} + c_{ijkl} \cdot q_i \cdot q_l \right) \cdot \tilde{u}_k \cdot e^{i(\omega t - \vec{q} \cdot \vec{r})} d\vec{q} \end{aligned} \quad (4-5-8)$$

对于(4-5-4)右边:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial(e_{ijk}E_k)}{\partial x_i} + \frac{\partial(q_{ijk}H_k)}{\partial x_i} \\
 &= \frac{\partial}{\partial x_i} \iint (\tilde{e}_{ijk} \cdot \tilde{E}_k + \tilde{q}_{ijk} \cdot \tilde{H}_k) \cdot e^{i(\alpha x - (\bar{K} + \bar{G})\bar{r})} d\bar{K} d\bar{G} \\
 &= \iint (-i)(\bar{K} + \bar{G})_i \cdot (\tilde{e}_{ijk} \cdot \tilde{E}_k + \tilde{q}_{ijk} \cdot \tilde{H}_k) \cdot e^{i(\alpha x - (\bar{K} + \bar{G})\bar{r})} d\bar{K} d\bar{G} \\
 &= \iint (-i)(\bar{G})_i \cdot (\tilde{e}_{ijk} \cdot \tilde{E}_k + \tilde{q}_{ijk} \cdot \tilde{H}_k) \cdot e^{i(\alpha x - (\bar{K} + \bar{G})\bar{r})} d\bar{G}
 \end{aligned} \tag{4-5-9}$$

比较(4-5-8)和(4-5-9):

$$(-\rho\omega^2 \cdot \delta_{jk} + c_{ijkl} \cdot G_i \cdot G_l) \cdot \tilde{u}_k(\bar{q} = \bar{K} + \bar{G}) = (-i)(\bar{G})_i \cdot (\tilde{e}_{ijk} \cdot \tilde{E}_k + \tilde{q}_{ijk} \cdot \tilde{H}_k) \tag{4-5-10}$$

可以得到

$$\tilde{u}_k(\bar{q} = \bar{K} + \bar{G}) = i \cdot (\rho\omega^2 \cdot \delta_{jk} - c_{ijkl} \cdot G_i \cdot G_l)^{-1} \cdot G_i \cdot (\tilde{e}_{ijk} \cdot \tilde{E}_k + \tilde{q}_{ijk} \cdot \tilde{H}_k) \tag{4-5-11}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u_k}{\partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_j} \int \tilde{u}_k \cdot e^{i(\omega t - \bar{q}\bar{r})} d\bar{q} = \int (-iq_j) \cdot \tilde{u}_k \cdot e^{i(\omega t - \bar{q}\bar{r})} d\bar{q} \\
 &= e^{-i\bar{G}\bar{r}} \cdot \int q_j \cdot (\rho\omega^2 \delta_{jk} - c_{ijkl} \cdot G_i \cdot G_l)^{-1} \cdot G_i \cdot (\tilde{e}_{ijk} \cdot \tilde{E}_k + \tilde{q}_{ijk} \cdot \tilde{H}_k) \cdot e^{i(\alpha x - \bar{K}\bar{r})} d\bar{K} \\
 &= e^{-i\bar{G}\bar{r}} \cdot G_j \cdot (\rho\omega^2 \delta_{jk} - c_{ijkl} \cdot G_i \cdot G_l)^{-1} \cdot G_i \cdot (\tilde{e}_{ijk} \cdot E_k(\bar{r}, t) + \tilde{q}_{ijk} \cdot H_k(\bar{r}, t))
 \end{aligned} \tag{4-5-12}$$

将上述推导带入(4-5-1)

$$D_i = \varepsilon_{ik}^* \cdot E_k(\bar{r}, t) - e_{ikj}(\bar{r}) \cdot \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \tag{4-5-13}$$

$$= \varepsilon_{ik}^* \cdot E_k(\bar{r}, t) - e_{ikj}(\bar{r}) \cdot e^{-i\bar{G}\bar{r}} \cdot G_j \cdot (\rho\omega^2 \cdot \delta_{jk} - c_{ijkl} \cdot G_i \cdot G_l)^{-1} \cdot G_i \cdot (\tilde{e}_{ijk} \cdot E_k(\bar{r}, t) + \tilde{q}_{ijk} \cdot H_k(\bar{r}, t))$$

$$B_i = \mu_{ik}^* \cdot H_k(\bar{r}, t) - q_{ikj}(\bar{r}) \cdot \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \tag{4-5-14}$$

$$= \mu_{ik}^* \cdot H_k(\bar{r}, t) - q_{ikj}(\bar{r}) \cdot e^{-i\bar{G}\bar{r}} \cdot G_j \cdot (\rho\omega^2 \cdot \delta_{jk} - c_{ijkl} \cdot G_i \cdot G_l)^{-1} \cdot G_i \cdot (\tilde{e}_{ijk} \cdot E_k(\bar{r}, t) + \tilde{q}_{ijk} \cdot H_k(\bar{r}, t))$$

对空间坐标取平均计算

$$\bar{D}_i = \frac{1}{V} \iiint_V D_i(\bar{r}) \cdot d\bar{r} = \varepsilon_{ik}^* \cdot \tilde{E}_k + \tilde{e}_{ikj} \cdot G_j \cdot (-\rho\omega^2 \cdot \delta_{jk} + c_{ijkl} \cdot G_i \cdot G_l)^{-1} \cdot G_i \cdot (\tilde{e}_{ijk} \cdot \tilde{E}_k + \tilde{q}_{ijk} \cdot \tilde{H}_k); \tag{4-5-15}$$

$$\bar{B}_i = \frac{1}{V} \iiint_V B_i(\bar{r}) \cdot d\bar{r} = \varepsilon_{ik}^* \cdot \tilde{H}_k + \tilde{q}_{ikj} \cdot G_j \cdot (-\rho\omega^2 \cdot \delta_{jk} + c_{ijkl} \cdot G_i \cdot G_l)^{-1} \cdot G_i \cdot (\tilde{e}_{ijk} \cdot \tilde{E}_k + \tilde{q}_{ijk} \cdot \tilde{H}_k) \tag{4-5-16}$$

