

中国科学院数学与系统科学研究院

博士学位论文

脉冲半动力系统及其在生物资源管理中的应用研究

姓名：唐三一

申请学位级别：博士

专业：基础数学

指导教师：陈兰荪

20030401

脉冲半动力系统及其在生物资源管理中的应用研究

唐三一

摘 要

脉冲微分方程不仅比相应的微分方程理论丰富,而且它更加精确和实际的刻画了许多自然现象.近年来,脉冲微分方程的稳定性理论得到了很好的发展.然而相应的定性理论,特别是状态依赖脉冲半动力系统的定性理论还处在其发展阶段.本文通过建立基于害虫综合管理(Integrated pest management or IPM)和渔业资源管理模型,研究了各种外在干扰、密度依赖的生育脉冲、阶段结构和季节收获等对系统动力学行为的影响.数学上我们结合离散动力系统、连续动力系统和脉冲动力系统的相关理论系统的研究了所提出模型的各种动力学行为,其中包括周期解的存在性和稳定性;正不变集和马蹄型吸引子的存在性以及系统的各种复杂现象.从生物的观点来看,我们的研究具有很强的生物背景,得到的理论结果具有很强的生物意义并能为实际生活提供很多决策依据.本文主要研究了基于IPM策略状态依赖自治脉冲微分系统、非自治固定时刻的脉冲微分系统、具生育脉冲的混杂矩阵模型、具季节收获和阶段结构的种群动力系统.

第二章分别研究了具固定时刻和状态依赖的综合害虫管理模型.对于固定时刻脉冲的综合害虫管理模型我们得到了系统害虫消除周期解的存在性和全局稳定性.对于状态依赖的脉冲微分系统,我们在害虫数量达到经济临界值(Economic threshold or ET)时综合利用生物的、化学的和机械的方法来长期控制害虫使之不超过经济危害水平.应用Poincaré映射、小参数法、LambertW函数以及后继函数的性质,首先得到了系统存在一个害虫数量最大值不超过给定ET的阶1周期解及其轨道渐近稳定性.其次,根据脉冲半动力系统的基本理论、连续动力系统中有关管和截痕的定义我们研究了模型的各种几何性质,证明了阶大于或等于3的周期解的不存在性和阶2周期解的存在性隐含阶1周期解的存在性;证明了系统各种正不变集和吸引子的存在性,特别是详细研究了多个马蹄型吸引子的存在性以及它们的内部结构,得到了马蹄吸引子内部可同时包含稳定阶1周期解和阶2周期解以及其它的解都将趋向马蹄吸引子内部的一个阶1周期解或阶2周期解的重要结论.最后,利用Lyapunov函数研究了系统最大不变集的存在性和阶1周期解的全局轨道渐近稳定性.得到的理论结果说明了我们可以通过一次脉冲、两次脉冲、至多有限次脉冲或一个周期性的脉冲控制就能完全控制害虫使之不超过经济临界值,这从理论上发展、完善和改进了IPM策略,为估计更加精确的经济临界值提供了很好的理论依据.这一章建立和采用的数学方法可以用来研究脉冲系统极限环和周期轨道的存在性及其稳定性.

第三章提出并系统地研究了具脉冲效应的周期Lotka-Volterra捕食-被捕食系统,分析了系统的各种正解的动力学行为.应用单调迭代技巧,得到了平凡周期解和半平凡周期解的全局稳定性条件和系统持续生存的充分条件.进一步利用

重合度理论、正解的大范围分歧理论我们讨论了系统内部周期解的存在性和稳定性。最后作为在生物害虫控制中应用，我们考虑了系统的一些特殊情况来说明理论结果的生物学暗指和相应的生物结论，并给出了相应的数值结果。

第四章我们研究一个从连续年龄结构模型推导出的混杂矩阵模型的动力学行为（其中连续的生殖策略被一个年度生育脉冲代替）。首先，对一般的 n - 维混杂矩阵模型，我们得到了其在生育脉冲时刻的频闪映射和解的正性。利用频闪映射的性质，我们详细的研究了如下两类二维混杂矩阵模型：一类是出生是密度依赖，而幼年到成年的成熟率以及种群的死亡率是常数；另一类是幼年到成年的成熟率是密度依赖的，而出生率和死亡率是常数。利用单参数族映射的中心流形定理、正规型和指数积分函数的性质，得到了具非线性出生率或具密度依赖成熟率的混杂矩阵模型正平衡态的存在性和稳定性、超临界分支以及各种复杂现象甚至混沌。进一步，我们研究了脉冲微分系统与相应的频闪映射之间的关系。最后，结合理论和数值方法我们讨论了脉冲系统周期解存在和稳定区域的大小随参数的改变，得到了生殖时滞对系统既具有稳定性的影响也具有不稳定性的影响。

第五章提出并研究了一个具季节收获和阶段结构的开发了的单种群模型。利用频闪映射的性质，我们详细研究了季节收获和生育脉冲对系统动力学行为的影响，其中包括：季节性对系统持久性的影响、成年种群存储量（其数量在生育脉冲发生后的瞬间测定）和最大年度持续产量的影响，并从理论上回答了为什么春禁有利于长江渔业资源的可持续发展。进一步，我们讨论了系统行为对收获时间及密度依赖的生育函数的敏感性，得到了成年存储量、总收获时间和收获努力量三者之间的关系。最后利用数值结果研究了系统的各种分支现象和复杂性，其中包括倍周期分支、切分支、混沌吸引子的突变和盆吸引子。总之，生育脉冲在对系统动力学行为的影响上提供了一个自然的周期而使得系统能从倍周期分支通向混沌。

关键词：脉冲半动力系统，状态依赖脉冲微分方程，频闪映射，周期解与稳定性，不变集与吸引子，复杂性。

Impulsive semi-dynamical systems with applications in biological resources management

Tang Sanyi(Pure Mathematics)

Directed by Professor Chen Lansun

Abstract

It is well-known that the theory of impulsive differential equations is not only richer than the corresponding theory of differential equations but also represents a more natural framework for mathematical modelling of many real world phenomena. Significant progress has been made in the stability theory of impulsive differential equations in recent years. However, the corresponding qualitative theory for impulsive semi-dynamical systems is still stage of its development. In this thesis we establish some population dynamical models concerning integrated pest management (or IPM) and fishery resources management, and study the effects of different kinds of social intervention, density-dependent birth pulse, stage structure and seasonal harvesting on dynamical behaviors. Mathematically I use a combined approach of discrete dynamics, continuous dynamics and impulsive dynamics to globally investigate dynamical behaviors including the existence and stability of periodic solutions, existence of positive invariant sets and horseshoe-type attractors and all kinds of complexities. From the biological point of view, the mathematical results are full of biological meanings and can be used to provide reliable decision proof.

In Chapter 2, the state-dependent impulsive systems concerning integrated pest management(IPM) are proposed and investigated. Firstly, we show that there exists an orbitally asymptotically stable periodic solution with a maximum value no larger than the given economic threshold(ET) and the complete expression of period of this periodic solution is given. Secondly, we prove that system can not exist periodic solution with order larger than or equal to three by using the properties of LambertW function and Poincaré map. Moreover, we show that the existence of order two periodic solution implies the existence of order one periodic solution. Thirdly, based on the impulsive semi-dynamical system, all kinds of positive invariant sets, attractors are discussed. In particular, several horseshoe-like attractors, whose interior can simultaneously contain stable order 1 periodic solution and order 2 periodic solution, are found. Further, the interior structure of the horseshoe-like attractors is discussed. Finally, the largest invariant set and the sufficiently conditions which guarantee the globally asymptotically stable of order 1 periodic solution in the meaningful domain for system are given by using the Lyapunov function. The mathematical methods developed here can be used to establish the existence and investigate the stability of limit cycles and periodic orbits of impulsive systems.

In Chapter 3, a classical periodic Lotka-Volterra predator-prey system with impulsive effects are investigated. We analyze the dynamics of positive solutions of such models. By using the monotone iterative technique we show that if some trivial or semi-trivial positive solution is linearly stable, then it is globally asymptotically stable with respect to the positive solutions. Further, by using the theory of coincidence degree, a set of sufficient conditions are derived for the existence of at least one strictly positive periodic solution. Finally, we use global bifurcation theorem to show the existence of coexistence states which arise near the semi-trivial periodic solution.

In Chapter 4, we deduce a hybrid matrix model from the classical age-structured McKendrick models for which births occur in a single pulse once per time period. By using the discrete dynamical system determined by the stroboscopic map we obtain an exact periodic solution of system with density-dependent fertility(or density dependent maturation rate) and obtain the threshold conditions for its stability. By using center manifold theorem and normal form of maps, we also present formal proofs of the supercritical flip bifurcation at the bifurcation point. Above this threshold, there is a characteristic sequence of bifurcations, leading to chaotic dynamics, which implies that the dynamical behavior of the single species model with birth pulses are very complex. Finally, we discuss the effects of generation delay on stability of positive equilibrium, i.e., the generation delay is found to act as both destabilizing and stabilizing effects.

In Chapter 5, we further propose a exploited single-species model based on Chapter 4. By using stroboscopic map we explore the consequences of harvest timing to equilibrium population sizes of discrete dynamical system under seasonal dependence and obtain the threshold conditions for their stability, and show that the timing of harvesting has a strong impact on the persistence of fish population, on the number of mature fish stock and on the maximum annual-sustainable yield. Further, the effects of harvesting effort and harvest timing on the dynamical complexity are also investigated. Bifurcation diagrams are constructed with the birth rate(or harvesting effort or harvest timing) as the bifurcation parameter, and these are observed to display rich structure, including chaotic bands with periodic windows, pitch-fork and tangent bifurcations, non-unique dynamics and attractor crisis. This suggests that birth pulse, in effect, provides a natural period or cyclicity that makes the dynamical behavior more complex.

Keywords: Impulsive semi-dynamical system, state-dependent impulsive differential equations, Stroboscopic map, Periodic solution and stability, Invariant set and attractor, Complexity.

第一章 引言与预备知识

在经典的微分方程理论中,系统本身的状态是依时间而连续的,但是,自然界的许多实际问题中常常出现不受系统本身控制的瞬间作用,改变系统的状态,如癌细胞的放疗和化疗、接种疫苗、投放天敌和喷洒农药杀死害虫或生态环境的剧变对种群的影响等等,都呈现一种瞬动的形态。脉冲微分方程对这些现象给出了一个自然的描述,但由于这种系统的状态出现跳跃,导致系统的解不连续,因而使得研究脉冲微分方程更加困难。

近年来,由于应用上的需要,脉冲微分系统研究不断深入(可参看 [8,9,70]),特别是脉冲微分方程的稳定性理论得到了很好的发展。然而相应的定性理论,特别是状态依赖脉冲半动力系统的定性理论还处在其发展阶段。一方面如何判断脉冲系统周期解或极限环的存在性和稳定性、不变集和吸引子的存在性以及相应吸引域的大小,都是十分困难的问题,目前关于这方面的理论工作非常少(可参看 [69,89])。另一方面,这些瞬间的作用可能导致系统的行为非常复杂,如何研究这些瞬间作用对系统复杂性的影响,近来也得到了重视(可参考 [94,100])。

因此本文的主要目的就是通过建立基于害虫综合管理(Integrated pest management or IPM)和具季节收获的渔业资源管理模型,寻求判别自治脉冲系统周期解的存在性和稳定性的方法,并研究各种脉冲效应、密度依赖的生育脉冲、阶段结构和季节收获等对系统动力学行为的影响,特别是对系统复杂性的影响。数学上我们结合离散动力系统、连续动力系统和脉冲动力系统的相关理论,特别是利用 Poincare 映射(或频闪映射)、Lambert W 函数和指数积分函数的性质系统的研究了所提出模型的各种动力学行为,其中包括周期解的存在性和稳定性;正不变集和马蹄型吸引子的存在性以及系统的各种复杂现象。文中建立和采用的新的数学方法可以用来研究脉冲系统极限环和周期轨道的存在性及其稳定性,得到的基本结果发展和补充了脉冲微分方程的定性理论。生物上一方面发展和改进了 IPM 策略,为估计更加精确的经济临界值提供了理论依据。另一方面我们从理论上回答了为什么春禁有利于长江渔业资源的可持续发展。

我们将在各章节详细介绍相应的生物背景、研究的意义和目的、前人研究的结果和我们取得的进展。下面我们给出研究中用到的基本定义和结论。

1.1 脉冲半动力系统

首先我们给出半动力系统的定义:

定义 1.1.1[45,46] 三元组 (X, Π, R_+) 称为一个半动力系统,如果 X 是一个度量空间, R_+ 是非负实数集,函数 $\Pi: X \times R_+ \rightarrow X$ 是一个连续的函数且满足:

- (i) 对所有 $z \in X$, $\Pi(z, 0) = z$;
(ii) 对所有 $z \in X$ 和 $t, s \in R_+$, 成立 $\Pi(\Pi(z, t), s) = \Pi(z, t + s)$.

对任意 $z \in X$, 函数 $\Pi_z(t) = \Pi(z, t)$ 是连续的, 并且我们称 Π_z 是过 z 的轨道. 集合

$$C^+(z) = \{\Pi(z, t) | t \in R_+\}$$

是通过 z 的正轨道. 对任意集合 $M \subset X$, 记 $M^+(z) = C^+(z) \cap M - \{z\}$.

定义 1.1.2[66] 一个脉冲半动力系统 $(X, \Pi; M, I)$ 是由一个连续半动力系统 (X, Π) 和一个度量空间 X 中非空闭子集 M 以及一个连续函数 $I: M \rightarrow X$ 构成, 并使得下面的性质成立:

对任意 $z \in M$ 存在一个 $\epsilon > 0$, 使得对所有满足不等式 $0 < |t| < \epsilon$ 的时间 t , 有 $\Pi(z, t) \notin M$.

下面我们记 $N = I(M)$, 对任意 $z \in M, I(z) = z^+$. 定义函数 Φ 从 X 到扩充了的正实数 $R_+ \cup \{\infty\}$ 如下: 设 $z \in X$, 如果 $M^+(z) = \emptyset$, 则 $\Phi(z) = \infty$; 否则 $M^+(z) \neq \emptyset$ 且记 $\Phi(z) = s$, 其中对所有的 $0 < t < s$, $\Pi(x, t) \notin M$, 但是 $\Pi(z, s) \in M$.

定义 1.1.3[66] 脉冲半动力系统 (X, Π, M, I) 中的一个轨道 Π_z 是具有周期 T_k 和阶 k 的周期解, 如果存在非负整数 $m \geq 0$ 和 $k \geq 1$ 使得 k 是使下式成立的最小整数, $z_m^+ = z_{m+k}^+$ 和 $T_k = \sum_{i=m}^{m+k-1} \Phi(z_i) = \sum_{i=m}^{m+k-1} s_i$.

为了方便, 我们称一个具有周期 T_k 和阶 k 的周期解为阶 k 的周期解, 并有如下的主要结论:

定理 1.1.1[66] 设 Π_z 是脉冲半动力系统 (X, Π, M, I) 中的一个无限轨道且集合

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} z_n^+ = F = [y_k : k = 1, 2, \dots, m, 1 < m < \infty].$$

假设对任何 $z_{nk}^+ \rightarrow y_k, \Phi(z_{nk}^+) \rightarrow \Phi(y_k)$ 和 $\{z_k^+\}$ 是序列紧的, 则对任意 $y \in F, \Pi_y$ 是一个阶为 m 和周期为 $\sum_{k=1}^m \Phi(y_k)$ 的周期解.

定理 1.1.1 中的主要结论用到了函数 Φ 的连续性, 因此下面我们给出函数 Φ 连续性的条件.

定义 1.1.4[66] 设 (X, Π, R) 是一个连续的动力系统. 空间 X 中的一个开集 V 被称为一个管, 如果存在一个 $\bar{t} > 0$ 和一个子集 $S \subset V$ 使得

- (i) 当 $z \in S$ 和 $-\bar{t} < t < \bar{t}$ 时 $\Pi(z, t) \in V$, 且
(ii) 对每一个 $z \in V$, 存在一个唯一的 $t(z)$, $|t(z)| < \bar{t}$ 使得 $\Pi(z, t(z)) \in S$.

明显的有 $V = [\Pi(z, t) : z \in S, -\bar{t} < t < \bar{t}]$. 集合 S 被称为管 V 的一个 (\bar{t}, V) - 截痕.

定义 1.1.5[66] 设 (X, Π, R) 是一个连续的动力系统. 一个子集 $M \subset X$ 称作在 X 中是好放置的, 如果对任意点 $z \in M$ 位于某个管中, 那它的截痕一定位于集合 M 中.

定理 1.1.2[66] 设 (X, Π, R) 是一个连续的动力系统, 且 M 是空间 X 中的一个闭的好放置的子集. 如果 (X, Π, M, I) 是一个脉冲半动力系统, 则函数 Φ 在 X 中是连续的.

有关连续半动力系统和脉冲半动力系统的进一步性质, 我们可以参看文献 [7-9, 45, 46, 66, 77].

1.2 具脉冲效应自治系统周期解的轨道稳定性

在我们的研究中用到如下几类脉冲微分方程:

- 固定时刻脉冲的脉冲微分方程:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(t, x), \quad t \neq \tau_k, \\ \Delta x &= I_k(x), \quad t = \tau_k, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (1.2.1)$$

其中 $t \in R$, $f: R \times \Omega \rightarrow R^n$, $I_k: \Omega \rightarrow R^n (k = 1, 2, \dots)$, Ω 是包含在 n -维 Euclidean 空间 R^n 中的一个集合.

- 状态依赖的自治脉冲微分方程:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= g(x), \quad x \notin M, \\ \Delta x &= I(x), \quad x \in M, \end{aligned} \quad (1.2.2)$$

其中 $t \in R$, $g, I: \Omega \rightarrow R^n$, Ω 是包含在 n -维 Euclidean 空间 R^n 中的一个集合, 且 $x = \text{col}(x_1, \dots, x_n)$, 内积 $(x, y) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$ 和泛数 $|x| = (x, x)^{1/2}$. M 是一个包含在集合 Ω 中的 $(n-1)$ -维的流形.

设 $\phi(t) (t \in R_+ = [0, \infty))$ 是方程 (1.2.2) 的一个解, 且脉冲时刻为 $\{\tau_k\}$

$$0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \tau_k = \infty$$

和

$$L = \{x \in R^n : x = \phi(t), t \in R_+\}.$$

定义 1.2.1[8,95] 系统 (1.2.2) 的解 $\phi(t)$ 是

(a) 轨道稳定的: 如果对每一个 $\epsilon > 0, \theta > 0$ 和 $t_0 \in R_+, |t_0 - \tau_k| > \theta$, 存在一个 $\delta > 0$ 使得当 $x_0 \in \Omega, x_0 \notin \bar{B}_\theta(\phi(\tau_k)) \cup \bar{B}_\theta(\phi(\tau^+))$ 时, 不等式 $\rho(x_0, L) < \delta$ 隐含对任意 $t \in J^+(t_0, x_0)$, 有 $\rho(x(t; t_0, x_0), L) < \epsilon$ 成立. 这里 $J^+(t_0, x_0)$ 表示解的存在最大区间.

(b) 轨道吸引的: 如果对每一个 $\epsilon > 0, \theta > 0$ 和 $t_0 \in R_+, |t_0 - \tau_k| > \theta$, 存在 λ 和 σ 使得 $\rho(x_0, L) < \lambda$, 且当 $x_0 \in \Omega, x_0 \notin \bar{B}_\theta(\phi(\tau_k)) \cup \bar{B}_\theta(\phi(\tau^+))$ 和 $t \geq t_0 + \sigma, t \in J^+(t_0, x_0), t_0 + \sigma \in J^+(t_0, x_0)$ 时有 $\rho(x(t; t_0, x_0), L) < \epsilon$ 成立.

(c) 轨道渐近稳定的: 如果它是轨道稳定的和轨道吸引的.

定义 1.2.1[8,95] 系统 (1.2.2) 的解 $\phi(t)$ 具有渐近相图的性质: 如果对任意 $\eta > 0$ 和 $t_0 \in R_+$, 满足 $|t_0 - \tau_k| > \eta$; 存在 $\lambda > 0$, 且对任意 $x_0 \in R^n$, 满足 $|x_0 - \phi(t_0)| < \lambda$ 和存在常数 $c \in R$, 对任意 $\rho > 0$, 存在 $\sigma > |c|$, 使得 $t_0 + \sigma \in J^+(t_0, x_0)$, 且对任意 $t \geq t_0 + \sigma, t \in J^+(t_0, x_0), |t_0 - \tau_k| > \eta$ 有

$$|x(t + c; t_0, x_0) - \phi(t)| < \rho.$$

• 具小参数的非线性自治脉冲微分方程:

考虑下面的自治脉冲微分方程:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x, \epsilon), \quad x \notin \sigma(\epsilon), \\ \Delta x &= I(x, \epsilon), \quad x \in \sigma(\epsilon) \end{aligned} \quad (1.2.3)$$

其中 $x \in R^n$, $\epsilon \in J = (-\bar{\epsilon}, \bar{\epsilon})$ 是一个小参数, 且对任一 $\epsilon \in J$ 集合 $\sigma(\epsilon)$ 是 R^n 空间中的一个超曲面.

假设超曲面 $\sigma(\epsilon)$ 是由方程 $\phi_k(x, \epsilon) = 0 (k = 1, 2, \dots, q)$ 确定的 q 个不相交的光滑超曲面组成. 当 $\epsilon = 0$ 时假设方程 (1.2.3) 有一个 T_0 的周期解 $x = \psi(t)$, 且相应的脉冲时刻 τ_k 满足:

$$\begin{aligned} \tau_{k+q} &= \tau_k + T_0, \quad k \in Z, \\ \phi_k(\psi(\tau_k)) &= 0, \quad k = 1, 2, \dots, q. \end{aligned}$$

在解 $x = \psi(t)$ 处系统 (1.2.3) 的变分方程为:

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial x}(\psi(t), 0)z, \quad t \neq \tau_k, \\ \Delta z &= N_k z, \quad t = \tau_k, \end{aligned} \quad (1.2.4)$$

其中

$$N_k = \frac{\partial I}{\partial x} + [f^+ - f - \frac{\partial I}{\partial x} f] \frac{\frac{\partial \phi}{\partial x}}{\frac{\partial \phi}{\partial x} f}$$

和

$$\begin{aligned} f &= f(\psi(\tau_k), 0), \quad f^+ = f(\psi(\tau_k^+), 0), \\ \frac{\partial I}{\partial x} &= \frac{\partial I}{\partial x}(\psi(\tau_k), 0), \quad \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial x}(\psi(\tau_k), 0). \end{aligned}$$

自治方程 (1.2.3) 的一个特点就是解 $\psi(t)$ 的导数 $\psi'(t)$ 是变分方程 (1.2.4) 的一个解. 实际上, 对 $t \neq \tau_k$ 我们有:

$$[\psi'(t)]' = [f(\psi(t), 0)]' = \frac{\partial f}{\partial x}(\psi(t), 0)\psi'(t)$$

和对 $t = \tau_k$ 我们有:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_k}{\partial x}(\psi(\tau_k), 0)\psi'(\tau_k) &= \frac{\partial \phi_k}{\partial x}(\psi(\tau_k), 0)f(\psi(\tau_k), 0), \\ N_k(\psi'(\tau_k)) &= f(\psi'(\tau_k), 0) - f(\psi(\tau_k), 0), \\ \Delta\psi'(\tau_k) &= \psi'(\tau_k^+) - \psi'(\tau_k) = f(\psi(\tau_k^+), 0) - f(\psi(\tau_k), 0) = N_k\psi'(\tau_k). \end{aligned}$$

如果 $\psi'(t) \neq 0$, 则 $\psi'(t)$ 是系统 (1.2.4) 的一个非零 T_0 -周期解, 且方程 (1.2.4) 有一个乘子为 1.

我们只考虑方程 (1.2.4) 有唯一一个非零的 T_0 -周期解 $\psi'(t)$ 的非临界情形, 即方程 (1.2.4) 有一个乘子为 1. 不失一般性, 我们假设 $\psi(0) \notin \sigma(0)$, 且记系统 (1.2.3) 过初值 $x(0, x_0, \epsilon) = x_0$ 的解为 $x(t, x_0, \epsilon)$. 对于系统 (1.2.3) 周期解的存在性, 我们有下面的主要结论 [8,9]:

定理 1.2.1 假设下面条件成立:

(a) 对 $\epsilon = 0$, 方程 (1.2.3) 有一个 T_0 周期解 $x = \psi(t)$, 且相应的脉冲时刻 τ_k 满足 $\tau_{k+q} = \tau_k + T_0 (k \in Z)$ 和 $\psi'(t) \neq 0 (t \in R)$;

(b) 对每一个 $k = 1, 2, \dots, q$, 函数 $\phi_k(x, \epsilon)$ 在点 $(\psi(\tau_k), 0)$ 的邻域是可微的且满足

$$\begin{aligned} \phi_k(\psi(\tau_k), 0) &= 0, \\ \frac{\partial \phi_k}{\partial x}(\psi(\tau_k), 0)f(\psi(\tau_k), 0) &\neq 0; \end{aligned}$$

(c) 存在 $\delta > 0$ 使得对每一 $\epsilon \in (-\delta, \delta)$ 和 $x_0 \in R^n$ 有 $|x_0 - \psi(0)| < \delta$, 方程 (1.2.3) 的解 $x(t, x_0, \epsilon)$ 在区间 $t \in [0, T_0 + \delta]$ 上有定义且关于参数 (t, x_0, ϵ) 是连续的, 在点 $(T_0, \psi(0), 0)$ 的邻域关于参数 x_0 是可微的;

(d) 变分方程 (1.2.4) 有唯一一个非零的 T_0 -周期解 $\psi'(t)$, 则存在 $\epsilon_0 \in (0, \bar{\epsilon})$ 使得对 $|\epsilon| \leq \epsilon_0$, 方程 (1.2.3) 有一个周期为 $T(\epsilon)$ 和脉冲时刻

为 $t_k(\epsilon)$ 的唯一周期解 $x_\epsilon(t)$, 且当 $t \in [0, T_0]$ 成立

$$x_\epsilon(t) \rightarrow \psi(t), \quad T(\epsilon) \rightarrow T_0, \quad t_k(\epsilon) \rightarrow \tau_k, \quad \epsilon \rightarrow 0. \quad (1.2.5)$$

特别的当 $n = 2$ 时, 我们有下面关于周期解轨道稳定和具有渐近相图的性质的结论:

定理 1.2.2[8] (相似的 Poincaré 准则) 如下系统的 T -周期解 $x = \xi(t), y = \eta(t)$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = P(x, y), & \frac{dy}{dt} = Q(x, y), & \text{if } \phi(x, y) \neq 0, \\ \Delta x = a(x, y), & \Delta y = b(x, y), & \text{if } \phi(x, y) = 0 \end{cases} \quad (1.2.6)$$

是轨道渐近稳定和具有渐近相图的性质的, 如果乘子 μ_2 满足条件 $|\mu_2| < 1$. 其中

$$\mu_2 = \prod_{k=1}^q \Delta_k \exp\left[\int_0^T \left(\frac{\partial p}{\partial x}(\xi(t), \eta(t)) + \frac{\partial Q}{\partial y}(\xi(t), \eta(t))\right) dt\right],$$

$$\Delta_k = \frac{P_+ \left(\frac{\partial b}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial b}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial x}\right) + Q_+ \left(\frac{\partial a}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{\partial a}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\right)}{P \frac{\partial \phi}{\partial x} + Q \frac{\partial \phi}{\partial y}},$$

和 $P, Q, \frac{\partial a}{\partial x}, \frac{\partial a}{\partial y}, \frac{\partial b}{\partial x}, \frac{\partial b}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}$ 为在点 $(\xi(\tau_k), \eta(\tau_k))$ 上的值, 且 $P_+ = P(\xi(\tau_k^+), \eta(\tau_k^+))$, $Q_+ = Q(\xi(\tau_k^+), \eta(\tau_k^+))$.

定理 1.2.3[26] 考虑非线性脉冲系统 (1.2.2), 假设 $\mathcal{D}_c \subset \Omega$ 是系统 (1.2.2) 的一个紧的正不变集, 且存在一个一阶连续可微的函数 $V: \mathcal{D}_c \rightarrow R$ 使得

$$\begin{aligned} V'(x)g(x) &\leq 0, \quad x \in \mathcal{D}_c, \quad x \notin M, \\ V(x + I(x)) - V(x) &\leq 0, \quad x \in \mathcal{D}_c, \quad x \in M. \end{aligned}$$

令

$$\mathcal{R} \triangleq \{x \in \mathcal{D}_c | x \notin M, V'(x)g(x) = 0\} \cup \{x \in \mathcal{D}_c | x \in M, V(x + I(x)) = V(x)\},$$

且令 \mathcal{D} 是包含在 \mathcal{R} 中的最大不变集. 如果初值 $x_0 \in \mathcal{D}_c$, 则当 $t \rightarrow \infty$ 时有 $\Pi_{x_0} \rightarrow \mathcal{D}$.

1.3 脉冲微分方程的比较定理及其解的紧性判别

设 $J \subset R$, 记 $PC(J, R)$ 是满足以下条件的函数集合: 函数 $\psi: J \rightarrow R$ 在 $t \in J, t \neq \tau_k$ 处连续, 点 $\tau_k \in J$ 是函数的第一类不连续点且在该点处的左极

限存在. 记 $PC'(J, R)$ 是满足 $\psi: J \rightarrow R$ 且导数 $\frac{d\psi}{dt} \in PC(J, R)$ 的函数集合. 在研究中我们需要用到由 T -周期函数构成的 Banach 空间 $PC_T = \{\psi \in PC([0, T], R) \mid \psi(0) = \psi(T)\}$ (其中 $\|\psi\|_{PC} = \sup\{|\psi(t)| : t \in [0, T]\}$) 和 $PC'_T = \{\psi \in PC'([0, T], R) \mid \psi(0) = \psi(T)\}$ (其中 $\|\psi\|_{PC'_T} = \max\{\|\psi\|_{PC_T}, \|\dot{\psi}\|_{PC_T}\}$). 给定序 Banach 空间 (E, PC) 的两点 $u_1, u_2 \in E$, 如果 $u_1 - u_2 \in PC$, 则 $u_1 \geq u_2$; 如果 $u_1 - u_2 \in PC \setminus \{0\}$, 则 $u_1 > u_2$; 如果 $u_1 - u_2 \in \text{int}PC$, 则 $u_1 \gg u_2$. 而且, 对任意 $y \in C_T$ (或 PC_T) 我们记

$$\bar{y} := \frac{1}{T} \int_0^T y, \quad y_L := \min_{t \in [0, T]} y(t), \quad y_M := \max_{t \in [0, T]} y(t).$$

其中 C_T 表示连续的 T 周期函数空间. 下面我们给出脉冲微分方程的比较定理和集合 $\mathcal{F} \subset PC_T$ 的紧性判别, 详细结论请参考文献 [8,70].

定理 1.3.1[8,70] 假设函数 $\omega \in PC'([0, \infty), R)$ 满足不等式

$$\begin{cases} \dot{\omega}(t) \leq f(t)\omega(t) + g(t), & t \neq \tau_k, t > 0, \\ \omega(\tau_k^+) \leq f_k\omega(\tau_k) + g_k, & t = \tau_k > 0, \\ \omega(0^+) \leq \omega_0. \end{cases} \quad (1.3.1)$$

其中 $f(t), g(t) \in PC([0, \infty), R)$, $f_k > 0, g_k$ 和 ω_0 是常数 ($k = 1, 2, \dots$). 则对 $t > 0$ 有

$$\begin{aligned} \omega(t) &\leq \omega(0) \prod_{0 < \tau_k < t} f_k \exp(\int_0^t f(s) ds) \\ &\quad + \int_0^t \prod_{s \leq \tau_k < t} f_k \exp(\int_s^t f(r) dr) g(s) ds \\ &\quad + \sum_{0 < \tau_k < t} \prod_{\tau_k \leq \tau_j < t} f_j \exp(\int_{\tau_k}^t f(s) ds) g_k. \end{aligned}$$

相似的如果不等式组 (1.3.1) 反向, 则对 $t > 0$ 我们有

$$\begin{aligned} \omega(t) &\geq \omega(0) \prod_{0 < \tau_k < t} f_k \exp(\int_0^t f(s) ds) \\ &\quad + \int_0^t \prod_{s \leq \tau_k < t} f_k \exp(\int_s^t f(r) dr) g(s) ds \\ &\quad + \sum_{0 < \tau_k < t} \prod_{\tau_k \leq \tau_j < t} f_j \exp(\int_{\tau_k}^t f(s) ds) g_k. \end{aligned}$$

定义 1.3.1[8,70] 集合 \mathcal{F} 在 $[0, T]$ 上是拟等度连续的, 如果对任意 $\epsilon > 0$ 存在 $\delta > 0$ 使得当 $x \in \mathcal{F}, k \in \mathbb{Z}_+, t_1, t_2 \in (\tau_{k-1}, \tau_k] \cap [0, T]$, 且 $|t_1 - t_2| < \delta$ 时, 成立

$$|x(t_1) - x(t_2)| < \epsilon.$$

下面的结论给出判别集合 PC_T 的相对紧性的一个充分必要条件:

定理 1.3.2[8,70] (紧性判别) 集合 $\mathcal{F} \subset PC_T$ 是相对紧的当且仅当

1. \mathcal{F} 是有界的, 即对每一 $x \in \mathcal{F}$ 和某些常数 $M > 0$, 有 $\|\psi\|_{PC_T} = \sup\{|\psi(t)| : t \in [0, T]\} \leq M$;
2. \mathcal{F} 在集合 $[0, T]$ 上是拟等度连续的.

1.4 重合度理论和分支定理

• 重合度理论

Mawhin 重合度理论中的连续定理在证明系统周期解的存在性中起到了非常重要的作用, 并得到了很好的应用. 在对脉冲系统的研究中, 我们也试图利用这一重要结论来研究脉冲系统周期解的存在性. 为此, 先叙述该结论, 该结论更详细的论述详见文献 [38].

设 X, Z 是实的 Banach 空间, $L : DomL \subset X \rightarrow Z$ 是线性映射, $N : X \rightarrow Z$ 是一个连续映射. 称映射 L 是一个指数为零的 Fredholm 算子如果 $dimKerL = codimImL < +\infty$ 和 ImL 在 Z 是闭的. 如果 L 是一个指数为零的 Fredholm 算子并且存在连续投影 $P : X \rightarrow X$ 和 $Q : Z \rightarrow Z$ 使得 $ImP = KerL, KerQ = ImL = Im(I - Q)$, 则 $L|_{DomL \cap KerP} : (I - P)X \rightarrow ImL$ 是可逆的, 记其逆映射为 K_p . 如果 Ω 是 X 中的一个开的有界子集, 映射 N 是一个关于 $\bar{\Omega}$ 的 L -紧的集合如果 $QN(\bar{\Omega})$ 是有界的和 $K_p(I - Q)N : \bar{\Omega} \rightarrow X$ 是紧的. 由于 ImQ 与 $KerL$ 是同构的, 则存在同构映射 $J : ImQ \rightarrow KerL$.

定理 1.4.1[38] 设 Ω 是一个有界开集, $N : X \rightarrow Z$ 是一个连续算子, 并设在 $\bar{\Omega}$ 上是 L -紧的. $L : DomL \subset X \rightarrow Z$ 是一个指数为零的 Fredholm 算子, 并满足如下条件:

- (a) 对任意 $\beta \in (0, 1)$, 方程 $Lx = \beta Nx$ 的解满足 $x \notin \partial\Omega$;
- (b) 对任意 $x \in \partial\Omega \cap KerL$, $QNx \neq 0$;
- (c) Brouwer 度 $deg\{JQN, \Omega \cap KerL, 0\} \neq 0$,

则算子方程 $Lx = Nx$ 在 $DomL \cap \bar{\Omega}$ 中至少有一解.

• 正解的大范围分歧定理

设 X 是实 Banach 空间, $K \subset X$ 是闭锥. 我们考虑方程

$$f(x, \lambda) = x - F(x, \lambda) = x - \lambda Ax - g(x, \lambda) = 0$$

的正解的分歧问题, 其中 $F : K \times R^+ \rightarrow K$ 全连续, $A : X \rightarrow X$ 是正的全连续线性算子, 并且当 $x \rightarrow 0$ 时, $\|g(x, \lambda)\| = o(\|x\|)$ 关于 λ 在 R^+ 中的有界集

上一致地成立. 称 $(0, \lambda_0)$ 为 $f(x, \lambda) = 0$ 的正解的歧点, 如果存在 (x_n, λ_n) 使得 $f(x_n, \lambda_n) = 0, x_n \in K \setminus \{0\}$, 并且 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, \lambda_n) = (0, \lambda_0)$.

定理 1.4.2[42,43] 设 X 是实 Banach 空间, $K \subset X$ 是闭锥, $f(x, \lambda) = x - F(x, \lambda) = x - \lambda Ax - g(x, \lambda)$ 满足:

(a) $F: K \times R^+ \rightarrow K$ 是全连续映射;

(b) $A: X \rightarrow X$ 是正的全连续线性算子, 并且限制在 K 上的全体特征值为 $\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}, \dots, \lambda_m^{-1}, m \geq 1$;

(c) 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\|g(x, \lambda)\| = o(\|x\|)$ 关于 λ 在 R^+ 中的有界集上一致地成立.

那么, 至少有一个 $(0, \lambda_i), 1 \leq i \leq m$ 是方程 $f(x, \lambda) = 0$ 的正解的歧点. 进一步, 如果记

$$\Omega = \{(x, \lambda) \in K \times R^+ | f(x, \lambda) = 0, \lambda > 0, x \in K \setminus \{0\}\},$$

则 $\bar{\Omega}$ 中包含该歧点的连通分支或者无限或者与 $(K \setminus \{0\}) \times \{0\}$ 相交.

• 映射的超临界分支

对于离散映射 $f: R^n \rightarrow R^n$ 的不动点 p , 这里有三种可能使之不再是双曲的: $Df(p)$ 有一个特征值 -1 ; 一个特征值 $+1$; 或者有一对共轭的复特征值 $\lambda, \bar{\lambda}$ 满足 $|\lambda| = 1$. 在特征值 $+1$ 处的分支理论完全相同与平衡态具有特征值 0 的分支理论, 当在 p 点具有一对共轭复特征值时的分支类似与 Hopf 分支, 而当特征值为 -1 时的分支为 flip 分支, 或倍周期分支. 利用中心流形定理, 我们容易得到如下关于特征值为 -1 时的超临界分支定理:

定理 1.4.3[45,46] 设 $f: R \rightarrow R$ 是一个单参数族映射, 且 (x_0, μ_0) 是映射 f_μ 的一个具特征值 -1 的不动点. 假设

$$(F1) \text{ 在点 } (x_0, \mu_0) \text{ 处, } \left(\frac{\partial f}{\partial \mu} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \mu}\right) = \frac{\partial f}{\partial \mu} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial f}{\partial x} - 1\right) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \mu} \neq 0;$$

$$(F2) \text{ 在点 } (x_0, \mu_0) \text{ 处, } a = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right) \neq 0.$$

则映射 f_μ 在点 (x_0, μ_0) 处的分支是一个超临界的倍周期分支.

1.5 两类特殊的函数及其性质, 持久性定义

在我们的研究中, 我们遇到了两类特殊的函数, 它们是 LambertW 函数和指数积分函数 Ei. 下面我们分别给出两类函数的定义以及将要用到的主要性质:

- LambertW 函数的定义及其主要性质:

定理 1.5.1[29] LambertW 函数定义为函数 $z \mapsto ze^z$ 的多值逆函数, 且满足关系:

$$\text{LambertW}(z)\exp(\text{LambertW}(z)) = z. \quad (1.5.1)$$

容易验证其导数满足:

$$\text{LambertW}'(z) = \frac{\text{LambertW}(z)}{z(1 + \text{LambertW}(z))}. \quad (1.5.2)$$

首先, 如果 $z > -1$, 函数 $z\exp(z)$ 有正的导数 $(z+1)\exp(z)$. 定义函数 $z\exp(z)$ 在区间 $[-1, \infty)$ 上的逆函数为 $\text{LambertW}(0, z) \triangleq \text{LambertW}(z)$. 相似的, 定义函数 $z\exp(z)$ 在区间 $(-\infty, -1]$ 上的逆函数为 $\text{LambertW}(-1, z)$. 由于我们研究的问题具有具体的生物背景, 因此对函数一个自然的限制就是我们只考虑定义在 $z \in [-\exp(-1), 0)$ 上的函数 $\text{LambertW}(0, z)$ 和 $\text{LambertW}(-1, z)$, 在后面的研究中我们会看到只一点. 关于 LambertW 函数更详细的定义和性质, 我们可以参看文献 [29].

• **指数积分函数 Ei 的定义及其性质:**

设 n 是一个非负整数, 指数积分函数 $Ei(n, x)$ 定义为

$$Ei(n, x) = \int_1^\infty \frac{\exp(-xt)}{t^n} dt, \quad \text{Re}(x) > 0, \quad (1.5.3)$$

且在复平面上是解析的.