经过整理后, 我们得到

$$\bar{D}_i = \varepsilon_{ik}(\omega) \cdot \tilde{E}_k + \alpha_{ik}(\omega) \cdot \tilde{H}_k \tag{4-5-17}$$

$$\tilde{B}_i = \mu_{ik}(\omega) \cdot \tilde{H}_k + \alpha_{ik}(\omega) \cdot \tilde{E}_k \quad (4-5-18)$$

其中介电系数

$$\varepsilon_{ik}(\omega) = \varepsilon_{ik}^s + \tilde{e}_{ikj} \cdot G_j \cdot \left(-\rho\omega^2 \cdot \delta_{jk} + c_{ijkl} \cdot G_i \cdot G_l \right)^{-1} \cdot G_i \cdot \tilde{e}_{ijk} \quad (4-5-19)$$

磁导率系数

$$\mu_{ik}(\omega) = \mu_{ik}^s + \tilde{e}_{ikj} \cdot G_j \cdot \left(-\rho\omega^2 \cdot \delta_{jk} + c_{ijkl} \cdot G_i \cdot G_l \right)^{-1} \cdot G_i \cdot \tilde{e}_{ijk} \quad (4-5-20)$$

磁电耦合系数

$$\alpha_{ik}(\omega) = \tilde{e}_{ikj} \cdot G_j \cdot \left(-\rho\omega^2 \cdot \delta_{jk} + c_{ijkl} \cdot G_i \cdot G_l \right)^{-1} \cdot G_i \cdot \tilde{q}_{ijk} \quad (4-5-21)$$

以上，我们从方程(4-5-4)得到了压电-压磁复合材料中的介电 Polariton 和磁 Polariton 的色散公式。这里，我们定义四个新的 3×3 矩阵张量，

$$A_{jk} = \sum_{i=1}^3 G_i \cdot e_{ijk} \quad (4-5-22)$$

$$C_{jk} = \sum_{i=1}^3 G_i \cdot q_{ijk} \quad (4-5-23)$$

$$B_{jk} = \sum_{i,k=1}^3 \left(-\rho\omega^2 \cdot \delta_{jk} + c_{ijkl} \cdot G_i \cdot G_l \right) \quad (4-5-24)$$

这样，介电系数张量和磁导率张量可以清楚地表示成

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ik}(\omega) &= \varepsilon_{ik}^s + f_G^2 \cdot A_{ik} \cdot (B_{jk})^{-1} \cdot A_{jk} \\ \mu_{ik}(\omega) &= \mu_{ik}^s + f_G^2 \cdot C_{ik} \cdot (B_{jk})^{-1} \cdot C_{jk} \\ \alpha_{ik}(\omega) &= f_G^2 \cdot A_{ik} \cdot (B_{jk})^{-1} \cdot C_{jk} \end{aligned} \quad (4-5-25)$$

(4-5-25)就是压电-压磁复合材料中介电 Polariton 和磁 Polariton 的最后结果。

4-6 一维压电-压磁复合相多层膜的 Polariton

上一节中，我们给出了压电-压磁多层膜复合相材料中介电 Polariton 与磁 Polariton 色散的普遍公式，利用这个公式，我们可以在各种晶体点群中给出具体的计算结果。从(4-5-25)中可以看出，压电-压磁复合材料中的介电系数张量和磁导率张量与压电晶体中的介电系数张量(4-1-21)、压磁晶体中的磁导率张量(4-4-3)比较，形式没有改变。因此，压电-压磁复合材料在各种晶

体点群中的色散张量矩阵的计算结果的对称形式没有改变, 我们就不再详细讨论。在此, 我们想具体研究一下 6mm 点群中沿 z 方向调制的一维压电-压磁复合相多层膜的 Polariton 性质。

倒格矢

$$\vec{G} = (0 \quad 0 \quad G_3) \quad (4-6-1)$$

A 矩阵

$$A = \begin{bmatrix} G_3 \cdot e_{31} & 0 & 0 \\ 0 & G_3 \cdot e_{31} & 0 \\ 0 & 0 & G_3 \cdot e_{33} \end{bmatrix} \quad (4-6-2)$$

B 矩阵

$$B = \begin{bmatrix} -\rho\omega^2 + G_3^2 \cdot c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & -\rho\omega^2 + G_3^2 \cdot c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & -\rho\omega^2 + G_3^2 \cdot c_{33} \end{bmatrix} \quad (4-6-3)$$

C 矩阵

$$C = \begin{bmatrix} G_3 \cdot q_{31} & 0 & 0 \\ 0 & G_3 \cdot q_{31} & 0 \\ 0 & 0 & G_3 \cdot q_{33} \end{bmatrix} \quad (4-6-4)$$

介电系数张量矩阵

$$\epsilon(\omega) = \begin{bmatrix} \epsilon_{11}^s + \frac{e_{31}^2 \cdot f_{G_1}^2 \cdot G_3^2}{G_3^2 \cdot c_{44} - \rho\omega^2} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{11}^s + \frac{e_{31}^2 \cdot f_{G_1}^2 \cdot G_3^2}{G_3^2 \cdot c_{44} - \rho\omega^2} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{33}^s + \frac{e_{33}^2 \cdot f_{G_1}^2 \cdot G_3^2}{G_3^2 \cdot c_{33} - \rho\omega^2} \end{bmatrix} \quad (4-6-5)$$

磁导率张量矩阵

$$\mu(\omega) = \begin{bmatrix} \mu_{11}^s + \frac{e_{31}^2 \cdot f_{G_1}^2 \cdot G_3^2}{G_3^2 \cdot c_{44} - \rho\omega^2} & 0 & 0 \\ 0 & \mu_{11}^s + \frac{e_{31}^2 \cdot f_{G_1}^2 \cdot G_3^2}{G_3^2 \cdot c_{44} - \rho\omega^2} & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{33}^s + \frac{e_{33}^2 \cdot f_{G_1}^2 \cdot G_3^2}{G_3^2 \cdot c_{33} - \rho\omega^2} \end{bmatrix} \quad (4-6-6)$$