记

$$H(x) = Ei(1, x) - Ei(1, px), \quad 0 < p < 1. \quad (1.5.4)$$

则我们有下面的结论:

定理 1.5.2[1] 函数 $Ei(1, x)$ 和 $H(x)$ 有下面的性质:

(i) 变元 n 为 1 的指数积分函数是一个 Cauchy 主值积分, 只对实的自变量 x 有定义, 即

$$Ei(x) = \int_{-\infty}^x \frac{\exp(t)}{t} dt$$

且对 $x < 0$, $Ei(x) = -Ei(1, -x)$;

(ii) 函数 $Ei(x)$ 的 Maclaurin 展式为

$$Ei(x) = \gamma + \ln(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{nn!}, \quad x > 0,$$

其中 γ =Euler 常数 [1];

(iii) $\lim_{x \rightarrow 0} H(x) = \ln(-p)$, 和对任意固定的 $p \in (0, 1]$, $\lim_{x \rightarrow \infty} H(x) = 0$;

(iv) $H'(x) = \frac{e^{-px} - e^{-x}}{x} > 0$ 和 $\ln(-p) \leq H(x) \leq 0$, 当 $x > 0$.

最后我们对常微分方程所描述的种群动力系统引入持续生存的几个概念。对于脉冲微分方程所描述的种群动力系统的相应概念类似给出。

对于种群动力系统

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1.5.5)$$

假定 f_i 在锥体

$$R_+^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) | x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n\}$$

上满足解的唯一性条件, 于是过任意点 $x_0 \in R_+^n$, 系统 (1.5.5) 都存在满足初始条件 $x(0) = x_0$ 的右行饱和解 $x = \psi(t, x_0) = (\psi_1(t, x_0), \psi_2(t, x_0), \dots, \psi_n(t, x_0))$, $t \in \mathcal{J}$, 这里 \mathcal{J} 表示解的存在最大区间。

为了叙述方便, 我们总假设解的存在区间为无穷大, 即 $\mathcal{J} = [0, \infty)$ 。

定义 1.5.1 若对任意 $x \in \text{int}R_+^n$ 和所有的 $i(1 \leq i \leq n)$ 有

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \psi_i(t, x) > 0,$$

则称系统 (1.5.5) 弱持续生存 (weak persistence);

若

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \psi_i(t, x) > 0,$$

则称系统 (1.5.5) 强持续生存 (strong persistence);

若

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \psi_i(s, x) ds > 0,$$

则称系统 (1.5.5) 平均持续生存 (persistence in mean);

若存在正数 δ (δ 与 x 无关), 使

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \psi_i(t, x) > \delta,$$

则称系统 (1.5.5) 一致持续生存 (uniform persistence);

若系统 (1.5.5) 一致持续生存, 并且它的所有解有界, 即存在 $0 < \varrho$ 使得

$$\delta \leq \liminf_{t \rightarrow \infty} \psi_i(t, x) \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \psi_i(t, x) \leq \varrho,$$

则称系统 (1.5.5) 永久持续生存 (permanence)。

第二章 基于 IPM 策略的状态依赖脉冲微分系统及其动力学性质

2.1 生物背景

在过去的二十年间,昆虫和其它节肢动物的控制变得更加的复杂。如何使有害昆虫和有害带菌者对重要的植物、动物和人类疾病造成最小的损失一直是昆虫学家和社会关心的问题。在害虫的有效控制过程中过多的利用单一的控制策略是不可取的,喷药防治农作物病虫害的目的是控制害虫种群数量,不致造成经济损失。如果见虫就喷药,想把害虫灭绝,可能带来不少的弊病。一是污染环境。二是浪费人力、物力和时间,增加防治成本。三是杀伤大量天敌,特别是对农药抵抗力差的弱小寄生蜂,杀伤力更大。往往在喷药防治某种主要害虫时,把次要害虫的天敌一起杀死了,使次要害虫猖獗起来,很快上升为主要害虫。四是使害虫产生抗药性,害虫变得更加难治。一般情况下,作物苗期 20% 叶片被害虫取食,也不会造成产量损失。只要害虫发生数量不太大,就没有必要喷药防治。在害虫危害阶段,只要消灭 75% - 85% 的害虫就可以了。这样做,还能将天敌数量维持在较高水平,有利于害虫生物防治。

害虫防治的另一个重要方法是生物防治,天敌助增(即天敌的人工繁殖和释放)是近年来备受重视的生物防治的一个领域。生物防治在有害生物的治理中有悠久的历史,并且因可避免使用化学药剂带来的问题而日益受到重视。“生物防治”一词的内涵有时非常广泛,包括所有生物有机体和以生物为基础的产品如性外激素、抗性植物品种和不育昆虫技术之类的自杀技术。但一般来讲,该术语的本来和常用含义仅指应用天敌来管理有害生物种群。生物防治已有许多成功的实例 [30],一些有害生物问题就是通过引进天敌并成功地建立种群而解决的。这些成功的引进项目一般都局限于某些特定类型生态系统或有害生物比(如多年生植物生态系统中的外来害虫)。这一方法也在某些短生育期作物的害虫防治中取得了成功。

在所有寻求替代单一化学防治措施中,综合害虫治理 (Integrated pest management or IPM) 概念作为一项综合性的有害生物治理途径是最引入注目的。IPM 历史悠久,定义繁多,内涵纷杂 [86-87]。最早是 Bartlett [12,13] 在 1956 年的“综合防治 (integrated pest control)”, Stern 等 [99] 在 1959 年作了进一步阐述。随后该术语扩展到包括所有生物的、栽培的和其他人为了措施的协调使用。最后在“IPM”的大名下,许多学者 [74] 提倡将所有有害生物的治理措施与生产目的全方位结合到一大系统途径 (total systems approach)。

早期的 IPM 倡导者构想了一个治理有害节肢动物、杂草和病原物的综合途径的框架,IPM 致力于用有害生物的自然死亡因子、害虫-捕食者(拟寄生者)

关系、遗传抗性和栽培措施等的生态学原理来管理有害生物。但正如上所述，IPM 在实际应用时往往被简单化为有害生物监测和杀虫剂的精确使用，通过建立经济阈值，在必要时用药和增加天敌。文献 [62] 中给出了 IPM 如下的定义：

综合害虫治理 (IPM) 是一套害虫治理系统，这个系统考虑到害虫的种群动态及其有关环境，利用所有适当的方法和技术以尽可能互相配合的方式，来维持害虫种群引起经济危害的水平。

从综合害虫治理的定义我们可以看出经济临界值 (Economic Threshold or ET) 是一个非常重要的概念 [99,100,105-107]。经济临界值通常定义为害虫的数量，即害虫数量到达该水平时我们必须采取控制措施来维持害虫数量而不超过经济危害的水平。而经济危害水平 (Economic Injury Level or EIL) 是能导致经济危害的最底害虫数量。因此，为了有效的控制害虫，我们必须在害虫数量未达到经济危害水平之前，采取有效的控制策略。所以，在实际的害虫控制中，经济临界值应小于经济危害水平，通常 $ET = 80\%EIL$ 。

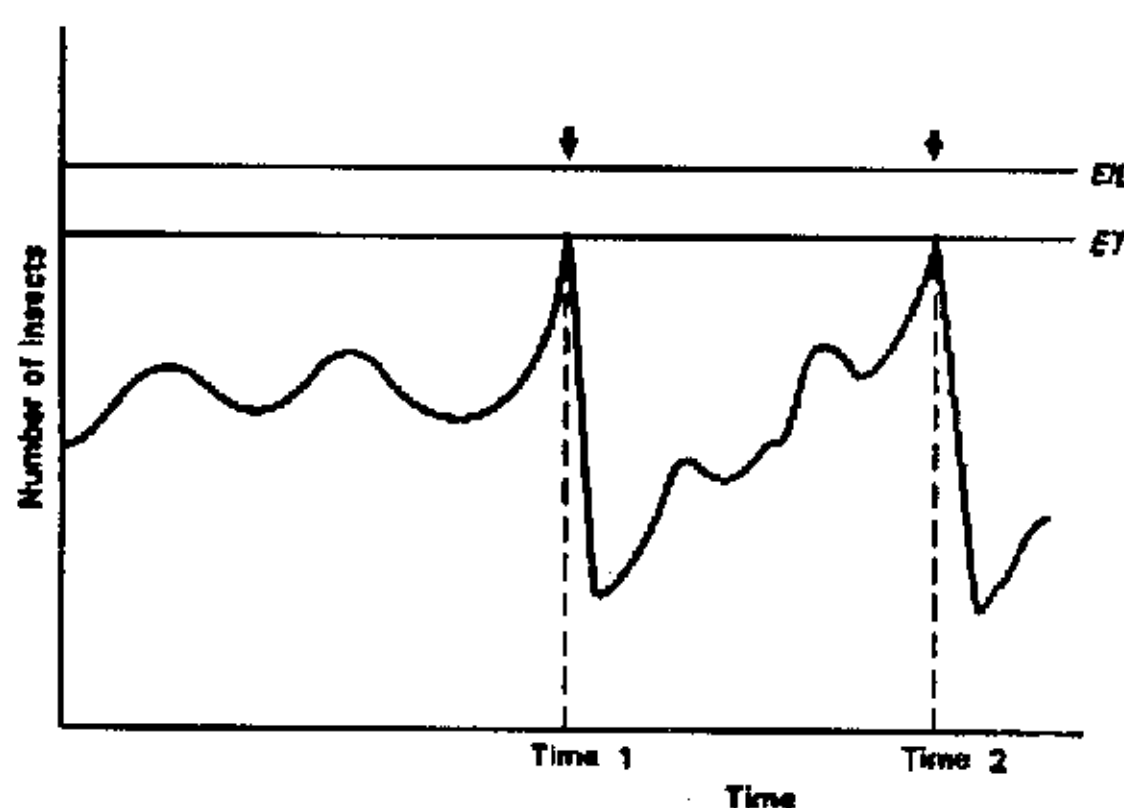


图 2.1.1：经济危害水平 (EIL) = 导致经济损害的最底害虫密度。经济临界值 (ET) = 为阻止害虫不超过经济危害水平而必需采取控制措施的害虫数量。箭头说明在该点必需采取综合害虫控制以防止害虫的数量超过经济临界值。

IPM 被实验证明是比任何一种经典的方法 (例如：化学控制，生物控制) 都更加有效 [105-107]。IPM 的进一步发展要求从理论上发展和改进 ET。到目前为止，这方面的理论工作还很少，特别是利用数学模型的方法和技巧来研究 IPM 策略；另一方面，很少的文章是关于脉冲动力系统的极限环、不变集和吸引子的存在性和稳定性研究的 [8,69,89,101]。因此，根据 IPM 策略的定义，我们首先构造了一类简单的具有固定时刻脉冲的综合害虫管理模型，研究了害虫根除周期解的存在性、全局稳定性和系统的复杂性。此外，我们构造了一类状态依赖的脉冲微分方程，即当害虫的数量达到 ET 时，实施一个综合控制策略 (例如：投放天敌、喷洒杀虫剂、捕获害虫等)，如图 2.1.1。

对于状态依赖的脉冲微分方程，一方面我们得到了系统存在一个最大值不超

过 ET 的轨道渐近稳定的周期解及其周期的解析表达式, 这说明我们能够通过一个周期的脉冲方案来控制害虫使其数量不超过 ET. 另一方面, 根据脉冲半动力系统的基本理论我们研究了模型的各种几何性质, 即系统的各种正不变集和吸引子的存在性. 特别的, 我们找到多个能同时包含稳定的阶 1 和阶 2 周期解的马蹄型吸引子, 既阶 1 和阶 2 周期解共存. 进一步我们研究了系统不可能存在阶大于和等于 3 的周期解, 阶 2 周期解的存在性隐含阶 1 周期解的存在性等一系列有意义的结果. 通过利用 Lyapunov 函数, 最后我们研究了系统的最大不变集的存在性和阶 1 周期解的全局稳定性.

我们得到的结果说明了状态依赖的脉冲系统具有丰富的动力学行为. 这一章建立和采用的数学方法可以用来研究脉冲系统极限环和周期轨道的存在性及其稳定性. 得到的生物结论说明了我们可以通过一次脉冲、两次脉冲、至多有限次脉冲或一个周期性的脉冲控制就能完全控制害虫使之不超过经济临界值. 这从理论上发展、完善和改进了 IPM 策略, 为估计更加精确的经济临界值提供了很好的理论依据.

2.2 Lotka-Volterra 系统及其解的一个重要性质

Volterra[109] 首次分析了两物种联结的简单食物链模型, 提出了下列简单的微分方程, 以描述食饵 - 捕食者系统.

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = x(t)(a - by(t)), \\ \frac{dy(t)}{dt} = y(t)(cx(t) - d), \end{cases} \quad (2.2.1)$$

其中 $x(t)$ 为在 t 时刻食饵种群的数量, $y(t)$ 为在 t 时刻捕食者种群的数量, a 是食饵在无捕食者存在的情况下的无限增长率, d 是捕食者的死亡率, b 和 c 都是常数, 分别表示食饵的损耗和捕食者的得利. 模型是以一系列简单的假设为基础的. 最重要的假设如下: (i) 食饵仅受到捕食者的限制, 在没有捕食者的情况下, 食饵种群将会无限制的增长; (ii) 捕食者对食饵的影响是与捕食者和食饵的数量成比例; (iii) 捕食者仅仅争夺食饵, 不存在其它的资源如空间资源; (iv) 种群的所有反应都是瞬时的, 模型不允许时滞, 即捕食者用于处理、摄取事物的时间不允许延迟.

我们知道系统 (2.2.1) 具有下面的性质:

- 具有两个平衡态, $O(0, 0)$ -鞍点, 和 $(x^*, y^*) = (\frac{d}{c}, \frac{a}{b})$ -稳定的中心;
- 从第一象限出发的任意轨道是一个包含平衡态 (x^*, y^*) 的一个闭轨道;
- 有一个首次积分

$$H(x, y) = by + cx - a \ln(y) - d \ln(x) + H_0,$$

其中

$$H_0 = a(\ln(\frac{a}{b}) - 1) + d(\ln(\frac{d}{c}) - 1).$$

下面的事实是显然的:

- (1) 对任何 $(x, y) > 0, (x, y) \neq (x^*, y^*)$ 有 $H(x, y) > 0$;
- (2) $H(x^*, y^*) = 0$;
- (3) 对每一个常数 $r > 0, \mathcal{D}_r = \{(x, y) \in R_+^2 : H(x, y) < r\}$ 是一个连通且具有光滑边界 $\partial\mathcal{D}_r = \Gamma_r = \{(x, y) \in R_+^2 : H(x, y) = r\}$ 的集合;
- (4) 如果 $0 < r_1 < r_2$, 则 $\Gamma_{r_1} \subset \mathcal{D}_{r_2}$.

首先我们给出系统 (2.2.1) 相轨线的一个有用的性质.

命题 2.2.1 图 2.2.1 中直线 l 通过点 (x^*, y^*) 平行与 x 轴. 在 l 上任取一点 P_0 , 作通过 P_0 且垂直与直线 l 的直线 l_1 . 在 l_1 上任选一点 P_1 使得线段 $|P_0P_1| = h > 0$, 且存在系统 (2.2.1) 通过 P_1 的唯一一条闭轨与直线 l_1 相交与另一点 P_2 , 则一定有 $|P_0P_1| = h \geq |P_0P_2|$. 其中 $|P_0P_1|$ 表示线段 $\overline{P_0P_1}$ 的长度.

证明 如图 2.2.1, 记点 P_0, P_1, P_2 的坐标分别为 $P_0(x, \frac{a}{b}), P_1(x, \frac{a}{b} + h)$ 和 $P_2(x, y_2)$. 明显有 $|P_0P_2| = \frac{a}{b} - y_2$. 如果 $\frac{a}{b} - y_2 < h$ 成立, 则命题的结论成立. 下面我们证明不等式 $\frac{a}{b} - y_2 < h$ 成立. 由于点 P_1, P_2 位于同一个闭轨上, 则 P_1, P_2 的坐标满足关系式

$$a \ln(\frac{y_2}{a/b+h}) - b(y_2 - \frac{a}{b} - h) = 0.$$

即

$$y_2 \exp(-\frac{b}{a}y_2) = \frac{a}{b}(1 + \frac{b}{a}h) \exp(-(1 + \frac{b}{a}h)), \quad (2.2.2)$$

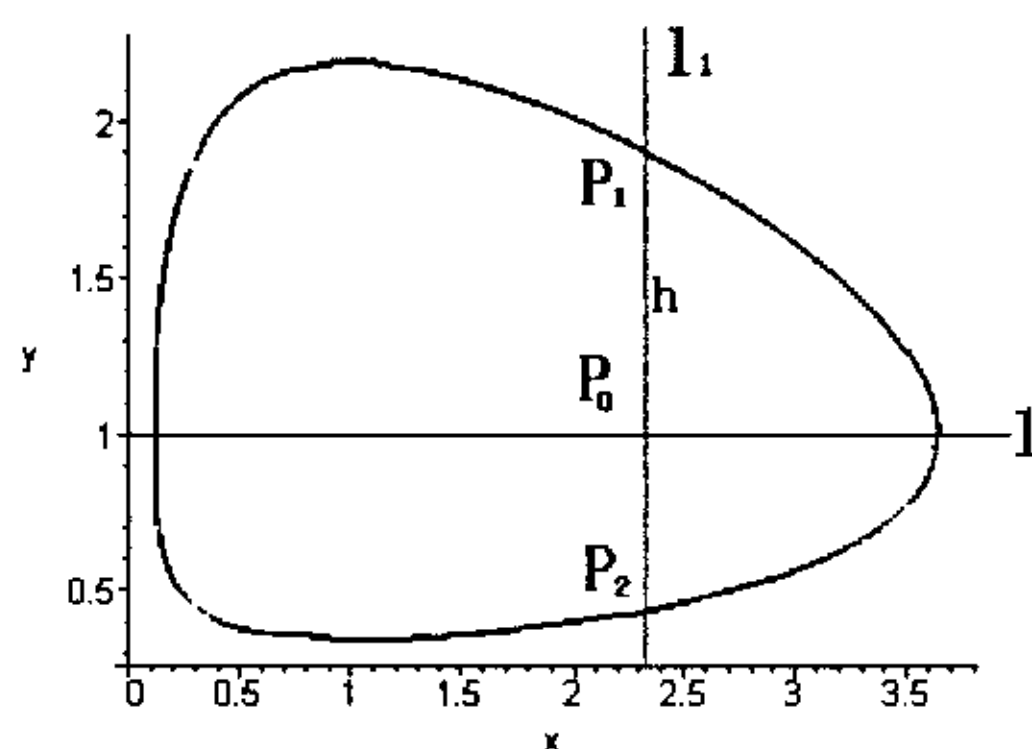


图 2.2.1: 示意图 $h = |P_0P_1| > |P_0P_2|$.

根据 LambertW 函数的定义和性质 (定理 1.5.1), 我们有

$$y_2 = -\frac{a}{b} \text{LambertW}\left(-\left(1 + \frac{b}{a}h\right)\exp\left(-\left(1 + \frac{b}{a}h\right)\right)\right). \quad (2.2.3)$$

容易知道 $-\left(1 + \frac{b}{a}h\right)\exp\left(-\left(1 + \frac{b}{a}h\right)\right) \in [-e^{-1}, 0)$. 因此

$$|P_0 P_2| = \frac{a}{b} - y_2 = \frac{a}{b} \left[1 + \text{LambertW}\left(-\left(1 + \frac{b}{a}h\right)\exp\left(-\left(1 + \frac{b}{a}h\right)\right)\right)\right]. \quad (2.2.4)$$

记

$$f(h) = -\text{LambertW}\left(-\left(1 + \frac{b}{a}h\right)\exp\left(-\left(1 + \frac{b}{a}h\right)\right)\right), \quad g(h) = 1 - \frac{b}{a}h,$$

则 $f(0) = g(0) = 1 > 0$. 由于

$$f'(h) = \frac{-\frac{b^2}{a^2}h f(h)\exp\left(-1 - \frac{b}{a}h\right)}{(1 - f(h))\left(1 + \frac{b}{a}h\right)\exp\left(-1 - \frac{b}{a}h\right)} < 0,$$

$\lim_{h \rightarrow 0^+} f'(h) = -\frac{b}{a}$ 和 $g'(0) = -\frac{b}{a}$, 则对所有 $h > 0$ 我们有 $f(h) > g(h)$. 因此命题 2.2.1 的结论成立. \square

2.3 基于 IPM 策略和固定时刻的脉冲系统

这一节我们考虑系统 (2.2.1) 具固定时刻综合害虫管理的数学模型, 即在固定时刻捕杀一定比例的害虫或喷洒杀虫剂杀死一定比例的害虫和周期投放一个常数的天敌来控制害虫. 则我们有下面固定时刻脉冲的脉冲微分方程:

$$\begin{cases} \left. \begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= x(t)(a - by(t)), \\ \frac{dy(t)}{dt} &= y(t)(cx(t) - d), \end{aligned} \right\} & t \neq nT, \\ \left. \begin{aligned} \Delta x(t) &= -px(t), \\ \Delta y(t) &= \tau, \end{aligned} \right\} & t = nT, \end{cases} \quad (2.3.1)$$

其中 $\Delta x(t) = x(t^+) - x(t)$, $\Delta y(t) = y(t^+) - y(t)$, T 是脉冲影响的周期.

首先, 我们给出下面子系统的一个基本性质.

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = -dy(t), & t \neq nT, \\ y(nT^+) = y(nT) + \tau, & t = nT, \\ y(0^+) = y_0 \end{cases} \quad (2.3.2)$$

引理 2.3.1 系统 (2.3.2) 有一个正的周期解 $y^*(t)$, 并且当 $t \rightarrow \infty$ 时其它的解 $y(t)$ 满足 $|y(t) - y^*(t)| \rightarrow 0$. 其中 $y^*(t) = \frac{\tau \exp(-d(t-nT))}{1 - \exp(-dT)}$, $t \in (nT, (n+1)T]$, $n \in \mathcal{N}$ 为正整数, $y^*(0^+) = \frac{\tau}{1 - \exp(-dT)}$.

我们容易直接通过积分方程 (2.3.2) 证明引理 2.3.1 的结论。因此, 我们得到系统 (2.3.1) 的害虫根除周期解具体的表达式为: 对 $t_0 = (n-1)T \leq t \leq nT$,

$$(0, y^*(t)) = \left(0, \frac{\tau \exp(-d(t-nT))}{1 - \exp(-dT)}\right), \quad (2.3.3)$$

并且有下面的主要结论。

定理 2.3.1 设 $(x(t), y(t))$ 是系统 (2.3.1) 的任意解, 则 $(0, y^*(t))$ 是全局渐近稳定的如果

$$T < \frac{1}{a} \ln\left(\frac{1}{1-p}\right) + \frac{b\tau}{ad} \triangleq T_{max}. \quad (2.3.4)$$

证明 首先, 我们证明局部稳定性。为此作变换 $x(t) = u(t), y(t) = y^*(t) + v(t)$, 系统 (2.3.1) 在相应变分方程处的解为:

$$\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \Phi(t) \begin{pmatrix} u(0) \\ v(0) \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t < T,$$

其中 Φ 满足

$$\frac{d\Phi}{dt} = \begin{pmatrix} a - by^*(t) & 0 \\ cy^*(t) & -d \end{pmatrix} \Phi(t)$$

和 $\Phi(0) = I$, I 是单位矩阵。系统 (2.3.1) 的第二个和第三个方程变为

$$\begin{pmatrix} u(nT^+) \\ v(nT^+) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(nT) \\ v(nT) \end{pmatrix}.$$

因此, 如果单值矩阵

$$M = \begin{pmatrix} 1-p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Phi(T)$$

的特征值的模小于 1, 则周期解 $(0, y^*(t))$ 是局部稳定的。实际上单值矩阵 M 的两个 Floquet 乘子是

$$\mu_1 = e^{-dT} < 1, \quad \mu_2 = (1-p) \exp\left(\int_0^T (a - by^*(t)) dt\right),$$

根据 Floquet 理论, 系统 (2.3.1) 的解是局部稳定的, 如果 $|\mu_2| < 1$, 即 $T < \frac{1}{a} \ln\left(\frac{1}{1-p}\right) + \frac{b\tau}{ad}$ 。

下面我们证明周期解 $(0, y^*(t))$ 的全局吸引性。取 $\epsilon > 0$ 使得

$$\delta \triangleq (1-p) \exp\left(\int_0^T (a - b(y^*(t) - \epsilon)) dt\right) < 1.$$

由于 $\frac{dy(t)}{dt} > -dy(t)$ ，我们考虑下面的脉冲微分方程：

$$\begin{cases} \frac{dz(t)}{dt} = -dz(t), & t \neq nT, \\ \Delta z(t) = \tau, & t = nT, \\ z(0^+) = y(0^+). \end{cases} \quad (2.3.5)$$

根据引理 2.3.1 和脉冲微分方程的比较定理 1.3.1，有 $y(t) \geq z(t)$ 和当 $t \rightarrow \infty$ 时 $z(t) \rightarrow y^*(t)$ 成立。因此对所有充分大的 t ，不等式

$$y(t) \geq z(t) > y^*(t) - \epsilon \quad (2.3.6)$$

成立。不仿假设 (2.3.6) 对所有 $t \geq 0$ 成立。由方程 (2.3.1) 我们得到

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} \leq x(t)(a - b(y^*(t) - \epsilon)), & t \neq nT, \\ x(nT^+) = (1 - p)x(nT), & t = nT. \end{cases} \quad (2.3.7)$$

又由定理 1.3.1 我们得到

$$\begin{aligned} x((n+1)T) &\leq x(nT^+) \exp\left(\int_{nT}^{(n+1)T} (a - b(y^*(t) - \epsilon)) dt\right) \\ &= x(nT)(1 - p) \exp\left(\int_{nT}^{(n+1)T} (a - b(y^*(t) - \epsilon)) dt\right). \end{aligned} \quad (2.3.8)$$

则 $x(nT) \leq x(0^+) \delta^n$ 且当 $n \rightarrow \infty$ 时 $x(nT) \rightarrow 0$ 。由于对任意 $nT < t \leq (n+1)T$ 有 $0 < x(t) \leq x(nT)(1 - p) \exp(aT)$ 。因此当 $n \rightarrow \infty$ 时 $x(t) \rightarrow 0$ 成立。□

图 2.3.1 给出了系统 (2.3.1) 害虫根除周期解的数值例子。从图上我们可以清楚的看出天敌 $y(t)$ 周期性的震动，而害虫 $x(t)$ 很快的趋向零。

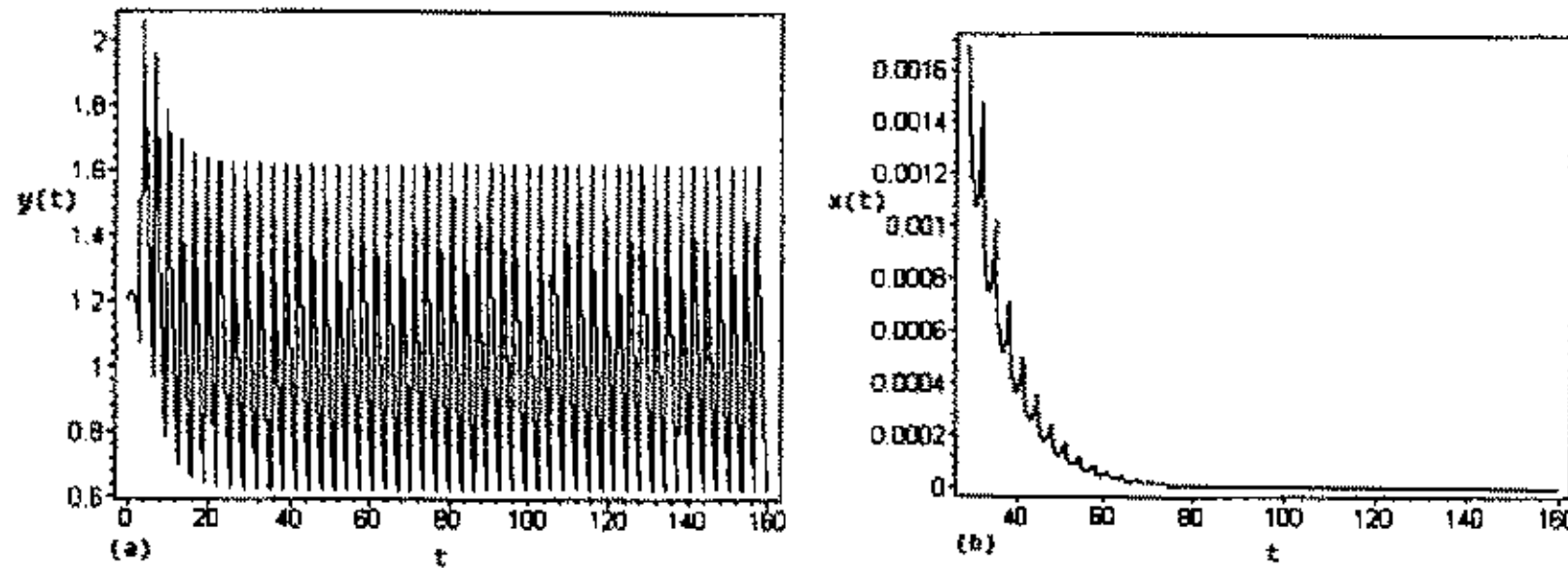


图 2.3.1: 系统 (2.3.1) 动力学行为, 其中 $a = b = 1, c = d = 0.3, p = 0.2, \tau = 1, T = 3.2$. (a) 天敌的周期变化, (b) 害虫随时间的变化而趋向零。

注记 2.3.1 如果脉冲周期 T 超过 T_{max} ，则害虫根除周期解变为不稳定，害虫数量 $x(t)$ 开始出现震动。如果周期 T 进一步增加，系统 (2.3.1) 出现周期

倍分的现象并最终出现混沌。图 2.3.2 给出了系统 (2.3.1) 的一个典型的混沌吸引子的数值结果。

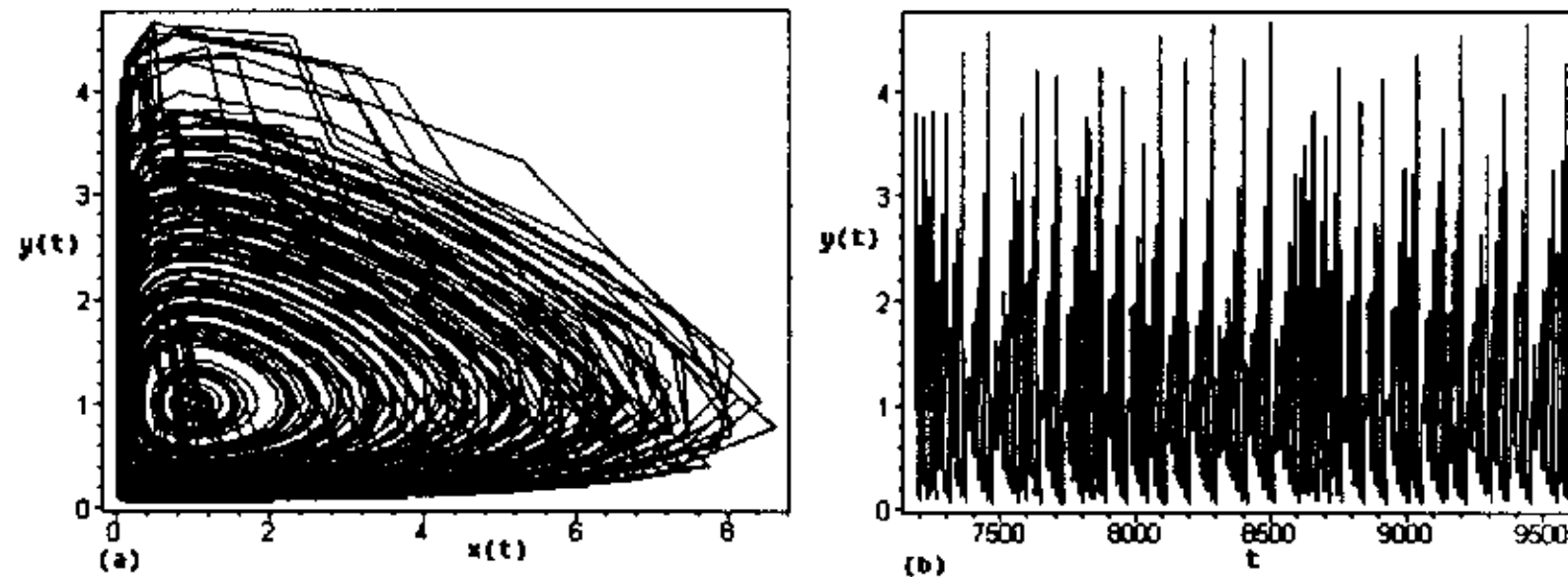


图 2.3.2: (a) 系统 (2.3.1) 的一个混沌吸引子, 其中 $a = b = 1, c = d = 0.3, p = 0.2, \tau = 1, T = 16$. (b) 天敌种群的混沌解.

在实际生活中, 完全的根除害虫是不可能的, 也不是生物和经济上所希望的。一个好的害虫控制程序应该控制害虫达到社会接受的水平。因此, 下面我们根据生态学家、昆虫学家提出综合害虫管理策略以及经济危害水平和经济临界值的观点, 利用一个新的模型来研究害虫的综合治理。

2.4 基于 IPM 策略和状态依赖的脉冲系统

综合害虫管理是一个综合利用生物的、化学的和机械的方法来长期控制害虫使之不超过经济危害水平。如图 2.1.1, 生物上一个非常有意义工作是当害虫数量达到 ET 时实施一个综合控制策略, 即同时利用天敌助增、喷洒杀虫剂和捕获害虫等方法来控制害虫。在实际生活中, 由于人类活动的不连续性, 脉冲微分方程能够考虑到各种可能的而使得种群数量发生突然的改变的外在影响。为此, 我们考虑下面的状态依赖的脉冲微分方程:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx(t)}{dt} = x(t)(a - by(t)), \\ \frac{dy(t)}{dt} = y(t)(cx(t) - d), \\ \Delta x(t) = -px(t), \\ \Delta y(t) = \tau, \\ x(0^+) = x_0^+ < ET, \quad y(0^+) = y_0^+, \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} x \neq ET, \\ x = ET, \end{array} \quad (2.4.1)$$

其中 $0 \leq p < 1$ 是当害虫数量达到 ET 时由于综合控制策略而减少的比率, $\tau \geq 0$ 是当害虫数量达到 ET 时由于综合控制策略而增加的天敌的数量。为了达到害虫控制的目的, 我们假设: 如果 $p = 0$, 则 $\tau \geq \frac{a}{b}$, 如果 $\tau = 0$ 则 $p > 0$ (从系统

(2.4.1) 的第一个方程我们看出当 $p = 0$ 时 $\tau \geq \frac{a}{b}$ 的假设是合理的。因为要控制害虫，我们总希望 $\frac{dy}{dt} \leq 0$ ，即要求 $y \geq \frac{a}{b}$ 。形如 (2.4.1) 的方程在应用科学中非常普遍。Bainov 和他的合作者在书 [8,9] 中给出了许多例子。近年来脉冲微分方程的 Lyapunov 稳定性理论得到了很好的发展 [10,59,70,95]。然而，脉冲微分方程的定性理论，特别是关于脉冲微分方程的定性理论，目前还处在开始发展的阶段。因此，本节的一个主要目的就是研究系统 (2.4.1) 的各种定性性质。其中包括：(a) 阶 1 周期解和阶 2 周期解的存在性以及它们的关系；(b) 不存在阶 $k(k \geq 3)$ 的周期解；(c) 正不变集、吸引子的存在性，特别是马蹄型吸引子的存在性以及它们的内部结构；(d) 最大不变集的存在性和稳定性以及阶 1 周期解的全局稳定性。

2.4.1 Poincaré 映射, 阶 $k(k = 1, 2)$ 周期解的存在性和稳定性

这一节我们研究阶 1 周期解和阶 2 周期解的存在性以及他们的关系，即阶 2 周期解的存在性隐含阶 1 周期解的存在性。

我们注意到系统 (2.4.1) 是一个脉冲半动力系统，其中记 $x_1 = ET$ ， $M = \{(x, y) \in R_+^2 | x = x_1, 0 \leq y \leq \frac{a}{b}\}$ 是 R_+^2 中的一个闭子集， $I : (x_1, y) \in M \rightarrow (x^+, y^+) = ((1-p)x_1, y + \tau) \in R_+^2$ 是连续函数，则 $N = I(M) = \{(x, y) \in R_+^2 | x = (1-p)x_1, \tau \leq y \leq \frac{a}{b} + \tau\}$ 。在下面的讨论中除非特别强调我们假设初始点 $(x_0^+, y_0^+) \in N$ 。

• Poincaré 映射和它的定义域

假设任何一个具初始条件 (x_0^+, y_0^+) 的解经历了 k 次脉冲 (k 是有限或是无限的)，记集合 M 中点的坐标为 $p_i = (x_1, y_i)$ ，其相应脉冲后的点的坐标为 $p_i^+ = ((1-p)x_1, y_i^+) \in N, i = 1, 2, \dots, k$ 。由于点 p_{i+1} 和 p_i^+ 位于同一条闭轨 Γ_i 上。因此， P_{i+1} 和 P_i^+ 的坐标满足关系

$$cp x_1 - d \ln\left(\frac{1}{1-p}\right) = a \ln\left(\frac{y_{i+1}}{y_i^+}\right) - b(y_{i+1} - y_i^+), \quad i = 0, 1, \dots, k,$$

即

$$-\frac{b}{a} y_{i+1} \exp\left(-\frac{b}{a} y_{i+1}\right) = -\frac{b}{a} y_i^+ \exp\left(-\frac{b}{a} y_i^+ + \frac{A}{a}\right), \quad i = 0, 1, \dots, k, \quad (2.4.2)$$

其中 $A = cp x_1 - d \ln\left(\frac{1}{1-p}\right)$ 。注意到所有的点 $p_i (i = 1, 2, \dots, k)$ 位于闭轨的下半支，根据 Lambert W 函数的性质，我们得到等式

$$y_{i+1} = -\frac{a}{b} \text{LambertW}\left(-\frac{b}{a} y_i^+ \exp\left(-\frac{b}{a} y_i^+ + \frac{A}{a}\right)\right), \quad i = 0, 1, \dots, k \quad (2.4.3)$$

和

$$y_{i+1}^+ = -\frac{a}{b} \text{LambertW}\left(-\frac{b}{a} y_i^+ \exp\left(-\frac{b}{a} y_i^+ + \frac{A}{a}\right)\right) + \tau \triangleq \mathcal{P}(y_i^+), \quad i = 0, 1, \dots, k. \quad (2.4.4)$$

如果 $A \leq 0$, 则对所有的 $y_i^+ \geq 0$ 方程 (2.4.3) 和 (2.4.4) 是好定义的。实际上, 如果我们记

$$f_1(z) = -\frac{b}{a} z \exp\left(-\frac{b}{a} z\right), \quad z \geq 0. \quad (2.4.5)$$

容易知道

$$f_1'(z) = \frac{b^2}{a^2} \exp\left(-\frac{b}{a} z\right) \left(z - \frac{a}{b}\right) \quad (2.4.6)$$

和函数 $f_1(z)$ 在 $z = \frac{a}{b}$ 处取到最小值 $-e^{-1}$ 。因此, 对所有的 $A \leq 0$ 和 $z > 0$, 有 $-\frac{b}{a} z \exp\left(-\frac{b}{a} z\right) \exp\left(\frac{A}{a}\right) \in [-e^{-1}, 0)$ 成立。

如果 $A > 0$, 要使方程 (2.4.3) 和 (2.4.4) 是好定义的, 我们要求

$$-\frac{b}{a} z \exp\left(-\frac{b}{a} z\right) \exp\left(\frac{A}{a}\right) \geq -e^{-1},$$

即

$$\frac{b}{a} z \exp\left(-\frac{b}{a} z\right) \leq \exp\left(-1 - \frac{A}{a}\right), \quad (2.4.7)$$

解不等式 (2.4.7), 我们得到 $z \in (0, Z_{\min}] \cup [Z_{\max}, \infty)$, 其中

$$Z_{\min} = -\frac{a}{b} \text{LambertW}\left(-e^{-1-\frac{A}{a}}\right), \quad Z_{\max} = -\frac{a}{b} \text{LambertW}\left(-1, -e^{-1-\frac{A}{a}}\right). \quad (2.4.8)$$

根据 LambertW 函数的定义和性质, 我们有

$$Z_{\min} < \frac{a}{b} < Z_{\max}. \quad (2.4.9)$$

因此, 我们得到系统 (2.4.1) 关于脉冲点的 Poincaré 映射

$$y_{i+1}^+ = \begin{cases} \mathcal{P}(y_i^+), & \tau \leq y_i^+ < \frac{a}{b} + \tau \quad \text{如果 } A \leq 0, \\ \mathcal{P}(y_i^+), & y_i^+ \in [\tau, Z_{\min}] \cup [Z_{\max}, \frac{a}{b} + \tau] \quad \text{如果 } A > 0. \end{cases} \quad (2.4.10)$$

• 阶 1 周期解的存在性和稳定性

关于阶 1 周期解的存在性和稳定性, 我们有下面的定理:

定理 2.4.1 如果 $\tau > 0$ 和 $x_1 < \frac{d}{cp} \ln\left(\frac{1}{1-p}\right) + \frac{b\tau}{cp}$, 则系统 (2.4.1) 有一个唯一的阶 1 周期解。

如果 $\tau = 0$ 和 $x_1 = \frac{d}{cp} \ln\left(\frac{1}{1-p}\right)$ 。则对任意 $0 < y_0^+ \leq \frac{a}{b}$, 系统 (2.4.1) 存在一个过初始 $\left(\frac{d(1-p)}{cp} \ln\left(\frac{1}{1-p}\right), y_0^+\right)$ 的阶 1 周期解。

证明 由 Poincaré 映射的定义, 系统 (2.4.1) 存在一个阶 1 周期解当且仅当 y_0^+ 是方程

$$y_0^+ = -\frac{a}{b} \text{LambertW}\left(-\frac{b}{a} y_0^+ \exp\left(-\frac{b}{a} y_0^+ + \frac{A}{a}\right)\right) + \tau \quad (2.4.11)$$

的解, 即

$$\text{LambertW}\left(-\frac{b}{a} y_0^+ \exp\left(-\frac{b}{a} y_0^+ + \frac{A}{a}\right)\right) = -\frac{b}{a} (y_0^+ - \tau). \quad (2.4.12)$$

由 LambertW 函数的定义有 $y_0^+ e^{\frac{A}{a}} = (y_0^+ - \tau) e^{\frac{b\tau}{a}}$, 即

$$y_0^+ = \frac{\tau}{1 - \exp\left(\frac{A}{a} - \frac{b\tau}{a}\right)} = \frac{\tau}{1 - (1-p)^{\frac{d}{a}} \exp\left(\frac{cp x_1}{a} - \frac{b\tau}{a}\right)}, \tau > 0 \quad (2.4.13)$$

是 (2.4.11) 唯一的解.