磁电耦合系数张量矩阵

$$\alpha(\omega) = \begin{bmatrix} \frac{e_{31} \cdot q_{31} \cdot f_{G_1}^2 \cdot G_3^2}{G_3^2 \cdot c_{44} - \rho \omega^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{e_{31} \cdot q_{31} \cdot f_{G_1}^2 \cdot G_3^2}{G_3^2 \cdot c_{44} - \rho \omega^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{e_{33} \cdot q_{33} \cdot f_{G_1}^2 \cdot G_3^2}{G_3^2 \cdot c_{33} - \rho \omega^2} \end{bmatrix} \quad (4-6-7)$$

由此,

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}(\omega) = \varepsilon_{22}(\omega) &= \varepsilon_{11}^s + \frac{e_{31}^2 \cdot f_{G_1}^2 \cdot G_3^2 / \rho}{\omega_{11}^2 - \omega^2} \\ \varepsilon_{33}(\omega) &= \varepsilon_{33}^s + \frac{e_{33}^2 \cdot f_{G_1}^2 \cdot G_3^2 / \rho}{\omega_{33}^2 - \omega^2} \\ \mu_{11}(\omega) = \mu_{22}(\omega) &= \mu_{11}^s + \frac{e_{31}^2 \cdot f_{G_1}^2 \cdot G_3^2 / \rho}{\omega_{11}^2 - \omega^2} \\ \mu_{33}(\omega) &= \mu_{33}^s + \frac{e_{33}^2 \cdot f_{G_1}^2 \cdot G_3^2 / \rho}{\omega_{33}^2 - \omega^2} \\ \alpha_{11}(\omega) = \alpha_{22}(\omega) &= \frac{e_{31} \cdot q_{31} \cdot f_{G_1}^2 \cdot G_3^2 / \rho}{\omega_{11}^2 - \omega^2} \\ \alpha_{33}(\omega) &= \frac{e_{33} \cdot q_{33} \cdot f_{G_1}^2 \cdot G_3^2 / \rho}{\omega_{33}^2 - \omega^2} \end{aligned} \quad (4-6-8)$$

这里,

$$\omega_{11} = G_3 \cdot \sqrt{\frac{c_{44}}{\rho}} \quad \omega_{33} = G_3 \cdot \sqrt{\frac{c_{33}}{\rho}} \quad (4-6-9)$$

所以, $\varepsilon_{11}(\omega)$ 、 $\varepsilon_{22}(\omega)$ 、 $\mu_{11}(\omega)$ 、 $\mu_{33}(\omega)$ 有相同的共振频率 ω_{11} , 而 $\varepsilon_{33}(\omega)$ 、 $\mu_{33}(\omega)$ 有相同的共振频率 ω_{33} 。

4-7 非周期负折射材料

负折射材料是 Veselago 在 1968 年从理论上预言的一种新材料^[6]。负折射性质的关键的判断依据是材料的介电系数和磁导率同时为负数。和普通材料相比, 负

在此，共振频率 $\omega_a = G_m \sqrt{c_{44}/\rho}$ 是与倒格矢 G_m 成正比的，而倒格矢 $G_m = m \cdot \pi/d$ ，其中 d 是磁电复合超晶格的膜厚， m 是倒格矢的阶数。于是，减小 d 或增加 m 都会使共振频率变大。但是， d 不能过小，否则上面采用的连续介质近似不能成立。对于最普通的 LN 材料来说， $\rho \sim 4 \times 10^3 (\text{kg}/\text{m}^3)$ ， $c_{44} \sim 20 \times 10^{10} (\text{N}/\text{m}^2)$ ，另外，如果我们选取 $d \sim 1.0 (\mu\text{m})$ ， $m \sim 10$ ，我们可以得到共振频率 $\omega_a \sim 10^{12} \text{Hz}$ ，这说明利用磁电复合超晶格，我们可以在红外段实现负折射性质。

参考文献

- [1] Y. Y. Zhu, X. J. Zhang, Y. Q. Lu, Y. F. Cheng, S. N. Zhu and N. B. Ming, Phys. Rev. Lett, 90, 053903 (2003)
- [2] B. A. Auld, Acoustic Fields and Waves in Solids (Wiley, New York, 1973).
- [3] C. W. Nan, Phys.Rev.B, vol 50, No.9, 6082 (1994)
- [4] M. I. Bichurin, I. A. Kornev, V. M. Petrov, A. S. Tatarenko, and Yu. V. Kiliba, Phys. Rev. B, 64, 094409 (2001)
- [5] M. I. Bichurin, V. M. Petrov, and Yu. V. Kiliba, Phys. Rev. B, 66, 134404 (2002)
- [6] V. G. Veselago, Sov. Phys. Usp. 10,509 (1968)
- [7] J. B. Pendry, A. J. Holden, D. J. Robbins, and W. J. Stewart, IEEE Trans Microwave Theory Tech. 47,2075 (1999)
- [8] R. A. Shelby. D. R. Smith, and S. Schultz, Science 292,77 (2001)

第五章 压电超晶格中的 Polariton 准粒子的纠缠态

当压电超晶格中的光子波矢、声子波矢与倒格矢三者之间满足波矢匹配条件时，光子与声子会发生强耦合作用^[11]。在本章中，我们将对压电超晶格中光-声的强耦合作用用二次量子化的方法进行处理。理论分析表明，压电超晶格中光子与声子的强耦合作用会产生新的处于纠缠态的元激发准粒子对，压电超晶格提供了一种新的量子纠缠态的制备方法。

5-1 压电超晶格中哈密顿的二次量子化形式

如果我们从晶格动力学的出发来考察压电超晶格的问题，压电超晶格的总哈密顿应该包含三部分，一是声子振动能量项（包括晶格动能和势能），二是电磁场能量项，三是声子与电磁场作用项。声子与电磁场作用的物理机制决定了哈密顿能量作用项的数学形式，在此我们考虑的是压电超晶格中的压电效应机制，因此，我们需要从压电效应出发给出声子-电磁场互作用哈密顿。因为我们在此讨论的是超晶格，倒格矢对于得到最后哈密顿的对角化形式起了关键作用。