如果 $(1-p)^{\frac{d}{a}} \exp\left(\frac{cp x_1}{a} - \frac{b\tau}{a}\right) < 1$, 则 $y_0^+ > 0$. 即

$$x_1 < \frac{d}{cp} \ln\left(\frac{1}{1-p}\right) + \frac{b\tau}{cp}, \tau > 0. \quad (2.4.14)$$

如果 $\tau = 0$, 则我们有 $e^{\frac{A}{a}} = 1$, 即 $x_1 = \frac{d}{cp} \ln\left(\frac{1}{1-p}\right)$. 故结论成立. \square

下面我们记阶 1 周期解为 $(\xi(t), \eta(t))$, 则 $\xi(T) = x_1, \xi(0^+) = \xi_0 = (1-p)x_1, \eta(0^+) = \eta_0 = y_0^+$, 其中 y_0^+ 由 (2.4.13) 所定义. 根据轨道稳定和具有渐近相图的定义 1.2.1 和 1.2.2, 由定理 1.2.2 我们有下面的结论:

定理 2.4.2 如果 $\tau > 0$ 和 $x_1 < \frac{a}{cp} \ln(q(1-p)^{-\frac{d}{a}}) + \frac{b\tau}{cp} \triangleq ET_{max}$, 则阶 1 周期解是轨道稳定和具有渐近相图的性质, 其中 $q = 1 - \frac{2b\tau}{b\tau + a + \sqrt{b^2\tau^2 + a^2}}$.

证明 由定理 1.2.2, 我们可以计算系统在阶 1 周期解处的变分方程的乘子 μ_2 . 由于

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x} &= a - by, & \frac{\partial Q}{\partial y} &= cx - d, \\ \frac{\partial a}{\partial x} &= -p, & \frac{\partial a}{\partial y} &= 0, & \frac{\partial b}{\partial x} &= \frac{\partial b}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} &= 1, & \frac{\partial \phi}{\partial y} &= 0, \\ \Delta_1 &= \frac{P_+}{P} = \frac{\xi_0(a - b\eta_0)}{\xi_1(a - b\eta_1)}, \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned} \int_0^T \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right) dt &= \int_0^T [(a - b\eta(t)) + (c\xi(t) - a)] dt \\ &= \int_0^T \left(\frac{\dot{\xi}(t)}{\xi(t)} + \frac{\dot{\eta}(t)}{\eta(t)}\right) dt = \int_0^T d \ln(\xi(t)\eta(t)) \\ &= \ln\left(\frac{\xi_1\eta_1}{\xi_0\eta_0}\right). \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\mu_2 &= \Delta_1 \exp\left\{\int_0^T \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right) dt\right\} = \frac{\eta_1(a-b\eta_0)}{\eta_0(a-b\eta_1)} \\ &= \left(\frac{a-b\eta_0}{\eta_0}\right) / \left(\frac{a-b(\eta_0-\tau)}{\eta_0-\tau}\right).\end{aligned}\quad (2.4.15)$$

我们考虑下面三种情况:

情形 (1): 如果 $\eta_0 \leq a/b$, 则容易看出 $0 \leq \mu_2 < 1$;

情形 (2): 如果 $a - b\eta_0 < 0$ 和 $a - b(\eta_0 - \tau) > 0$ 成立, 则 $-1 < \mu_2 < 0$ 当且仅当

$$2b\eta_0^2 - 2\eta_0(b\tau + a) + a\tau < 0 \quad (2.4.16)$$

成立, 求解不等式 (2.4.16) 得

$$a/b < \eta_0 < \frac{b\tau + a + \sqrt{b^2\tau^2 + a^2}}{2b}. \quad (2.4.17)$$

情形 (3): 如果 $a - b(\eta_0 - \tau) \leq 0$, 则易知 $\mu_2 > 1$.

综合情形 (1)-(3) 和定理 1.2.2, 我们知道如果 $x_1 = ET < \frac{a}{cp} \ln(q(1-p)^{-\frac{a}{c}}) + \frac{b\tau}{cp}$. 则阶 1 周期解是轨道渐近稳定的且具有渐近相图的性质. \square

下面我们给出周期解 $(\xi(t), \eta(t))$ 的周期 T 的解析表达式. 由系统 (2.4.1) 的第一个方程我们有

$$dt = \frac{dx}{x(a - by(x))}, \quad (2.4.18)$$

并且我们可以利用关系式

$$c(x - \xi_0) - d \ln\left(\frac{x}{(1-p)x_1}\right) = a \ln\left(\frac{y}{\eta_0}\right) - b(y - \eta_0) \quad (2.4.19)$$

来确定 $y(x)$. 解 (2.4.19) 关于 y 的方程得到

$$y = h_k(x), \quad h_k(x) = -\frac{a}{b} \text{LambertW}\left(-k, -\frac{b}{a}\eta_0 e^{(A)}\right),$$

其中 $k = 0, 1$ 且

$$B = \frac{-cx_1(1-p) - d \ln\left(\frac{x}{(1-p)x_1}\right) + cx - b\eta_0}{a}. \quad (2.4.20)$$

对于周期解 $(\xi(t), \eta(t))$ 的周期 T 我们有下面的两种情况:

情形 (1): $a/b < \eta_0 < \frac{b\tau + a + \sqrt{b^2\tau^2 + a^2}}{2b}$, 则由 $y = h_0(x)$ 所确定的下支是从点 $(x_{\min}, \frac{a}{b})$ (记 $t = t|_{P_1}$) 到点 $(x_1, \eta_0 - \tau)$ (记 $t = t|_{P_2}$), 沿逆时针方向积分有

$$t|_{P_2} - t|_{P_1} = \int_{x_{\min}}^{x_1} \frac{dx}{x(a - bh_0(x))}, \quad (2.4.21)$$

由 $y = h_1(x)$ 所确定的上支是从点 $((1-p)x_1, \eta_0)$ (记 $t = t|_{P_3}$) 到点 $(x_{min}, \frac{a}{b})$ (记 $t = t|_{P_1}$)，沿逆时针方向积分有

$$t|_{P_1} - t|_{P_3} = \int_{(1-p)x_1}^{x_{min}} \frac{dx}{x(a - bh_1(x))}, \quad (2.4.22)$$

其中 x_{min} 是当 $y = \frac{a}{b}$ 时下面方程的最小的解:

$$c(x - (1-p)x_1) - d \ln\left(\frac{x}{(1-p)x_1}\right) = a \ln\left(\frac{a}{b\eta_0}\right) - b\left(\frac{a}{b} - \eta_0\right).$$

即

$$x_{min} = -\frac{d}{c} \text{LambertW}\left(-\frac{c}{d}x_1(1-p)\exp\left(-\frac{cx_1 - cp x_1 + a \ln\left(\frac{a}{b\eta_0}\right) - a + b\eta_0}{d}\right)\right).$$

因此阶 1 周期解的周期 T_1 的积分表达式是:

$$T_1 = \int_{x_{min}}^{x_1} \frac{dx}{x(a - bh_0(x))} - \int_{x_{min}}^{(1-p)x_1} \frac{dx}{x(a - bh_1(x))}. \quad (2.4.23)$$

情形 (2): $0 < \eta_0 \leq \frac{a}{b}$, 对这种情形我们只需考虑下支. 相似的, 阶 1 周期解的周期 T_1 的积分表达式是:

$$T_1 = \int_{(1-p)x_1}^{x_1} \frac{dx}{x(a - bh_0(x))}. \quad (2.4.24)$$

要使 (2.4.23) 和 (2.4.24) 有意义, 我们必需要求 $-e^{-1} \leq -\frac{b}{a}\eta_0 e^B$ 对所有的 $x \in [(1-p)x_1, x_1]$, $x \in [x_{min}, x_1]$ 和 $x \in [x_{min}, (1-p)x_1]$ 都成立.

实际上, $-\frac{b}{a}\eta_0 e^B < 0$ 是明显的, 而 $-e^{-1} \leq -\frac{b}{a}\eta_0 e^A$ 等价于

$$f(x) \triangleq \frac{d}{a} \ln\left(\frac{x}{(1-p)x_1}\right) - \frac{c}{a}x + \frac{c}{a}(1-p)x_1 + \frac{b}{a}\eta_0 - 1 - \ln\left(\frac{b}{a}\right) \geq 0. \quad (2.4.25)$$

容易知道函数 $f(x)$ 在 $x = \frac{c}{d}$ 处有一个唯一的最大值.

因此, 为了证明 $f(x) \geq 0$ 对所有的 $x \in [(1-p)x_1, x_1]$, $x \in [x_{min}, x_1]$ 和 $x \in [x_{min}, (1-p)x_1]$ 成立, 我们只需证明 $f(x_1) \geq 0$, $f((1-p)x_1) \geq 0$ 和 $f(x_{min}) \geq 0$.

容易知道 $f(x_{min}) = 0$ 和

$$f((1-p)x_1) = \frac{b}{a}\eta_0 - \ln\left(\frac{b}{a}\eta_0\right) - 1 \geq 0.$$

由于

$$f(x_1) = \frac{d}{a} \ln\left(\frac{1}{1-p}\right) - \frac{cp}{a}x_1 + \frac{b}{a}\eta_0 - \ln(b\eta_0/a) - 1. \quad (2.4.26)$$

利用 (2.4.13) 我们有

$$\frac{cp x_1}{a} = \ln\left(1 - \frac{\tau}{\eta_0}\right) - \frac{d}{a} \ln(1-p) + \frac{b\tau}{a}$$

成立, 这说明

$$f(x_1) = \ln\left(\frac{a}{b(\eta_0 - \tau)}\right) + \frac{b}{a}(\eta_0 - \tau) - 1.$$

因此容易证明 $f(x_1) = \ln\left(\frac{a}{b(\eta_0 - \tau)}\right) + \frac{b}{a}(\eta_0 - \tau) - 1 \geq 0$. 综上所述, 我们有下面的结论:

定理 2.4.3 如果 $\eta_0 > \frac{a}{b}$, 则阶 1 周期解的周期 T_1 为

$$T_1 = \int_{x_{\min}}^{x_1} \frac{dx}{x(a - bh_0(x))} - \int_{x_{\min}}^{(1-p)x_1} \frac{dx}{x(a - bh_1(x))}. \quad (2.4.27)$$

如果 $0 < \eta_0 \leq \frac{a}{b}$, 则阶 1 周期解的周期为

$$T_1 = \int_{(1-p)x_1}^{x_1} \frac{dx}{x(a - bh_0(x))}. \quad (2.4.28)$$

例 2.4.1: 如果我们取 $a = b = 1, c = d = 0.3, \tau = 1, p = 0.2$ 和给定经济临界值 $ET = 2.4$, 则图 2.4.1(a) 给出了相应的阶 1 周期解. 根据 (2.4.27) 我们计算周期 $T_1 \approx 10.9$. 图 2.4.1(b) 说明了害虫的数量始终小于给定的经济临界值 $ET = 2.4$.

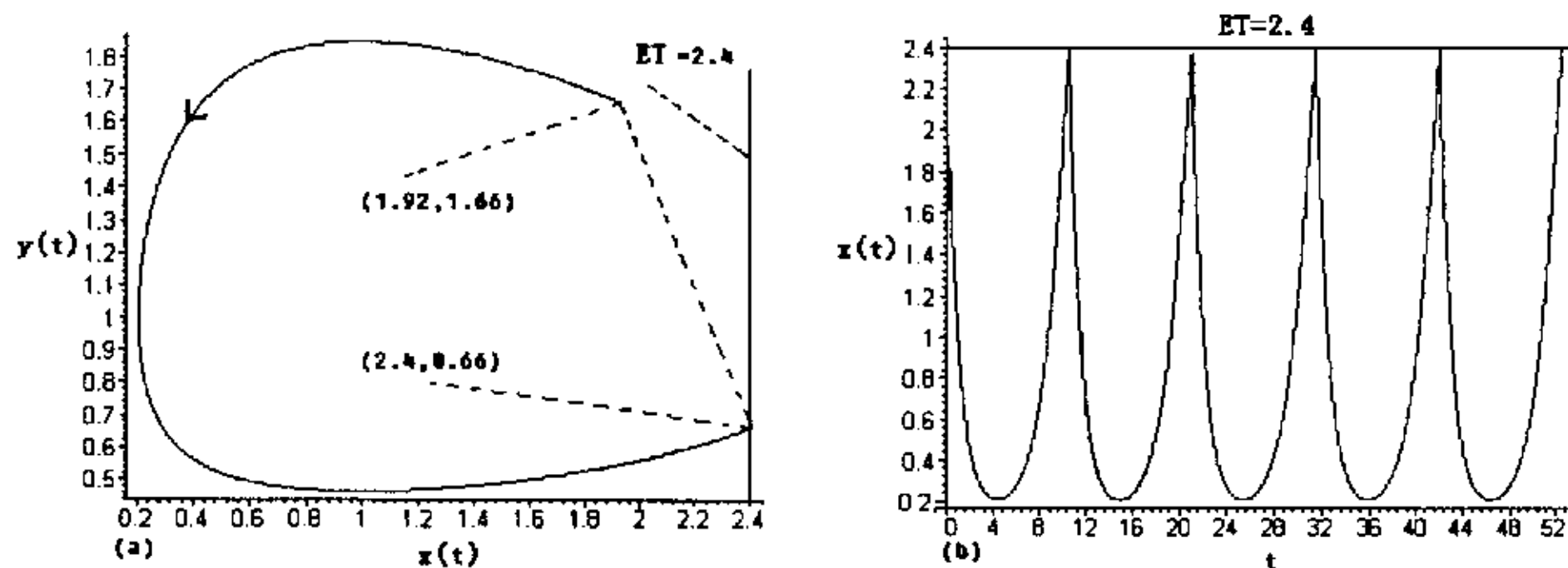


图 2.4.1: (a) 轨道渐近稳定的周期解, 其初值为 $(x_0^+, y_0^+) = (1.92, 1.66)$. (b) 害虫种群随时间的变化图.

比较图 2.1.1 和图 2.4.1 我们看出: 图 2.1.1 是生物学家从生产实际和害虫综合治理的要求提出来的. 它说明了当害虫数量达到经济临界值时, 为了控制害虫使其不达到经济危害的水平, 我们必需采取综合控制策略. 这样害虫数量将会出

现近似周期的波动。图 2.4.1 是根据我们建立的数学模型得到的数值结果，它与图 2.1.1 是一致的。这说明了我们的模型对害虫的控制的预测、管理以及提供更加精确的经济临界都是有用的，也是有实际意义的。

• 特殊情况下阶 2 周期解的存在性和稳定性

由 Poincaré 映射的定义，系统 (2.4.1) 存在阶 2 周期解当且仅当 (y_0^+, y_1^+) 是下面方程组的解

$$\begin{aligned} y_0^+ &= -\frac{a}{b} \text{LambertW}\left(-\frac{b}{a} y_1^+ \exp\left(-\frac{b}{a} y_1^+ + \frac{A}{a}\right)\right) + \tau, \\ y_1^+ &= -\frac{a}{b} \text{LambertW}\left(-\frac{b}{a} y_0^+ \exp\left(-\frac{b}{a} y_0^+ + \frac{A}{a}\right)\right) + \tau \end{aligned} \quad (2.4.29)$$

且 $y_0^+ \neq y_1^+$ 。即

$$\begin{aligned} y_1^+ \exp\left(-\frac{b}{a} y_1^+ + \frac{A}{a}\right) &= (y_0^+ - \tau) \exp\left(-\frac{b}{a} (y_0^+ - \tau)\right), \\ y_0^+ \exp\left(-\frac{b}{a} y_0^+ + \frac{A}{a}\right) &= (y_1^+ - \tau) \exp\left(-\frac{b}{a} (y_1^+ - \tau)\right). \end{aligned} \quad (2.4.30)$$

方程 (2.4.30) 不能直接求解，但我们可以通过下面的例子说明解是有可能存在的。如果我们取 $a = 1, b = 1, c = 0.3, d = 0.3, x_1 = 2.4, p = 0.2, \tau = 1$ 。通过数值计算我们得到了一个具初始 $y_0^+ \approx 1.448$ 或 2.04 的阶 2 周期解。如图 2.4.2，其中 $T_2 = s_1 + s_2 = 11.1 + 10.78 = 21.88$ 。

下面我们就一种特殊情况给出阶 2 周期解的存在性和稳定性。也就是令 $p = 0$ 和 $\tau \geq \frac{a}{b}$ ，则 $A = cpx_1 - d \ln\left(\frac{1}{1-p}\right) = 0$ 。方程 (2.4.30) 变为

$$\begin{aligned} y_1^+ \exp\left(-\frac{b}{a} y_1^+\right) &= (y_0^+ - \tau) \exp\left(-\frac{b}{a} (y_0^+ - \tau)\right), \\ y_0^+ \exp\left(-\frac{b}{a} y_0^+\right) &= (y_1^+ - \tau) \exp\left(-\frac{b}{a} (y_1^+ - \tau)\right). \end{aligned} \quad (2.4.31)$$

容易知道 $y_1^+ = y_0^+ - \tau$ 是方程组 (2.4.31) 第一个方程的一个特解， $y_0^+ = y_1^+ - \tau$ 是方程组 (2.4.31) 第二个方程的一个特解。把 $y_1^+ = y_0^+ - \tau$ 代入方程组 (2.4.31) 第二个方程，我们得到方程组 (2.4.31) 的一个特解

$$(y_0^+, y_1^+) = \left(\frac{2\tau \exp\left(\frac{2b\tau}{a}\right)}{\exp\left(\frac{2b\tau}{a}\right) - 1}, \frac{2\tau \exp\left(\frac{2b\tau}{a}\right)}{\exp\left(\frac{2b\tau}{a}\right) - 1} - \tau \right), \quad (2.4.32)$$

并且满足 $y_0^+ \neq y_1^+$ 。因此，当 $p = 0$ 和 $\tau \geq \frac{a}{b}$ 时系统 (2.4.1) 存在一个阶 2 周期解，其初始值为 $(x_0^+, y_0^+) = \left((1-p)x_1, \frac{2\tau \exp\left(\frac{2b\tau}{a}\right)}{\exp\left(\frac{2b\tau}{a}\right) - 1} \right)$ 。

相似的，把 $y_0^+ = y_1^+ - \tau$ 代入方程组 (2.4.31) 第一个方程，我们得到方程组 (2.4.31) 的另一个特解

$$(y_0^+, y_1^+) = \left(\frac{2\tau \exp\left(\frac{2b\tau}{a}\right)}{\exp\left(\frac{2b\tau}{a}\right) - 1} - \tau, \frac{2\tau \exp\left(\frac{2b\tau}{a}\right)}{\exp\left(\frac{2b\tau}{a}\right) - 1} \right), \quad (2.4.33)$$

并且满足 $y_0^+ \neq y_1^+$, 因此, 当 $p = 0$ 和 $\tau \geq \frac{a}{b}$ 时系统 (2.4.1) 也存在一个阶 2 周期解, 其初始值为 $(x_0^+, y_0^+) = ((1-p)x_1, \frac{2\tau \exp(\frac{2b\tau}{a})}{\exp(\frac{2b\tau}{a})-1} - \tau)$. 实际上这两个周期解是同一个阶 2 周期解, 只是从不同的初始出发而已, 记为 Π^2 .

另一方面我们注意到当 $p = 0$ 时, 阶一周解是自然存在的, 且初始值为 $(x_0^+, y_0^+) = ((1-p)x_1, \frac{\tau}{1-\exp(-\frac{b}{a}\tau)})$, 记为 Π^1 .

容易证明下面不等式

$$\frac{2\tau \exp(\frac{2b\tau}{a})}{\exp(\frac{2b\tau}{a})-1} - \tau < \frac{\tau}{1-\exp(-\frac{b}{a}\tau)} < \frac{2\tau \exp(\frac{2b\tau}{a})}{\exp(\frac{2b\tau}{a})-1} \quad (2.4.34)$$

成立, 这说明阶 1 周期解位于阶 2 周期解的内部 (下面几节我们将证明一个一般性的结论) 且阶 1 周期解和阶 2 周期解共存.