根据普通的晶格动力学理论，我们可以得到声子的哈密顿是

$$H_A = T + \Delta\Phi = \sum_{l,\alpha} \frac{M}{2} \cdot \dot{u}_l^\alpha \cdot \dot{u}_l^\alpha - \frac{1}{4} \cdot \sum_{\alpha,\beta} \sum_{l,l'} (u_l^\alpha - u_l^\beta) \cdot \phi_{\alpha\beta}(l-l') \cdot (u_{l'}^\beta - u_{l'}^\alpha) \quad (5-1-1)$$

在长波近似的条件下，定义晶格点阵求和与连续体积分的关系是 $\Omega \cdot \sum_l \rightarrow \int dV$ ，这里 Ω 是晶格元胞体积，密度 $\rho = M/\Omega$ ，我们可以对声子哈密顿进行连续化处理，

$$H_A = \int dV \cdot \left(\sum_{\alpha} \frac{\rho}{2} \cdot \dot{u}^\alpha \cdot \dot{u}^\alpha + \sum_{\alpha,\beta,\mu,\nu} \frac{1}{2} \cdot c_{\alpha\beta\mu\nu} \cdot \frac{\partial u^\alpha}{\partial x_\mu} \cdot \frac{\partial u^\beta}{\partial x_\nu} \right) \quad (5-1-2)$$

其中应变应力系数

$$c_{\alpha\beta\mu\nu} = -\frac{1}{2 \cdot \Omega} \cdot \sum_l \phi_{\alpha\beta}(l-l') \cdot (\bar{R}_l - \bar{R}_{l'})_\mu \cdot (\bar{R}_l - \bar{R}_{l'})_\nu \quad (5-1-3)$$

由普通的晶格动力学理论，声子的哈密顿二次量子化的结果是^[12]

$$\hat{H}_A = \sum_{q,\sigma} \hbar \cdot \omega_{A,\sigma}(\omega) \cdot \left(\hat{b}_{q,\sigma}^+ \cdot \hat{b}_{q,\sigma} + \frac{1}{2} \right) \quad (5-1-4)$$

晶格的位移场可以用声子的产生湮灭算符表示

$$\bar{u}_l = \sum_{\bar{q}, \sigma} \left(\frac{\hbar}{2 \cdot N \cdot M \cdot \omega_{\sigma}(\bar{q})} \right) \cdot \bar{e}_{\bar{q}, \sigma} \cdot \left\{ \hat{b}_{\bar{q}, \sigma} \cdot e^{i(\bar{q} \cdot \bar{R}_l - \omega_{\sigma}(\bar{q})t)} + \hat{b}_{\bar{q}, \sigma}^{\dagger} \cdot e^{-i(\bar{q} \cdot \bar{R}_l - \omega_{\sigma}(\bar{q})t)} \right\} \quad (5-1-5)$$

另外, 根据普通的电磁场哈密顿的处理, 我们可以得到

$$H_R = \int \frac{1}{2} \cdot (\epsilon_0 \cdot \epsilon \cdot E_{\vec{k}}^2 + \mu_0 \cdot H_{\vec{k}}^2) \cdot dV \quad (5-1-6)$$

电磁场的二次量子化的结果是^[31]

$$\hat{H}_R = \sum_{\vec{k}} \hbar \cdot \omega_R(\vec{k}) \cdot \left(\hat{a}_{\vec{k}}^{\dagger} \cdot \hat{a}_{\vec{k}} + \frac{1}{2} \right) \quad (5-1-7)$$

电场可以用光子的产生湮灭算符表示出来

$$\bar{E} = \sum_{\vec{k}} i \cdot \left(\frac{\hbar \cdot \omega(\vec{k})}{2 \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon \cdot V} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \bar{e}_{\vec{k}} \cdot \left\{ \hat{a}_{\vec{k}} \cdot e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega(\vec{k})t)} - \hat{a}_{\vec{k}}^{\dagger} \cdot e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega(\vec{k})t)} \right\} \quad (5-1-8)$$

在此, 我们由压电效应而引入压电能

$$\Delta \psi = \sum_{l, l'} \sum_{\alpha, \beta} \psi_{\alpha\beta}(l-l') \cdot (u_l^{\alpha} - u_{l'}^{\alpha}) \cdot E^{\beta} \quad (5-1-9)$$

以上采用晶格点阵的形式给出压电能, 在长波近似的条件下, 我们可以对压电能进行连续化处理,

$$\begin{aligned} \Delta \psi &= \sum_{l, l'} \sum_{\alpha, \beta} \psi_{\alpha\beta}(l-l') \cdot (u_l^{\alpha} - u_{l'}^{\alpha}) \cdot E^{\beta} = \sum_{l, l'} \sum_{\alpha, \beta} \sum_{\mu} \psi_{\alpha\beta}(l-l') \cdot \frac{\partial u^{\alpha}}{\partial x_{\mu}} \cdot (\bar{R}_l - \bar{R}_{l'})_{\mu} \cdot E^{\beta} \\ &= \sum_l \sum_{\alpha, \beta, \mu} \left(\sum_{l'} \psi_{\alpha\beta}(l-l') \cdot (\bar{R}_l - \bar{R}_{l'})_{\mu} \right) \cdot \frac{\partial u^{\alpha}}{\partial x_{\mu}} \cdot E^{\beta} \end{aligned} \quad (5-1-10)$$

于是我们可以得到

$$\Delta \psi = \int dV \cdot \left(\sum_{\alpha, \beta, \mu} e_{\alpha\beta\mu} \cdot \frac{\partial u^{\alpha}}{\partial x_{\mu}} \cdot E^{\beta} \right) \quad (5-1-11)$$

其中压电系数

$$e_{\alpha\beta\mu} = \frac{1}{\Omega} \cdot \sum_{l'} \psi_{\alpha\beta}(l-l') \cdot (\bar{R}_l - \bar{R}_{l'})_{\mu} \quad (5-1-12)$$

将 (5-1-5)、(5-1-8) 代入 (5-1-11), 我们可以得到声子-电磁场压电相互作用算符

$$H_I = \int dV \cdot \left(\sum_{\alpha, \beta, \mu} \sum_{\bar{q}, \sigma} e_{\alpha\beta\mu} \cdot \left(\frac{\hbar^2 \cdot \omega(\bar{k})}{4 \cdot N \cdot M \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon \cdot V \cdot \omega_\sigma(\bar{q})} \right)^{1/2} \cdot q_\mu \cdot e_{\bar{q}, \alpha}^\alpha \cdot e_{\bar{k}}^\beta \cdot \right. \\ \left. (\hat{b}_{\bar{q}, \sigma} \cdot e^{i(\bar{q}\cdot\bar{r} - \omega_\sigma(\bar{q})t)} - \hat{b}_{\bar{q}, \sigma}^\dagger \cdot e^{-i(\bar{q}\cdot\bar{r} - \omega_\sigma(\bar{q})t)}) \cdot (\hat{a}_{\bar{k}} \cdot e^{i(\bar{k}\cdot\bar{r} - \omega(\bar{k})t)} - \hat{a}_{\bar{k}}^\dagger \cdot e^{-i(\bar{k}\cdot\bar{r} - \omega(\bar{k})t)}) \right) \quad (5-1-13)$$

在压电超晶格中，压电系数 $e_{\alpha\beta\mu}$ 是空间调制函数，对其做傅立叶变换

$$\tilde{e}_{\alpha\beta\mu}(\bar{G}) = \int dV \cdot e_{\alpha\beta\mu} \cdot e^{i\bar{G}\cdot\bar{r}} \quad (5-1-14)$$

考虑到波矢守恒 $\bar{q} = \bar{k} + \bar{G}$ ，我们可以得到

$$\hat{H}_I = \sum_{\bar{k}} g_{\bar{k}} \cdot (\hat{b}_{\bar{k}+\bar{G}, \sigma} \cdot \hat{a}_{\bar{k}}^\dagger \cdot e^{i\Delta\omega t} + \hat{b}_{\bar{k}+\bar{G}, \sigma}^\dagger \cdot \hat{a}_{\bar{k}} \cdot e^{-i\Delta\omega t}) \quad (5-1-15)$$

$$\text{其中 } g_{\bar{k}} = \sum_{\alpha, \beta, \mu} \tilde{e}_{\alpha\beta\mu}(\bar{G}) \cdot e_{\bar{k}+\bar{G}}^\alpha \cdot e_{\bar{k}}^\beta \cdot (k_\mu + G_\mu) \cdot \left(\frac{\hbar^2}{4 \cdot N \cdot M \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon \cdot V} \right)^{1/2}$$

这样压电超晶格中总哈密顿可以写成

$$\hat{H} = \sum_{\bar{k}} \left(\hbar \cdot \omega_{A, \sigma}(\bar{k}) \cdot \left(\hat{b}_{\bar{k}+\bar{G}, \sigma}^\dagger \cdot \hat{b}_{\bar{k}+\bar{G}, \sigma} + \frac{1}{2} \right) + \hbar \cdot \omega_B(\bar{k}) \cdot \left(\hat{a}_{\bar{k}}^\dagger \cdot \hat{a}_{\bar{k}} + \frac{1}{2} \right) + g_{\bar{k}} \cdot (\hat{b}_{\bar{k}+\bar{G}} \cdot \hat{a}_{\bar{k}}^\dagger + \hat{b}_{\bar{k}+\bar{G}}^\dagger \cdot \hat{a}_{\bar{k}}) \right) \quad (5-1-16)$$

为了简捷起见，我们将做如下简化处理： $\bar{k} \rightarrow k$ ， $\hat{a}_{\bar{k}} \rightarrow \hat{a}_k$ ， $\hat{b}_{\bar{k}+\bar{G}, \sigma} \rightarrow \hat{b}_k \cdot e^{i\Delta\omega t}$ ，

$\omega_{A, \sigma} \rightarrow \omega_A$ ，于是

$$\hat{H} = \sum_k \left(\hbar \cdot \omega_A(k) \cdot \left(\hat{b}_k^\dagger \cdot \hat{b}_k + \frac{1}{2} \right) + \hbar \cdot \omega_B(k) \cdot \left(\hat{a}_k^\dagger \cdot \hat{a}_k + \frac{1}{2} \right) + g_k \cdot (\hat{b}_k \cdot \hat{a}_k^\dagger + \hat{b}_k^\dagger \cdot \hat{a}_k) \right) \quad (5-1-17)$$

5-2 压电超晶格中哈密顿的对角化处理

为了将压电超晶格中总哈密顿对角化，我们采用如下变换，我们定义算符

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_k &= \cos \theta_k \cdot \hat{a}_k + \sin \theta_k \cdot \hat{b}_k \\ \hat{\alpha}_k^\dagger &= \cos \theta_k \cdot \hat{a}_k^\dagger + \sin \theta_k \cdot \hat{b}_k^\dagger \\ \hat{\beta}_k &= \sin \theta_k \cdot \hat{a}_k - \cos \theta_k \cdot \hat{b}_k \\ \hat{\beta}_k^\dagger &= \sin \theta_k \cdot \hat{a}_k^\dagger - \cos \theta_k \cdot \hat{b}_k^\dagger \end{aligned} \quad (5-2-1)$$

其中

$$\sin \theta_k = \frac{\tau_k}{\sqrt{1 + \tau_k^2}}, \quad \cos \theta_k = \frac{1}{\sqrt{1 + \tau_k^2}}, \quad (5-2-2)$$

$$\tau_k = \frac{1}{2 \cdot g_k} \cdot \left(-\hbar \cdot (\omega_R(k) - \omega_A(k)) + \sqrt{\hbar^2 \cdot (\omega_R(k) - \omega_A(k))^2 + 4 \cdot g_k^2} \right) \quad (5-2-3)$$