对于 Π^1 和 Π^2 的稳定性, 由定理 1.2.2 我们只需分别计算周期解 Π^1 和 Π^2 的特征乘子 μ_2^1 和 μ_2^2 , 即

$$\mu_2^1 = \frac{a(1-\exp(-\frac{b}{a}\tau)) - b\tau}{a(\exp(\frac{b}{a}\tau) - 1) - b\tau}, \quad \mu_2^2 = \frac{a(1-\exp(-\frac{2b}{a}\tau)) - 2b\tau}{a(\exp(\frac{2b}{a}\tau) - 1) - 2b\tau}. \quad (2.4.35)$$

容易证明下面的不等式

$$a(1 - e^{(-\frac{b}{a}\tau)}) < b\tau < a(e^{(\frac{b}{a}\tau)} - 1), \quad a(1 - e^{(-\frac{2b}{a}\tau)}) < 2b\tau < a(e^{(\frac{2b}{a}\tau)} - 1) \quad (2.4.36)$$

成立. 这说明如果不等式

$$a(1 - e^{(-\frac{b}{a}\tau)}) \leq b\tau < \frac{a}{2} \exp(\frac{b\tau}{a})(1 - \exp(-\frac{2b\tau}{a})) \quad (2.4.37)$$

成立, 则 Π^1 是轨道渐近稳定的; 如果不等式

$$\frac{a}{2}(1 - e^{(-\frac{2b}{a}\tau)}) \leq b\tau < \frac{a}{4} \exp(\frac{2b\tau}{a})(1 - \exp(-\frac{4b\tau}{a})) \quad (2.4.38)$$

成立, 则 Π^2 是轨道渐近稳定的. 从 (2.4.36) 和 (2.4.38), 我们容易得到不等式

$$\frac{a}{2}(1 - e^{(-\frac{2b}{a}\tau)}) < a(1 - e^{(-\frac{b}{a}\tau)}) < \frac{a}{4} \exp(\frac{2b\tau}{a})(1 - \exp(-\frac{4b\tau}{a})), \quad (2.4.39)$$

由于 $\frac{a}{4} \exp(\frac{2b\tau}{a})(1 - \exp(-\frac{4b\tau}{a})) - \frac{a}{2} \exp(\frac{b\tau}{a})(1 - \exp(-\frac{2b\tau}{a}))$ 的符号是不确定的, 因此 Π^1 和 Π^2 可能同时稳定.

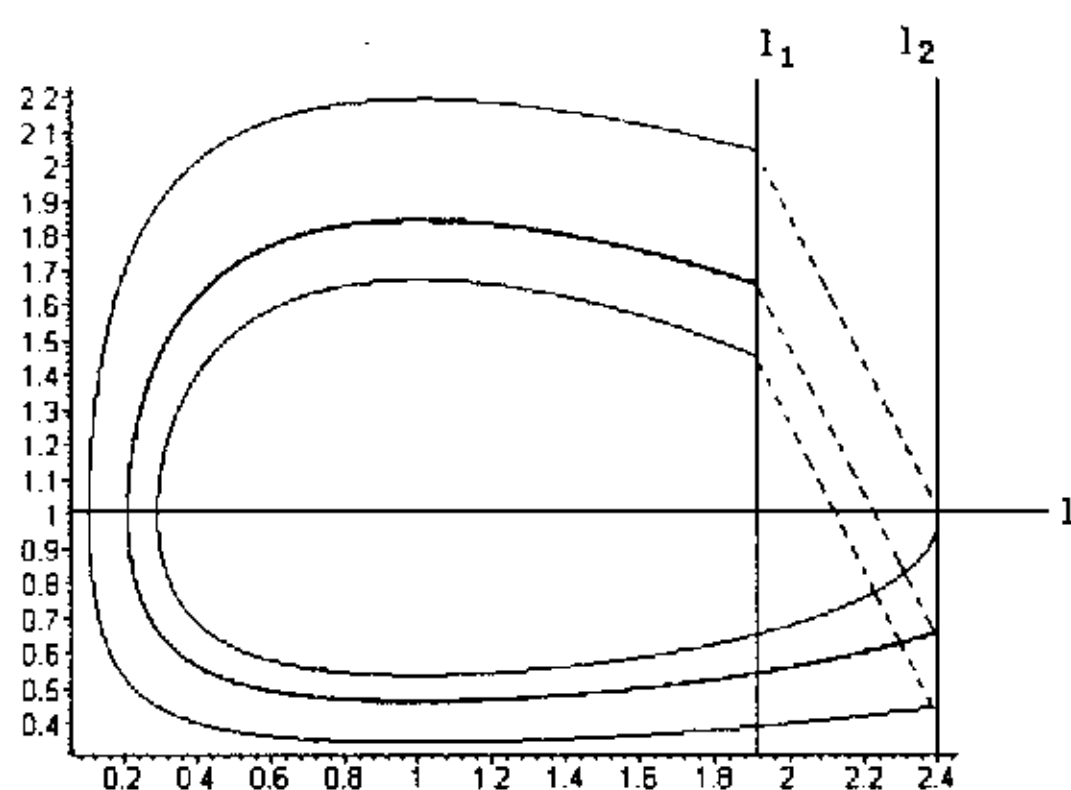


图 2.4.2: 阶 2 周期解和阶 1 周期解共存以及阶 2 周期解的存在性隐含阶 1 周期解的存在性。

• 阶 1 周期解和阶 2 周期解的关系

从图 2.4.2 和不等式 (2.4.34) 我们可以看出阶 2 周期解的存在性隐含了阶 1 周期解的存在性。实际上我们有下面的一般性结论 (从这以后我们假设 $\tau > 0$) :

定理 2.4.4 阶 2 周期解的存在性隐含了阶 1 周期解的存在性。

证明 假设系统 (2.4.1) 存在一个具初始值 (x_0^+, y_0^+) 的阶 2 周期解, 即我们有 $y_0^+ = y_2^+, y_0^+ \neq y_1^+$, 且 (y_0^+, y_1^+) 是下面方程的解:

$$\begin{cases} y_1^+ = -\frac{a}{b} \text{LambertW}\left(-\frac{b}{a} y_0^+ \exp\left(-\frac{b}{a} y_0^+ + \frac{A}{a}\right)\right) + \tau, \\ y_0^+ = -\frac{a}{b} \text{LambertW}\left(-\frac{b}{a} y_1^+ \exp\left(-\frac{b}{a} y_1^+ + \frac{A}{a}\right)\right) + \tau. \end{cases} \quad (2.4.40)$$

由 LambertW 的定义知 (y_0^+, y_1^+) 满足下面的方程:

$$\begin{cases} y_0^+ \exp\left(-\frac{b}{a} y_0^+ + \frac{A}{a}\right) = (y_1^+ - \tau) \exp\left(-\frac{b}{a} (y_1^+ - \tau)\right), \\ y_1^+ \exp\left(-\frac{b}{a} y_1^+ + \frac{A}{a}\right) = (y_0^+ - \tau) \exp\left(-\frac{b}{a} (y_0^+ - \tau)\right). \end{cases} \quad (2.4.41)$$

首先我们证明如果 (y_0^+, y_1^+) 是方程 (2.4.41) 的一个解, 则一定成立 $A < b\tau$ 。否则 $A \geq b\tau$ 。由方程 (2.4.41), 下面的不等式

$$y_0^+ \exp\left(-\frac{b}{a} (y_0^+ - \tau)\right) \leq (y_1^+ - \tau) \exp\left(-\frac{b}{a} (y_1^+ - \tau)\right) \quad (2.4.42)$$

和

$$y_1^+ \exp\left(-\frac{b}{a} (y_1^+ - \tau)\right) \leq (y_0^+ - \tau) \exp\left(-\frac{b}{a} (y_0^+ - \tau)\right) \quad (2.4.43)$$

成立。

又由 (2.4.43) 得

$$\exp\left(-\frac{b}{a}(y_1^+ - \tau)\right) \leq \frac{(y_0^+ - \tau)}{y_1^+} \exp\left(-\frac{b}{a}(y_0^+ - \tau)\right). \quad (2.4.44)$$

把 (2.4.44) 式代入 (2.4.42), 得到

$$y_0^+ y_1^+ \leq (y_1^+ - \tau)(y_0^+ - \tau),$$

即 $y_1^+ + y_0^+ \leq \tau$. 这与 $y_1^+ \geq \tau$, $y_0^+ \geq \tau$ 和 $y_0^+ + y_1^+ > 2\tau$ 矛盾, 因我们有 $y_0^+, y_1^+ \in N$ 和 $y_0^+ \neq y_1^+$.

因此如果系统 (2.4.1) 存在一个阶 2 周期解, 我们一定有 $A < b\tau$, 即

$$x_1 < \frac{d}{cp} \ln\left(\frac{1}{1-p}\right) + \frac{b\tau}{cp},$$

由定理 2.4.1, 系统 (2.4.1) 存在一个阶 1 周期解. \square

注记 2.4.1 在一个特殊情况下 (即 $\frac{a}{b} < y_0^+ < y_1^+$ 或 $\frac{a}{b} < y_1^+ < y_0^+$), 我们可以利用后续函数的方法证明定理 2.4.4 的结论是成立的, 并且能够说明阶 1 周期解包含在阶 2 周期解围城的领域内. 明显的, 函数 $LambertW\left(-\frac{b}{a}s \exp\left(-\frac{b}{a}s + \frac{A}{a}\right)\right)$ 对所有的 $s \in [y_0^+, y_1^+]$ ($[y_1^+, y_0^+]$) 是好定义的, 因此, 我们对 $s \in [y_0^+, y_1^+]$ ($[y_1^+, y_0^+]$) 可以定义一个连续后续函数

$$d(s) = f(s) - s = -\frac{a}{b} LambertW\left(-\frac{b}{a}s \exp\left(-\frac{b}{a}s + \frac{A}{a}\right)\right) + \tau - s. \quad (2.4.45)$$

如果 $y_0^+ < y_1^+$ ($y_1^+ < y_0^+$), 由 $LambertW$ 函数的单调性我们有

$$d(y_1^+) < 0, \quad d(y_0^+) > 0 \quad (d(y_1^+) > 0, \quad d(y_0^+) < 0).$$

因此, 存在一个常数 $y_0^+ < \bar{y} < y_1^+$ ($y_1^+ < \bar{y} < y_0^+$) 使得 $d(\bar{y}) = 0$, 即

$$\bar{y} = -\frac{a}{b} LambertW\left(-\frac{b}{a}\bar{y} \exp\left(-\frac{b}{a}\bar{y} + \frac{A}{a}\right)\right) + \tau,$$

这说明系统 (2.4.1) 存在一个阶 1 周期解并且包含在阶 2 周期解围城的领域内, 初始值为 $((1-p)x_1, \bar{y})$.

特别的, 如果 $\tau \geq \frac{a}{b}$, 则 $\frac{a}{b} < \min\{y_0^+, y_1^+\}$. 这说明如果 $\tau \geq \frac{a}{b}$, 阶 2 周期解的存在性隐含了阶 1 周期解的存在性, 并且阶 1 周期解包含在阶 2 周期解围城的领域内.

注记 2.4.2 由图 2.4.2, 我们注意到线段 $\overline{y_0^+ y_1^+}$ 是系统 (2.4.1) 的一个无切的线段, 因此, 阶 2 周期解的边界, 线段 $\overline{y_0^+ y_1^+}$ 和 $\overline{y_0 y_1}$ 围成一个 Poincaré

Bendixson 环域。此时我们猜想对于脉冲半动力系统,经典的 *Poincaré Bendixson* 定理 [7,46,47] 是成立的。然而,在某些情况下,脉冲半动力系统可能不存在平衡态。对于不存在平衡态脉冲半动力系统,经典的 *Poincaré Bendixson* 定理可以叙述为;对于一个平面自治的脉冲微分方程,任何一个从有界不变域出发的轨线要么是

- (i) 周期的, 或
- (ii) 收敛到一个不超过可数多个极限环的周期解。

一般来说,周期解有可能充满整个环域。下面的几节中我们给出了这种情况可能出现的条件。

注记 2.4.3 定理 2.4.4 的逆命题不成立。

2.4.2 脉冲点序列和阶 $k(k \geq 3)$ 周期解的不存在性

这一节的主要目的是研究阶 $k(k \geq 3)$ 周期解的不存在性。为此我们假设 $y_0^+ \neq y_1^+ \neq y_2^+$, 且系统 (2.4.1) 具初值 (x_0^+, y_0^+) 的解经历了 $k(k \geq 3)$ 次脉冲影响, 则存在一个正整数 n 使得 $k = 2n$ 或 $k = 2n + 1$ 。

定理 2.4.5 假设 $\tau \geq \frac{a}{b}$, 则对于脉冲点序列下面的结论之一成立 (不失一般性, 我们假设 k 是一个奇数)。

(a) 如果 $y_1^+ < y_0^+ < y_2^+$, 则

$$\frac{a}{b} < y_{2n+1}^+ < y_{2n-1}^+ < \cdots < y_3^+ < y_1^+ < y_0^+ < y_2^+ < y_4^+ < \cdots < y_{2n}^+.$$

(b) 如果 $y_1^+ < y_2^+ < y_0^+$, 则

$$\frac{a}{b} < y_1^+ < y_3^+ < \cdots < y_{2n+1}^+ < y_{2n}^+ < y_{2(n-1)}^+ < \cdots < y_4^+ < y_2^+ < y_0^+.$$

(c) 如果 $y_2^+ < y_0^+ < y_1^+$, 则

$$\frac{a}{b} < y_{2n}^+ < y_{2(n-1)}^+ < \cdots < y_4^+ < y_2^+ < y_0^+ < y_1^+ < y_3^+ < \cdots < y_{2n+1}^+.$$

(d) 如果 $y_0^+ < y_2^+ < y_1^+$, 则

$$\frac{a}{b} < y_0^+ < y_2^+ < \cdots < y_{2(n-1)}^+ < y_{2n}^+ < y_{2n+1}^+ < y_{2n-1}^+ < \cdots < y_3^+ < y_1^+.$$

证明 由 (1.5.2) 式, 我们知道函数 $\text{Lambert}W(z)$ 在区间 $z \in [-e^{-1}, 0)$ 上是严格增加的。由 (2.4.6) 式, 我们知道函数 $f_1(z) = -\frac{b}{a}z \exp(-\frac{b}{a}z)$ 在区间 $z \in (0, \frac{a}{b}]$ 是严格增加的, 在区间 $z \in [\frac{a}{b}, \infty)$ 上是严格递减的。

假设系统 (2.4.1) 过初值 (x_0^+, y_0^+) 的解经历了 $k(k \geq 3)$ 次脉冲且 $k = 2n+1$. 由于 $\tau \geq \frac{a}{b}$ 和

$$\begin{aligned} y_1^+ &= -\frac{a}{b} \text{LambertW}\left(-\frac{b}{a} y_0^+ \exp\left(-\frac{b}{a} y_0^+ + \frac{A}{a}\right)\right) + \tau, \\ y_2^+ &= -\frac{a}{b} \text{LambertW}\left(-\frac{b}{a} y_1^+ \exp\left(-\frac{b}{a} y_1^+ + \frac{A}{a}\right)\right) + \tau, \\ y_3^+ &= -\frac{a}{b} \text{LambertW}\left(-\frac{b}{a} y_2^+ \exp\left(-\frac{b}{a} y_2^+ + \frac{A}{a}\right)\right) + \tau. \end{aligned} \quad (2.4.46)$$

如果 $\frac{a}{b} < y_1^+ < y_0^+$, 根据 LambertW(z) 函数和 $f_1(z)$ 的单调性, 有 $y_2^+ > y_1^+$ 成立. 我们考虑下面两种情况:

情形 1: $y_2^+ > y_0^+$. 不等式 $y_1^+ < y_0^+ < y_2^+$ 隐含 $\frac{a}{b} < y_3^+ < y_1^+$ 成立. 又因为

$$y_4^+ = -\frac{a}{b} \text{LambertW}\left(-\frac{b}{a} y_3^+ \exp\left(-\frac{b}{a} y_3^+ + \frac{A}{a}\right)\right) + \tau. \quad (2.4.47)$$

因此我们有 $\frac{a}{b} < y_3^+ < y_1^+ < y_0^+ < y_2^+ < y_4^+$ 成立. 利用归纳法, 我们得到下面的不等式

$$\frac{a}{b} < y_{2n+1}^+ < y_{2n-1}^+ < \cdots < y_3^+ < y_1^+ < y_0^+ < y_2^+ < y_4^+ < \cdots < y_{2n}^+ \quad (2.4.48)$$

成立, 即结论 (a) 成立.

情形 2: $y_2^+ < y_0^+$. 对于情形 2 我们可以利用与情形 1 相同的方法证明结论 (b) 成立.

如果 $\frac{a}{b} < y_0^+ < y_1^+$. 相似的, 我们可以得到相应与 (c) 和 (d) 的两种情况, 其证明与 (a) 相同. \square

推论 2.4.1 如果 $\tau \geq \frac{a}{b}$, 则系统 (2.4.1) 除了可能存在阶 1 和阶 2 周期解外, 不可能存在阶 $k(k \geq 3)$ 的周期解.

证明 阶 1 和阶 2 周期解的存在性前面已经给出. 对于阶 $k(k \geq 3)$ 的周期解的不存在性, 不失一般性, 我们假设 $\frac{a}{b} < y_0^+$ 和系统 (2.4.1) 具有初值 (x_0^+, y_0^+) 的解经历了 k 次脉冲. 记脉冲后点的坐标为 $P_i^+ = ((1-p)x_1, y_i^+) \in N$, 其相应的脉冲前点的坐标为 $P_i = (x_1, y_i) \in M(i = 1, 2, \cdots, k)$, 则我们有

$$\overline{P_1 P_1^+} \parallel \overline{P_2 P_2^+} \parallel \cdots \parallel \overline{P_k P_k^+}. \quad (2.4.49)$$

设系统 (2.4.1) 存在一个阶 $k(k \geq 3)$ 的周期解, 则

$$y_0^+ \neq y_1^+ \neq \cdots \neq y_{k-1}^+, y_k^+ = y_0^+.$$

由定理 2.4.5 我们知道序列 $y_i^+(i = 1, 2, \cdots, k)$ 只有四种可能的排列方式. 因此对于 $k \geq 3$, 由 (2.4.49) 式我们知道 $y_0^+ = y_k^+$ 是不可能的. 这一矛盾说明了系统 (2.4.1) 不可能存在阶 $k(k \geq 3)$ 的周期解. \square

定理 2.4.6 如果 $\tau < \frac{a}{b}$ 和不等式 $y_1^+ < y_0^+ < \frac{a}{b}$ 成立, 则系统 (2.4.1) 不可能存在阶 $k(k \geq 2)$ 的周期解. 进一步, 如果 $A \leq 0$, 则系统 (2.4.1) 存在一个渐近稳定的阶 1 周期解; 如果 $A > 0$, 则当 $y_0^+ \in (0, Z_{\min}]$ 时系统 (2.4.1) 存在一个渐近稳定的阶 1 周期解.

证明 由于

$$y_i^+ = -\frac{a}{b} \text{LambertW}\left(-\frac{b}{a} y_{i-1}^+ \exp\left(-\frac{b}{a} y_{i-1}^+ + \frac{A}{a}\right)\right) + \tau, \quad i = 1, 2, \dots, k. \quad (2.4.50)$$

如果 $\tau < \frac{a}{b}$ 和 $y_1^+ < y_0^+ < \frac{a}{b}$ 成立, 根据函数 $\text{LambertW}(z)$ 和 $f_1(z)$ 的单调性, 我们得到

$$\tau < y_k^+ < y_{k-1}^+ < \dots < y_2^+ < y_1^+ < y_0^+ < \frac{a}{b}. \quad (2.4.51)$$

记所有脉冲后点的坐标为 $P_i^+ = ((1-p)x_1, y_i^+) \in N$, 其相应的脉冲前的点的坐标为 $P_i = (x_1, y_i) \in M(i = 1, 2, \dots, k)$, 则成立

$$\overline{P_1 P_1^+} \parallel \overline{P_2 P_2^+} \parallel \dots \parallel \overline{P_k P_k^+}. \quad (2.4.52)$$

由 (2.4.51) 和 (2.4.52) 式知, 系统 (2.4.1) 不可能存在阶 $k(k \geq 2)$ 的周期解.