我们定义 $\hat{\alpha}_k^-$ 、 $\hat{\alpha}_k^+$ 、 $\hat{\beta}_k^-$ 、 $\hat{\beta}_k^+$ 满足下列对易关系

$$\begin{aligned} [\alpha_k, \alpha_{k'}^+] &= \delta_{k,k'}, \quad [\beta_k, \beta_{k'}^+] = \delta_{k,k'}, \quad [\alpha_k, \beta_{k'}] = 0, \quad [\alpha_k^+, \beta_{k'}] = 0, \\ [\alpha_k, \beta_{k'}^+] &= 0, \quad [\alpha_k^+, \beta_{k'}^+] = 0 \end{aligned} \quad (5-2-4)$$

我们可以由逆变换

$$\begin{aligned} \hat{a}_k &= \cos \theta_k \cdot \hat{\alpha}_k + \sin \theta_k \cdot \hat{\beta}_k \\ \hat{a}_k^+ &= \cos \theta_k \cdot \hat{\alpha}_k^+ + \sin \theta_k \cdot \hat{\beta}_k^+ \\ \hat{b}_k &= \sin \theta_k \cdot \hat{\alpha}_k - \cos \theta_k \cdot \hat{\beta}_k \\ \hat{b}_k^+ &= \sin \theta_k \cdot \hat{\alpha}_k^+ - \cos \theta_k \cdot \hat{\beta}_k^+ \end{aligned} \quad (5-2-5)$$

代入 (5-1-17)，最后得到对称形式的哈密顿

$$\hat{H} = \sum_k \left(\hbar \cdot \omega_\alpha(k) \cdot \left(\alpha_k^+ \cdot \alpha_k + \frac{1}{2} \right) + \hbar \cdot \omega_\beta(k) \cdot \left(\beta_k^+ \cdot \beta_k + \frac{1}{2} \right) \right) \quad (5-2-6)$$

其中

$$\begin{aligned} \hbar \cdot \omega_\alpha(k) &= \frac{\hbar}{2} \cdot (\omega_R(k) + \omega_A(k)) + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\hbar^2 \cdot (\omega_R(k) - \omega_A(k))^2 + 4 \cdot g_k^2} \\ \hbar \cdot \omega_\beta(k) &= \frac{\hbar}{2} \cdot (\omega_R(k) + \omega_A(k)) - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\hbar^2 \cdot (\omega_R(k) - \omega_A(k))^2 + 4 \cdot g_k^2} \end{aligned} \quad (5-2-7)$$

这样，在压电超晶格中，通过压电作用机制，一个光子与一个声子作用后形成两个新的元激发准粒子 $\alpha_k^+ \alpha_k$ 和 $\beta_k^+ \beta_k$ 。

在长波近似下，并且考虑到 $k \ll G$ ，我们有 $\omega_R = \frac{c}{\sqrt{\epsilon}} \cdot k$ ，

$\omega_A = V \cdot (k + G) \approx V \cdot G$ ， $g_k = \gamma \cdot (k + G) \approx \gamma \cdot G$ ，其中 c 是真空中光速， ϵ 是材料的介电系数， $V = \sqrt{Y/\rho}$ 是材料中声速。代入到 (5-2-7)，

$$\omega_\alpha(k) = \frac{1}{2} \cdot \left(\left(\frac{c}{\sqrt{\epsilon}} \cdot k + V \cdot G \right) + \sqrt{\left(\frac{c}{\sqrt{\epsilon}} \cdot k - V \cdot G \right)^2 + 4 \cdot \gamma^2 \cdot G^2 / \hbar^2} \right) \quad (5-2-8)$$

$$\omega_\beta(k) = \frac{1}{2} \cdot \left(\left(\frac{c}{\sqrt{\epsilon}} \cdot k + V \cdot G \right) - \sqrt{\left(\frac{c}{\sqrt{\epsilon}} \cdot k - V \cdot G \right)^2 + 4 \cdot \gamma^2 \cdot G^2 / \hbar^2} \right)$$

这样，我们得到长波近似下两个准粒子的能量色散性质，为了更加直观的表现出来，我们画出两个准粒子的能量色散曲线：

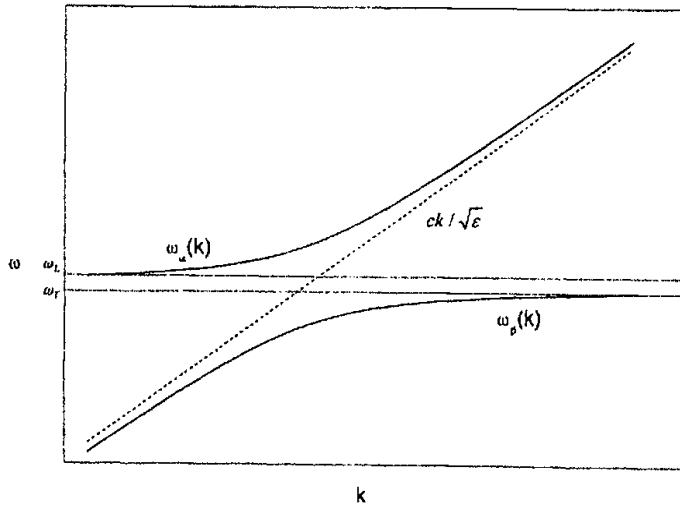


图 5-2 The dispersion curve of $\omega_\alpha(k)$ and $\omega_\beta(k)$

其中 $\omega_L = \frac{1}{2} \cdot \left(V \cdot G + \sqrt{(V \cdot G)^2 + 4 \cdot \gamma^2 \cdot G^2 / \hbar^2} \right)$, $\omega_T = V \cdot G$

5-3 压电超晶格中的纠缠态

现在，我们定义两个新粒子的本征态分别是 $|\xi_k^{(1)}\rangle$ 、 $|\xi_k^{(2)}\rangle$ ，那么

$$\hat{a}_k^+ \hat{a}_k |\xi_k^{(1)}\rangle = \xi_k^{(1)} |\xi_k^{(1)}\rangle \quad (5-3-1)$$

$$\hat{\beta}_k^+ \hat{\beta}_k |\xi_k^{(2)}\rangle = \xi_k^{(2)} |\xi_k^{(2)}\rangle \quad (5-3-2)$$