如果 $A \leq 0$, 由 Poincaré 映射的定义我们知道不等式 (2.4.51) 对所有的 $0 < y_i^+ < \frac{a}{b}(i = 0, 1, 2, \dots)$ 成立, 则序列 $\{y_i^+\}_{i=0}^\infty$ 是单调递减有下界的. 因此存在一个唯一的正常数 $\bar{y} \in [\tau, y_0^+)$ 使得

$$\lim_{i \rightarrow \infty} y_i^+ = \bar{y}. \quad (2.4.53)$$

下面我们证明 $\Pi_{\bar{z}}$ 是一个具周期 $\Phi(\bar{z})$ 的阶 1 周期解, 其中 $\bar{z} = ((1-p)x_1, \bar{y})$. 实际上我们可以利用 (2.4.28) 式来计算 $\Phi(\bar{y})$. 在 l_1 上截取线段 $P^+ P_\tau^+$ 等于 τ , 如图 2.4.3, 且存在一条通过 P_τ^+ 的轨线相交于直线 l_2 上一点 P_τ , 点 P_τ 一定位于 P 点的上方. 记坐标 $P_0^+ = ((1-p)x_1, y_0^+)$, $P_\tau^+ = ((1-p)x_1, \tau)$, $P_\tau = (x_1, y_\tau)$ 和集合 $S = \{(x, y) \in R_+^2 | x = x_1, y_\tau < y < y_1\}$. 如果不等式 $\tau < \frac{a}{b}$ 和 $y_1^+ < y_0^+ < \frac{a}{b}$ 成立, 我们可以在线段 $\overline{P_0^+ P_\tau^+}$ 上任选一点 P^* , 则存在唯一一条通过 P^* 点的轨线将在有限时间到达线段 S . 设 r 是从线段 $\overline{P_0^+ P_\tau^+}$ 上出发的轨线到达 S 的最大时间. 我们知道如果系统没有脉冲, 轨线在到达线段 S 后将继续向前移动, 因此我们可以选择一条曲线 $\widetilde{Q_0 Q_1}$ 使得从 S 上出发的轨线到达曲线 $\widetilde{Q_0 Q_1}$ 的时间等于 r .

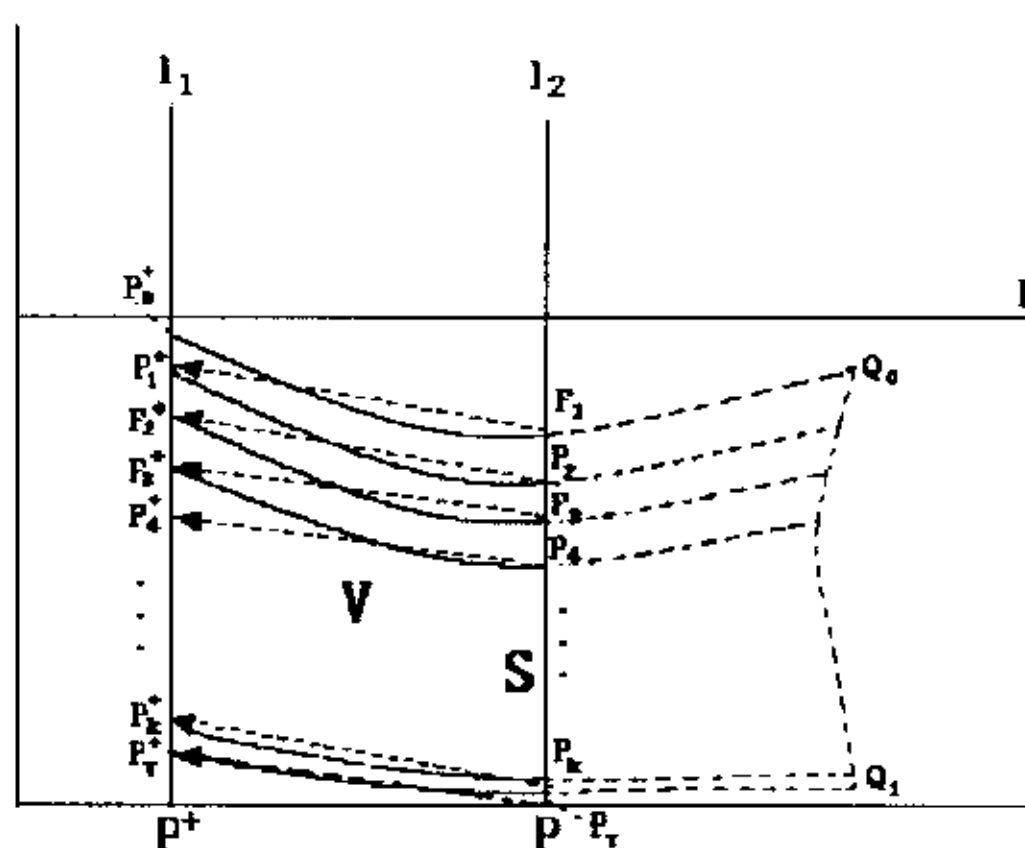


图 2.4.3: 当 $\tau < \frac{a}{b}$ 且 $y_1^+ < y_0^+$ 时的吸引子. 其中 V 是一个管, S 是一个 (r, V) -截痕.

令集合 V 是一个由积分曲线 $\widetilde{P_0^+Q_0}$, $\widetilde{P_r^+Q_1}$, 线段 $\overline{P_0^+P_r^+}$ 和曲线 $\widetilde{Q_0Q_1}$ 围城的有界开域. 容易看出 $S \subset V$ 且

- (i) $\Pi(z, t) \in V$ (其中 $z = (x, y)$) 对所有 $z \in S$, $-r < t < r$ 成立;
- (ii) 对任一 $z \in V$, 存在唯一 $r(z)$ 满足 $|r(z)| < r$ 使得 $\Pi(z, r(z)) \in S$;
- (iii) $V = \{\Pi(z, t) | z \in S, -r < t < r\}$.

根据管和 (r, V) -截痕的定义我们知道开集 V 在 R_+^2 中是一个管且 S 是管 V 中的一个 (r, V) -截痕. 注意到 (R_+^2, Π, R_+) 是一个动力系统且集合 $M \in R_+^2$ 和 $S \subset M$, 因此对每一个属于集合 M 且位于管 V 中的点 z , V 的截痕一定位于集合 M 中. 这说明了集合 $M \subset R_+^2$ 是好放置的. 根据定理 1.1.1 和定理 1.1.2 我们知道函数 Φ 在 R_+^2 上是连续的, 且 Π_z 是一个渐近稳定的阶 1 周期解.

如果 $A > 0$. 由于 $Z_{min} = -\frac{a}{b} \text{LambertW}(-\exp(-1 - \frac{A}{a}))$, 所以我们容易证明 $Z_{min} < \frac{a}{b}$. 由 Poincaré 映射的定义, 我们知道对任意 $y_0^+ \in (0, Z_{min}]$, 如果 $y_1^+ < y_0^+$, 则序列 $\{y_i^+\}_{i=0}^\infty$ 是好定义的. 利用同样的方法我们可以证明对所有的 $y_0^+ \in (0, Z_{min}]$ 和 $y_1^+ < y_0^+$ 系统 (2.4.1) 存在唯一一个渐近稳定的阶 1 周期解. \square

注记 2.4.4 假设 $\tau < \frac{a}{b}$, $y_0^+ < y_1^+ < \frac{a}{b}$ 且任意具初值 (x_0^+, y_0^+) 的解经历了脉冲 k ($k \geq 3$) 次. 如果 $y_k^+ \leq \frac{a}{b}$, 根据函数 LambertW 和 $f_1(z)$ 的单调性, 我们有不等式

$$y_0^+ < y_1^+ < \dots < y_k^+ \leq \frac{a}{b}.$$

进一步, 如果 $k \rightarrow \infty$, 利用与定理 2.4.6 同样的方法, 我们可以证明系统 (2.4.1) 存在一个唯一渐近稳定的阶 1 周期解, 且不存在阶大于 2 的周期解. 如果存在一

个 $j < k$ 使得 $y_{j-1}^+ \leq \frac{a}{b}$ 和 $y_j^+ > \frac{a}{b}$, 此时很难确定脉冲点 y_{j+1}^+ 的具体位置。所以在这种情况下, 我们还不能证明阶 $k(k \geq 3)$ 的周期解的不存在性。但我们猜想结论仍然成立。

2.4.3 正不变集、吸引子和马蹄性吸引子

这一节的主要目的是寻找系统 (2.4.1) 的各种吸引子及其吸引域。为此我们固定其它的参数, 选择 τ 作为参数。记集合 $\Omega_{x_1} = \{(x, y) \in R_+^2 | 0 < x < x_1\} \cup M$, $ID_\tau = \{(x, y) \in \Omega_{x_1} | H(x, y) < \tau\}$, 其边界记为 $I\Gamma_\tau = \partial ID_\tau = \{(x, y) \in \Omega_{x_1} | H(x, y) = \tau\}$, 直线 $l = \{(x, y) \in R_+^2 | x \geq 0, y = \frac{a}{b}\}$, $l_1 = \{(x, y) \in R_+^2 | x = (1-p)x_1, y \geq 0\}$ 和 $l_2 = \{(x, y) \in R_+^2 | x = x_1, y \geq 0\}$ 。根据直线 l_1 和 l_2 的不同位置, 我们考虑下面三种情况:

$$(A_1) \quad (1-p)x_1 \geq \frac{d}{c};$$

$$(A_2) \quad x_1 \leq \frac{d}{c};$$

$$(A_3) \quad (1-p)x_1 < \frac{d}{c} < x_1.$$

• 情形 (A_1) 下的吸引子及其吸引域

对于 (A_1) , 为了计算简单, 不失一般性我们可以选择参数 $0 < p < 1$ 使得 $p = 1 - \frac{d}{cx_1}$ 。则我们有 $l_1 = \{(x, y) \in R_+^2 | x = \frac{d}{c}, y \geq 0\}$, $l_2 = \{(x, y) \in R_+^2 | x = \frac{d}{c(1-p)}, y \geq 0\}$ 。此时存在一个包含点 $(\frac{d}{c}, \frac{a}{b})$ 的闭轨 $\Gamma_{\bar{\tau}}$ 与直线 l_2 相切于点 $(\frac{d}{c(1-p)}, \frac{a}{b})$ 。容易计算

$$\bar{\tau} = d\left(\frac{p}{1-p} - \ln\left(\frac{1}{1-p}\right)\right),$$

且 $\bar{\tau} > 0$ 。这样我们得到

$$\Gamma_{\bar{\tau}} = \partial D_{\bar{\tau}} = \{(x, y) \in R_+^2 | H(x, y) = \bar{\tau} = d\left(\frac{p}{1-p} - \ln\left(\frac{1}{1-p}\right)\right)\}. \quad (2.4.54)$$

注记 2.4.5 任何从集合 $D_{\bar{\tau}}$ 内部出发的轨线不受脉冲的影响, 且集合 $D_{\bar{\tau}}$ 是系统 (2.4.1) 的一个不变集。

对于在情形 $(1-p)x_1 = \frac{d}{c}$ 下脉冲半动力 (2.4.1) 的吸引子及其吸引域我们有下面两种情况:

情形 1: $\tau < \frac{a}{b}$ 。

如图 2.4.4(a) 和 (b), 坐标点 $Q_3 = (\frac{d}{c(1-p)}, \frac{a}{b})$ 。由于 $\tau < \frac{a}{b}$, 我们能够在直线 l_2 上点 Q_3 的下方截取线段 $\overline{Q_3Q_0}$ 等于 τ , 则存在通过点 $Q_0 = (\frac{d}{c(1-p)}, \frac{a}{b} - \tau)$

闭轨 $\Gamma_{r_{Q_0}}$ 相交于 l_1 在点 $P_5^+ = (\frac{d}{c}, y_5^+)$ 和 $P_4^+ = (\frac{d}{c}, y_4^+)$ (如图 2.4.4(a)), 其中

$$\Gamma_{r_{Q_0}} = \{(x, y) \in R_+^2 | H(x, y) = r_{Q_0}\} \quad (2.4.55)$$

和 $r_{Q_0} = d(\frac{p}{1-p} - \ln(\frac{1}{1-p})) - b\tau - a\ln(1 - \frac{b\tau}{a}) > 0$ 对所有的 $0 \leq p < 1$ 成立. 实际上, 由于 $d(\frac{p}{1-p} - \ln(\frac{1}{1-p})) > 0$, 我们只需 $-b\tau - a\ln(1 - \frac{b\tau}{a}) \geq 0$. 注意到不等式 $\tau < \frac{a}{b}$ 隐含 $-b\tau - a\ln(1 - \frac{b\tau}{a}) \geq 0$ 成立.

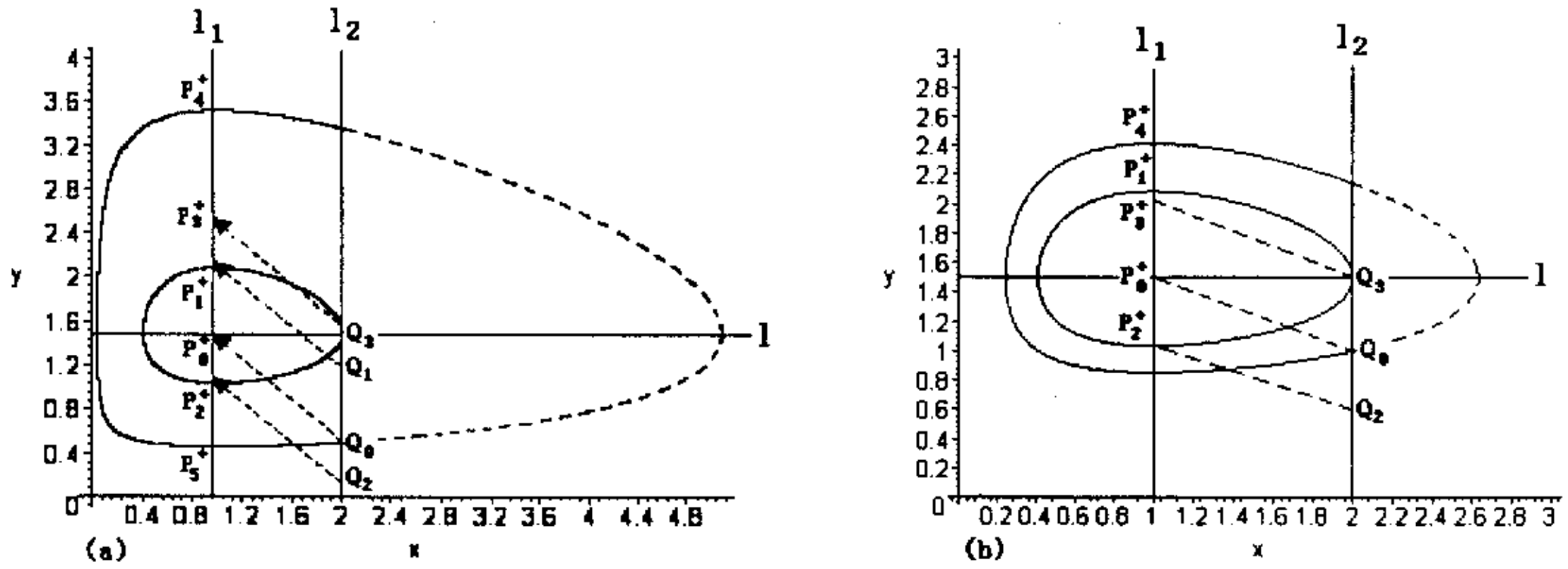


图 2.4.4: 当 $\tau < \frac{a}{b}$ 和 $x_1 = \frac{d}{c(1-p)}$ 时的正不变集和吸引子.

由于 $Q_0 \in M$, 则 $I(Q_0) = P_0^+ = (\frac{d}{c}, \frac{a}{b}) \in N$. 如果 $\tau > |P_0^+ P_1^+|$, 连接 Q_0 和 P_0^+ , 作线段 $Q_1 P_1^+$, $Q_2 P_2^+$ 和 $Q_3 P_3^+$ 使得

$$\overline{Q_0 P_0^+} \parallel \overline{Q_1 P_1^+} \parallel \overline{Q_2 P_2^+} \parallel \overline{Q_3 P_3^+},$$

其中 $P_1^+ = (\frac{d}{c}, y_1^+)$, $P_2^+ = (\frac{d}{c}, y_2^+)$ 且

$$\begin{aligned} y_1^+ &= -\frac{a}{b} \text{LambertW}(-1, -\exp(-1 - \frac{d}{a}(\frac{p}{1-p} - \ln(\frac{1}{1-p}))))), \\ y_2^+ &= -\frac{a}{b} \text{LambertW}(-\exp(-1 - \frac{d}{a}(\frac{p}{1-p} - \ln(\frac{1}{1-p}))))). \end{aligned} \quad (2.4.56)$$

因此

$$|P_0^+ P_1^+| = -\frac{a}{b} [\text{LambertW}(-1, -\exp(-1 - \frac{d}{a}(\frac{p}{1-p} - \ln(\frac{1}{1-p})))) + 1]. \quad (2.4.57)$$

进一步, 由于 $\tau > |P_0^+ P_1^+|$, 则 P_3^+ 一定位于 P_1^+ 的上方, 由命题 2.2.1 知 P_3^+ 一定位于 P_4^+ 的下方. 实际上, 由于所有的闭轨都在直线 l_1 上取到最小值, 因此有 $|P_0^+ P_5^+| > |Q_0 Q_3|$. 根据命题 2.2.1, 我们有 $|P_0^+ P_5^+| < |P_0^+ P_4^+|$, 即点 P_3^+ 一定位于 P_4^+ 的下方.

在图 2.4.4(a) 中, 任何从 $(x_0^+, y_0^+) \in ID_{r_{Q_0}} \cup I\Gamma_{r_{Q_0}}$ 且满足 $0 < x_0^+ < x_1$ 出发的轨道将停留在区域 $(ID_{r_{Q_0}} \cup I\Gamma_{r_{Q_0}}) \setminus (D_{\bar{r}} \cup \Gamma_{\bar{r}})$ 中或经过一次脉冲后跳进区域 $D_{\bar{r}}$. 任何从 $(x_0^+, y_0^+) \in \Omega_{x_1} \setminus (ID_{r_{Q_0}} \cup I\Gamma_{r_{Q_0}})$ 且满足 $x_0^+ < x_1$ 出发的轨道将经历有限次脉冲后跳进正不变集 $ID_{r_{Q_0}} \cup I\Gamma_{r_{Q_0}}$ 中.

如果 $\tau \leq |P_0^+ P_1^+|$, 如图 2.4.4(b), 由于点 $Q_3 \in M$, $P_3^+ = I(Q_3) \in N$ 位于点 P_1^+ 的下方. 因此取任何属于线段 $\overline{Q_0 Q_3}$ 上的点 Q , 我们一定有 $P^+ = I(Q) \in N \cap D_{\bar{r}}$. 根据集合 $D_{\bar{r}}$ 的不变性, 任何从 $(x_0^+, y_0^+) \in ID_{r_{Q_0}} \cup I\Gamma_{r_{Q_0}} \setminus D_{\bar{r}}$ 出发轨道经历一次脉冲后跳入不变集 $D_{\bar{r}}$. 相似的, 任何从 $(x_0^+, y_0^+) \in \Omega_{x_1} \setminus (ID_{r_{P_0}} \cup I\Gamma_{r_{P_0}})$ 且满足 $x_0^+ < x_1$ 出发的轨道经历有限次脉冲后跳入不变集 $D_{\bar{r}}$ 中. 综上所述, 我们有下面的定理:

定理 2.4.7 假设 $\tau < \frac{a}{b}$. 如果 $\tau > |P_0^+ P_1^+|$, 则集合 $ID_{r_{Q_0}} \cup I\Gamma_{r_{Q_0}}$ 是一个吸引子其吸引域是 Ω_{x_1} , 如图 2.4.4(a).

如果 $\tau \leq |P_0^+ P_1^+|$, 则 $D_{\bar{r}} \cup \Gamma_{\bar{r}}$ 是一个吸引子其吸引域是 Ω_{x_1} , 如图 2.4.4(b). 特别的, 如果 $\tau = |P_0^+ P_1^+|$, 则存在一个阶 1 的周期解正好是闭轨 $\Gamma_{\bar{r}}$ 的一部分.

情形 2: $\tau \geq \frac{a}{b}$.

如图 2.4.5(a), 在直线 l_1 上取一点 P_5^+ 使得 $|P_0^+ P_5^+| = \tau$. 考虑通过点 P_5^+ 的轨道 $\Gamma_{P_5^+}$, 当时间 t 增加时, 将与直线 l_2 相交于点 $Q_1 = (\frac{d}{c(1-p)}, q_1)$, 其中

$$q_1 = -\frac{a}{b} \text{LambertW}((-1 - \frac{b}{a}\tau) \exp(-1 - \frac{b}{a}\tau + \frac{d}{a}(\frac{p}{1-p} - \ln(\frac{1}{1-p}))). \quad (2.4.58)$$

注意到如果 $\tau \geq |PP_1^+| = y_1^+$ (由 (2.4.56) 式所定义), 则 q_1 是有定义的.