我们定义无互作用的光子和声子系统哈密顿是

$$\hat{H}_{0,k} = \hat{H}_{I,k} + \hat{H}_{R,k} \quad (5-3-3)$$

它的本征态是

$$|n, \nu\rangle = |n\rangle \otimes |\nu\rangle \quad (5-3-4)$$

其中 $|n\rangle$ 、 $|\nu\rangle$ 是纯光子态和纯声子态， $|n, \nu\rangle$ 是 $|n\rangle$ 和 $|\nu\rangle$ 直积表示。

于是我们有

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_k^+ \hat{\alpha}_k |n, \nu\rangle &= \left(\cos^2 \theta_k \cdot \hat{a}_k^+ \hat{a}_k + \sin^2 \theta_k \cdot \hat{b}_k^+ \hat{b}_k + \sin \theta_k \cdot \cos \theta_k \cdot (\hat{a}_k^+ \hat{b}_k + \hat{b}_k^+ \hat{a}_k) \right) |n, \nu\rangle \\ &= (\cos^2 \theta_k \cdot n + \sin^2 \theta_k \cdot \nu) |n, \nu\rangle + \sin \theta_k \cdot \cos \theta_k \cdot \sqrt{(n+1) \cdot \nu} |n+1, \nu-1\rangle \\ &\quad + \sin \theta_k \cdot \cos \theta_k \cdot \sqrt{n \cdot (\nu+1)} |n-1, \nu+1\rangle \end{aligned} \quad (5-3-5)$$

那么

$$\begin{aligned} \langle \nu, n | \hat{\alpha}_k^+ \hat{\alpha}_k | \xi_k^{(1)} \rangle &= \xi_k^{(1)} \cdot \langle \nu, n | \xi_k^{(1)} \rangle \\ &= (\cos^2 \theta_k \cdot n + \sin^2 \theta_k \cdot \nu) \cdot \langle \nu, n | \xi_k^{(1)} \rangle + \sin \theta_k \cdot \cos \theta_k \cdot \sqrt{(n+1) \cdot \nu} \langle \nu-1, n+1 | \xi_k^{(1)} \rangle \\ &\quad + \sin \theta_k \cdot \cos \theta_k \cdot \sqrt{n \cdot (\nu+1)} \langle \nu+1, n-1 | \xi_k^{(1)} \rangle \end{aligned} \quad (5-3-6)$$

在此，我们定义展开系数

$$c_{n,\nu}^{(1)} = \langle \nu, n | \xi_k^{(1)} \rangle \quad (5-3-7)$$

于是得到递推公式

$$\begin{aligned} &(\xi_k^{(1)} - \cos^2 \theta_k \cdot n - \sin^2 \theta_k \cdot \nu) \cdot c_{n,\nu}^{(1)} \\ &= \sin \theta_k \cdot \cos \theta_k \cdot \sqrt{(n+1) \cdot \nu} \cdot c_{n+1,\nu-1}^{(1)} + \sin \theta_k \cdot \cos \theta_k \cdot \sqrt{n \cdot (\nu+1)} \cdot c_{n-1,\nu+1}^{(1)} \end{aligned} \quad (5-3-8)$$

归一化条件是

$$\sum_{n,\nu} |c_{n,\nu}^{(1)}|^2 = 1 \quad (5-3-9)$$

根据递推公式和归一化条件，我们原则上可以计算得到所有的展开系数。这样，我们最后将新的原激发粒子 $\hat{\alpha}_k^+ \hat{\alpha}_k$ 的粒子数态矢展开成纯光子数空间和纯声子数空间的直积空间的态矢。对于另一个新的原激发粒子 $\hat{\beta}_k^+ \hat{\beta}_k$ ，我们可以做同样的处理。

现在我们考察单模入射光场情况下，光子与声子作用产生新的元激发准粒子的过程，这时，单模哈密顿写作

$$H_k = \hbar \cdot \omega_\alpha(k) \cdot \left(\hat{\alpha}_k^\dagger \hat{\alpha}_k + \frac{1}{2} \right) + \hbar \cdot \omega_\beta(k) \cdot \left(\hat{\beta}_k^\dagger \hat{\beta}_k + \frac{1}{2} \right) \quad (5-3-10)$$

我们定义新的元激发的单粒子态

$$|1\rangle = |\xi_k^{(1)} = 1\rangle, \quad |2\rangle = |\xi_k^{(2)} = 1\rangle \quad (5-3-11)$$

那么 H_k 的本征矢应该在两个元激发准粒子空间的直积空间中展开,

$$|\Psi\rangle = c_0|1,1\rangle + c_1|1,2\rangle + c_2|2,1\rangle + c_3|2,2\rangle \quad (5-3-12)$$

在光子与声子互相作用产生两个新粒子的过程中, 能量要保持守恒,

$$\hbar \cdot \omega_\alpha + \hbar \cdot \omega_\beta = \hbar \cdot \omega_R + \hbar \cdot \omega_A \quad (5-3-13)$$

这样新产生的两个元激发准粒子并不是独立的两个粒子, 它们是处于能量的量子关联的。在直积空间的四个基矢中, 满足能量守恒的是 $|1,2\rangle$ 和 $|2,1\rangle$ 。同时, 还考虑到新产生的元激发准粒子是全同的玻色子, 波函数应该满足交换对称性, 这样两个元激发准粒子系统的态矢可以表示成

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1,2\rangle + |2,1\rangle) \quad (5-3-14)$$

这就是关于两个元激发准粒子的纠缠态表示。

对于 2×2 量子体系 (两粒子、两个态), 如果系统的态矢是

$$|\Psi\rangle = c_0|1,1\rangle + c_1|1,2\rangle + c_2|2,1\rangle + c_3|2,2\rangle \quad (5-3-15)$$

系统的纠缠度被定义为^[1]

$$E(\Psi) = -\frac{1 + \sqrt{1 - \varepsilon}}{2} \cdot \log_2 \frac{1 + \sqrt{1 - \varepsilon}}{2} - \frac{1 - \sqrt{1 - \varepsilon}}{2} \cdot \log_2 \frac{1 - \sqrt{1 - \varepsilon}}{2} \quad (5-3-16)$$

其中 $\varepsilon = 4 \cdot |c_0 \cdot c_3 - c_1 \cdot c_2|$ 。

那么, 对于两个元激发粒子系统 $|\Psi\rangle = (|1,2\rangle + |2,1\rangle) / \sqrt{2}$, 其纠缠度可以计算得到 $E(\Psi) = 1$ 。其实, 我们在压电超晶格中得到的是纠缠度很高的 Bell 态。

参考文献

[1] Y. Y. Zhu, X. J. Zhang, Y. Q. Lu, Y. F. Cheng, S. N. Zhu and N. B. Ming, Phys.

Rev. Lett, 90, 053903 (2003)

[2] 李正中, 固体理论 (高度教育出版社, 北京, 1985)

[3] 喀兴林, 高等量子力学 (高度教育出版社, 北京, 1999)

[4] V. Vedral et al. Phys. Rev. Lett. 78, 2275 (1997)

致谢

在论文完成之际，谨向所有关心和帮助我顺利完成学业的人表示由衷的感谢。

首先要由衷地感谢祝世宁教授，他渊博的学识、敏锐的物理直觉、严谨求实地治学风格以及耐心细致地指导使我终身受益，同时，他在生活上的关心和帮助也使我体会到浓浓的师生情意。

我也要由衷感谢朱永远教授的指导和鼓励，他的宽厚人品和理论功底使我受益非浅。

其次，我还要感谢吕鹏老师在日常事务上对我的帮助。此外还有陈延峰、王慧田、何京良、王振林、吴军等老师从各方面给我的帮助。感谢系行政和总文的领导以及王南之、鞠燕老师对我的关怀和照顾。在论文期间，我还得到许多校外老师和同学的帮助，他们是香港浸会大学的谢国伟教授，广东工业大学的罗莉老师，北京物理所的许祖彦老师、梁晓艳老师、林学春同学等，在此一并向他们表示衷心的感谢。

最后，我还要感谢我的学友，他们是本实验室工作或曾经工作过的张超、刘照伟、陈延彬、魏洪、奚元新、罗国珍、杜燕、任铁未、陆宏、赵刚、李琨、张浩、王飞、王翔、徐平、王前进、张勇、高志达、胡小鹏、喻小强、季帅华、张学进、徐国定、王月花、宣晓峰等，还有其他实验室的廖军、张善涛、谭伟石同学等，他们都是积极进取，思想活跃，热爱生活，在与他们相处的日子里，我工作和生活上都受益非浅。

攻读博士学位期间已发表的论文和已申请的专利

Aperiodic Optical Superlattices Engineered for Optical Frequency Conversion

Appl. Phys. Lett., 2001, Vol.79, No.6, P728

H. Liu, Y. Y. Zhu, S. N. Zhu, N. B. Ming

Multiple Wavelength Second Harmonic Generation In Aperiodic Optical Superlattices

Appl. Phys. Lett., 2002, vol.81, No.18, P3326

H. Liu, S. N. Zhu, Y. Y. Zhu, N. B. Ming, X. C. Lin, W. J. Ling, A. Y. Yao and Z. Y. Xu

Negative Refraction Index in Piezoelectric-piezomagnetic Composite

Phy. Rev. Lett (submitted)

H. Liu, S. N. Zhu, Y. Y. Zhu and N. B. Ming

Generation of efficient quasi-cw green light by single-pass frequency doubling with a periodic LiTaO₃ optical superlattice

Material Letters 46 (5): 281-285 DEC 2000

H. Liu, X. Y. Liang, S. N. Zhu, Y. Y. Zhu, W. Hou, Z. Y. Xu, N. B. Ming

Efficient Continuous Wave Green Light Generation in a Periodically Poled LiTaO₃ Crystal by Single-Pass Frequency Doubling

Ferroelectrics, 2001, Vol.253, pp.255-261

H. Liu, X. Y. Liang, S. N. Zhu, Y. Y. Zhu, W. Hou, Z. Y. Xu, N. B. Ming

Nonlinear Optical Characterization of a Generation Fibonacci optical Superlattice

Journal of Nanjing University (Natural Science), 2000, Vol.36, No.1

H. Liu, Y. Q. Qin, Y. Y. Zhu, S. N. Zhu, N. B. Ming

Simultaneous generation of red, green, and blue quasi-continuous-wave coherent radiation based on multiple quasi-phase-matched interactions from a single, aperiodically-poled LiTaO₃

Appl. Phys. Lett. 82, 3159 (2003)

J. Liao, J. L. He, **H. Liu**, H. T. Wang, S. N. Zhu, Y. Y. Zhu and N. B. Ming

Simultaneous cw red, yellow, and green light generation, "traffic signal lights," by frequency doubling and sum-frequency mixing in an aperiodically poled LiTaO₃

Appl. Phys. Lett. 83, 228 (2003)

J. L. He, J. Liao, **H. Liu**, J. Du, F. Xu, H. T. Wang, S. N. Zhu, Y. Y. Zhu and N. B. Ming

The epitaxial growth of wurtzite ZnO films on LiNbO₃ (0001) substrates

JOURNAL OF CRYSTAL GROWTH 220 (3): 281-285 DEC 2000

J. Yin, Z. G. Liu, H. Liu, X. S. Wang, T. Zhu, J. M. Liu

A scheme to realize three-fundamental-colors laser based on quasi-phase matching

Solid state communications 119 (2001) 363-366

Z. W. Liu, S. N. Zhu, Y. Y. Zhu, H. Liu, Y. Q. Lu, H. T. Wang, N. B. Ming, X. Y. Liang, Z. Y. Xu

Red and Blue Light Generation in an LiTaO₃ Crystal with a Double Grating Domain Structure

Chinese Physics Letters vol.18 Number 4 April 2001

Z. W. Liu, S. N. Zhu, Y. Y. Zhu, H. T. Wang, G. Z. Luo, H. Liu, N. B. Ming, X. Y. Liang, Z. Y. Xu

发明专利:

一种普遍用于实现准位相匹配过程及相关非线性光学过程的非周期光学超晶格设计方案(申请号: 621383812)

刘辉, 祝世宁, 朱永远, 闵乃本