如果 $\tau \geq |PP_1^+|$ (其中 P 位于 x -轴). 在直线 l_1 上截取线段 $|PP_2^+|$ 等于 τ , 则存在通过 $P_2^+ = (\frac{d}{c}, \tau)$ 的轨线与直线 l_2 相交于点 $Q_2 = (\frac{d}{c(1-p)}, q_2)$, 其中

$$q_2 = -\frac{a}{b} \text{LambertW}(-\frac{b}{a}\tau \exp(-\frac{b}{a}\tau + \frac{d}{a}(\frac{p}{1-p} - \ln(\frac{1}{1-p}))). \quad (2.4.59)$$

注意到如果 $\tau \geq |PP_1^+| = y_1^+$, q_2 也是好定义的. 由于 $Q_3 \in M$, 则 $I(Q_3) = P_3^+ = (\frac{d}{c}, \frac{a}{b} + \tau) \in N$. 连接 Q 和 P_2^+ , Q_3 和 P_5^+ , 作线段 $\overline{Q_1 P_3^+}$ 和 $\overline{Q_2 P_4^+}$ 使得

$$\overline{QP_2^+} \parallel \overline{Q_1 P_3^+} \parallel \overline{Q_2 P_4^+} \parallel \overline{Q_3 P_5^+}. \quad (2.4.60)$$

则我们有

$$\begin{aligned} \overline{QQ_1} &\subset M, & I(\overline{QQ_1}) &= \overline{P_2^+ P_3^+} \subset N, \\ \overline{Q_1 Q_2} &\subset M, & I(\overline{Q_1 Q_2}) &= \overline{P_3^+ P_4^+} \subset N, \\ \overline{Q_2 Q_3} &\subset M, & I(\overline{Q_2 Q_3}) &= \overline{P_4^+ P_5^+} \subset N \end{aligned} \quad (2.4.61)$$

成立, 这说明马蹄型集合 $ID_{\tau_{P_5^+}} \cup I\Gamma_{\tau_{P_5^+}} \setminus ID_{\tau_{P_2^+}} \triangleq \mathcal{D}_{h_1}$ 是一个正的不变集, 其中

$$r_{P_5^+} = b\tau - a \ln\left(1 + \frac{b\tau}{a}\right) > 0, \quad r_{P_2^+} = b\tau - a \ln\left(\frac{b\tau}{a}\right) - a > 0, \quad \tau \geq \frac{a}{b}. \quad (2.4.62)$$

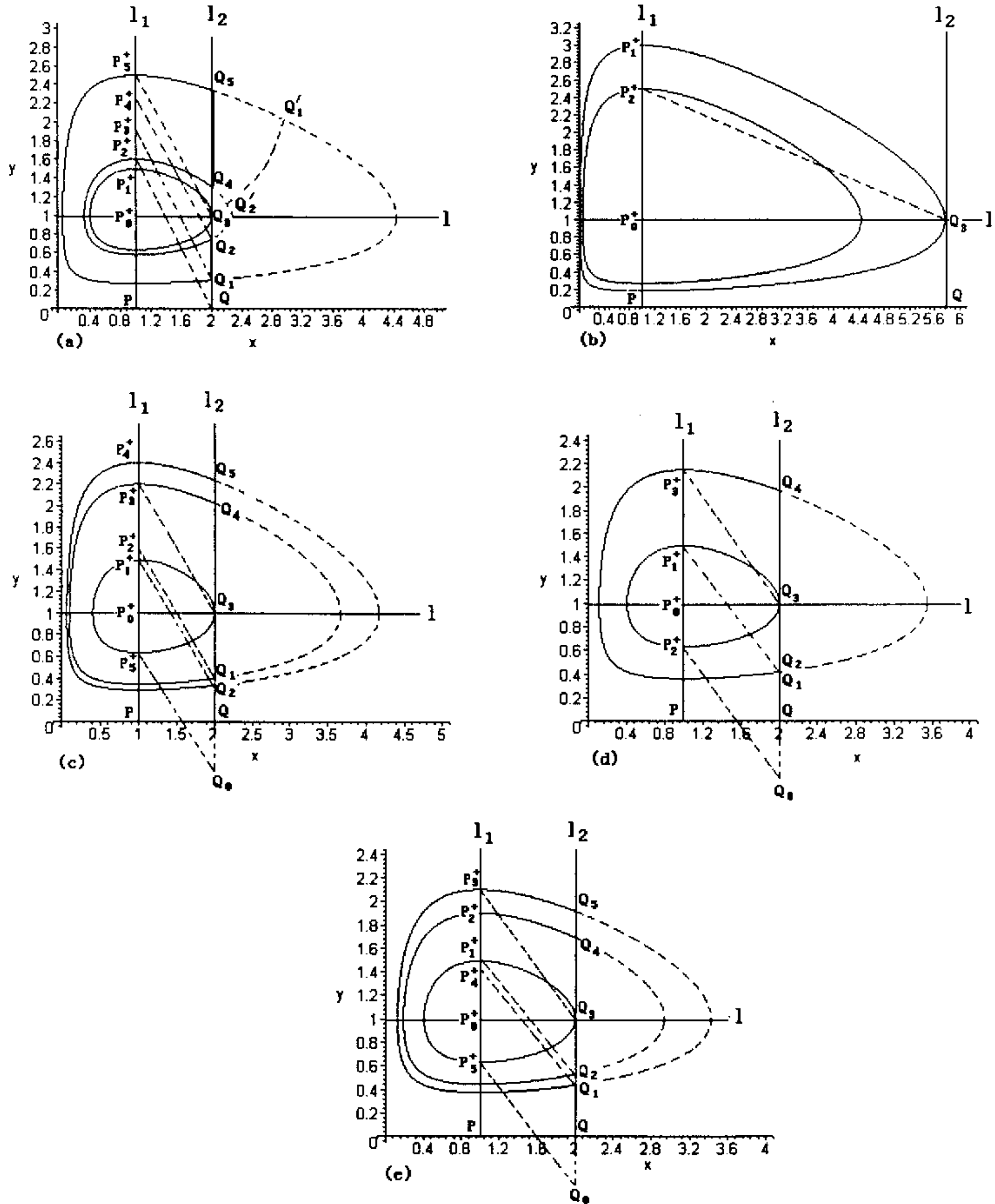


图 2.4.5: 当 $\tau \geq \frac{a}{b}$ 和 $x_1 = \frac{d}{c(1-p)}$ 时的正不变集和吸引子.

由 (2.4.61) 式, 我们注意到任何从 $(x_0^+, y_0^+) \in ID_{r_{P_2^+}} \setminus D_{\bar{r}}$ (或 $(x_0^+, y_0^+) \in \Omega_{x_1} \setminus (ID_{r_{P_5^+}} \cup I\Gamma_{r_{P_5^+}})$) 且满足 $x_0^+ < x_1$ 的轨线经过一次脉冲后跳入正不变集 D_{h_1} . 这说明马蹄型正不变集 D_{h_1} 是一个吸引子, 其吸引域是 $\Omega_{x_1} \setminus D_{\bar{r}}$.

如果 $\tau < |PP_1^+|$ 且 $\tau \leq |P_0^+P_1^+|$ (由 (2.4.57) 式所定义), 如图 2.4.5(b). 容易知道集合 $D_{\bar{r}} \cup \Gamma_{\bar{r}}$ 是一个吸引子, 其吸引域是 Ω_{x_1} .

如果 $|P_0^+P_1^+| < \tau < |PP_1^+|$, 如图 2.4.5(c)-(e). 连接 Q_3 和 $P_3^+ = (\frac{d}{c}, \frac{a}{b} + \tau)$, 作线段 $\overline{P_1^+Q_2}$ 使得 $\overline{Q_3P_3^+} \parallel \overline{P_1^+Q_2}$. 我们考虑下面三种情况:

(a): Q_1 位于 Q_2 的上方 (即 $q_1 > \bar{q}_2$), 如图 2.4.5(c), 其中 $Q_1 = (\frac{d}{c(1-p)}, q_1)$ (q_1 由式 (2.4.58) 给出, $|P_0^+P_1^+| < \tau$ 暗指它是有定义的), $Q_2 = (\frac{d}{c(1-p)}, \bar{q}_2)$ 和

$$\bar{q}_2 = |PP_1^+| - \tau = -\frac{a}{b} \text{LambertW}(-1, -\exp(-1 - \frac{d}{a}(\frac{p}{1-p} - \ln(\frac{1}{1-p})))) - \tau. \quad (2.4.63)$$

作线段 $\overline{Q_1P_2^+}$ 和 $\overline{P_5^+Q_0}$ 使得

$$\overline{Q_3P_3^+} \parallel \overline{Q_1P_2^+} \parallel \overline{P_5^+Q_0} \parallel \overline{P_1^+Q_2}. \quad (2.4.64)$$

则存在轨道 Γ_{Q_2} 相交直线 l_1 于 P_4^+ , 且 P_4^+ 位于 P_3^+ 的上方. 由 (2.4.64) 式, 我们有

$$\begin{aligned} \overline{Q_1Q_3} &\subset M, & I(\overline{Q_1Q_3}) &= \overline{P_2^+P_3^+} \subset N, \\ \overline{Q_2Q_1} &\subset M, & I(\overline{Q_2Q_1}) &= \overline{P_1^+P_2^+} \subset N, \\ \overline{QQ_2} &\subset M, & I(\overline{QQ_2}) &\subset \overline{P_5^+P_1^+} \subset N \end{aligned} \quad (2.4.65)$$

成立, 这说明马蹄型集合 $(ID_{r_{P_3^+}} \cup I\Gamma_{r_{P_3^+}}) \setminus D_{\bar{r}} \triangleq D_{h_2}$ 是一个正不变集, 其中 $r_{P_3^+} = b\tau - a \ln(1 + \frac{b\tau}{a}) > 0$.

根据 (2.4.65) 式, 任何从 $(x_0^+, y_0^+) \in (ID_{r_{P_4^+}} \cup I\Gamma_{r_{P_4^+}}) \setminus (ID_{r_{P_3^+}} \cup I\Gamma_{r_{P_3^+}})$ 且满足 $x_0^+ < x_1$ 出发的轨线经过有限次脉冲后跳入马蹄型正不变集 $(ID_{r_{P_3^+}} \cup I\Gamma_{r_{P_3^+}}) \setminus D_{\bar{r}}$, 任何从 $(x_0^+, y_0^+) \in \Omega_{x_1} \setminus (ID_{r_{P_4^+}} \cup I\Gamma_{r_{P_4^+}})$ 出发的轨线经过一次脉冲后跳入正不变集 $D_{\bar{r}}$ 中, 其中 $r_{P_4^+} = a(\frac{b}{a}\bar{q}_2 - \ln(\frac{b}{a}\bar{q}_2) - 1) > 0$. 这说明马蹄型正不变集 D_{h_2} 是一个吸引子, 其吸引域为 $(ID_{r_{P_4^+}} \cup I\Gamma_{r_{P_4^+}}) \setminus D_{\bar{r}}$; 正不变集 $D_{\bar{r}}$ 是一个吸引子, 其吸引域为 $(\Omega_{x_1} \setminus (ID_{r_{P_4^+}} \cup I\Gamma_{r_{P_4^+}})) \cup D_{\bar{r}}$.

(b): Q_1 与 Q_2 重合 (即 $q_1 = \bar{q}_2$), 如图 2.4.5(d). 利用与情形 (a) 相同的方法, 我们容易得到马蹄型集合 $(ID_{r_{P_3^+}} \cup I\Gamma_{r_{P_3^+}}) \setminus D_{\bar{r}}$ 是一个正不变集, 其边界是一个阶 2 的周期解, 其中 $r_{P_3^+} = b\tau - a \ln(1 + \frac{b\tau}{a}) > 0$, 而且, 没有轨线从其外部进入到内部. 正不变集 $D_{\bar{r}}$ 是一个吸引子, 其吸引域为 $(\Omega_{x_1} \setminus (ID_{r_{P_3^+}} \cup I\Gamma_{r_{P_3^+}})) \cup D_{\bar{r}}$.

(c): Q_1 位于 Q_2 的下方 (即 $q_1 < \bar{q}_2$), 如图 2.4.5(e)。利用与情形 (a) 相同的方法, 我们得到正不变集 $ID_{r_{P_3^+}} \cup I\Gamma_{r_{P_3^+}}$ 是一个吸引子, 其吸引域为 Ω_{x_1} 。综上所述, 我们有下面的定理:

定理 2.4.8 假设 $\tau \geq \frac{a}{b}$ 。如果 $\tau \geq |PP_1^+|$, 则马蹄型正不变集 D_{h_1} 是一个吸引子, 其吸引域为 $\Omega_{x_1} \setminus D_{\bar{r}}$ 。

如果 $\tau < |PP_1^+|$ 且 $\tau \leq |P_0^+P_1^+|$, 则集合 $D_{\bar{r}} \cup \Gamma_{\bar{r}}$ 是一个吸引子, 其吸引域为 Ω_{x_1} 。

如果 $|P_0^+P_1^+| < \tau < |PP_1^+|$, 则下面的情况之一成立:

(a) 如果 $q_1 > \bar{q}_2$, 则马蹄型正不变集 D_{h_2} 是一个吸引子, 其吸引域为 $(ID_{r_{P_4^+}} \cup I\Gamma_{r_{P_4^+}}) \setminus D_{\bar{r}}$; 正不变集 $D_{\bar{r}}$ 是一个吸引子, 其吸引域为 $(\Omega_{x_1} \setminus (ID_{r_{P_4^+}} \cup I\Gamma_{r_{P_4^+}})) \cup D_{\bar{r}}$ 。

(b) 如果 $q_1 = \bar{q}_2$, 则集合 D_{h_2} 是一个正不变集, 其边界的一部分是一个阶 2 的周期解; 集合 $D_{\bar{r}}$ 是一个吸引子, 其吸引域为 $(\Omega_{x_1} \setminus (ID_{r_{P_3^+}} \cup I\Gamma_{r_{P_3^+}})) \cup D_{\bar{r}}$ 。

(c) 如果 $q_1 < \bar{q}_2$, 则正不变集 $ID_{r_{P_3^+}} \cup I\Gamma_{r_{P_3^+}}$ 是一个吸引子, 其吸引域为 Ω_{x_1} 。

• 关于情形 (A_2) 和 (A_3) 的正不变集, 吸引子及其吸引域

如果 $\tau < \frac{a}{b}$, 由注记 2.4.4 我们知道脉冲点序列的单调性是不确定的。故当 $\tau < \frac{a}{b}$ 时, 对于情形 (A_2) 和 (A_3) 的吸引子的分类是很困难的。因此在下面的讨论中我们限制 $\tau \geq \frac{a}{b}$ 。

对于情形 (A_2) , 不失一般性, 我们令 $x_1 = \frac{d}{c}$, 则直线

$$l_1 = \{(x, y) \in R_+^2 | x = (1-p)\frac{d}{c}, y \geq 0\}, \quad l_2 = \{(x, y) \in R_+^2 | x = \frac{d}{c}, y \geq 0\}.$$

利用与情形 A_1 相同的方法我们得到下面的结论。

定理 2.4.9 对于情形 (A_2) , 如图 2.4.6(a), 如果 $x_1 = \frac{d}{c}$ 和 $\tau \geq \frac{a}{b}$, 则正不变集 $ID_{r_{P_3^+}} \cup I\Gamma_{r_{P_3^+}}$ 是一个吸引子, 其吸引域为 Ω_{x_1} , 其中 $P_3^+ = (\frac{d(1-p)}{c}, \frac{a}{b} + \tau)$, $r_{P_3^+} = b\tau - a \ln(1 + \frac{b\tau}{a}) - dp - d \ln(1-p) > 0$ 。

对于情形 (A_3) , 存在两个闭轨 $\Gamma_{r_{P_0^+}}$ 和 $\Gamma_{r_{Q_3}}$ 分别相切于直线 l_1 和 l_2 , 其中 $P_0^+ = ((1-p)x_1, \frac{a}{b}), Q_3 = (x_1, \frac{a}{b})$ 和

$$r_{P_0^+} = c(1-p)x_1 - d \ln\left(\frac{(1-p)cx_1}{d}\right) - d, \quad r_{Q_3} = cx_1 - d \ln\left(\frac{cx_1}{d}\right) - d. \quad (2.4.66)$$

下面我们考虑三种可能的情况:

(a) $r_{P_0^+} = r_{Q_3}$. 通过计算我们得到 $x_1 = \frac{d}{cp} \ln(\frac{1}{1-p})$, 此时直线 l_1 和 l_2 相切于同一个闭轨, 如图 2.4.6(b). 因此我们有下面的结论:

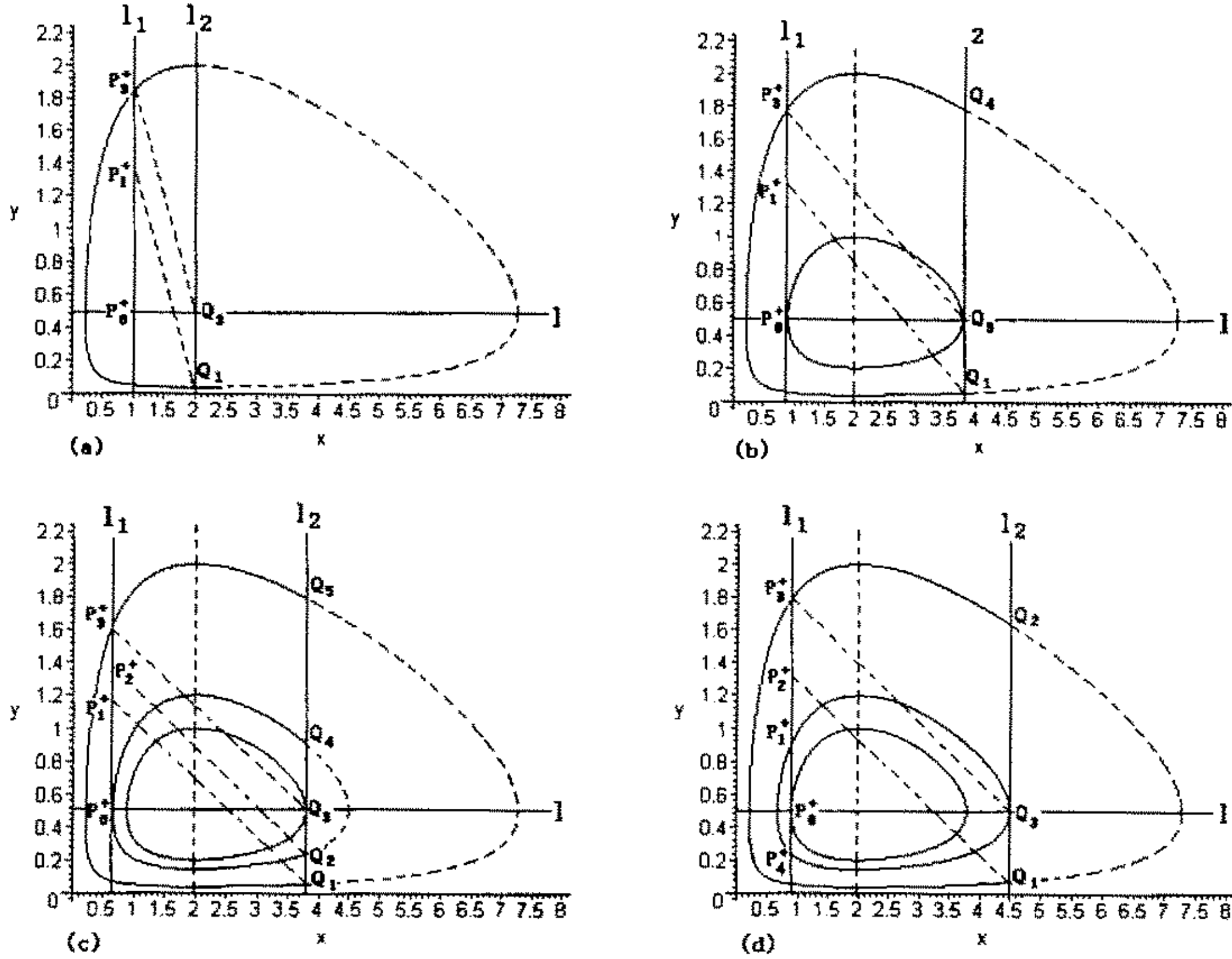


图 2.4.6: 当 $\tau \geq \frac{a}{b}$, $x_1 = \frac{d}{c}$ 或 $(1-p)x_1 < \frac{d}{c} < x_1$ 时的正不变集和吸引子.

定理 2.4.10 假设 $\tau \geq \frac{a}{b}$ 和 $x_1 = \frac{d}{cp} \ln(\frac{1}{1-p})$, 如图 2.4.6(b), 则马蹄型正不变集 $ID_{r_{P_3^+}} \cup I\Gamma_{r_{P_3^+}} \setminus D_{r_{P_0^+}} \triangleq D_{h_3}$ 是一个吸引子, 其吸引域为 $\Omega_{x_1} \setminus D_{r_{P_0^+}}$; 集合 $D_{r_{P_0^+}}$ 是一个正不变集, 其中 $P_3^+ = (\frac{d(1-p)}{cp} \ln(\frac{1}{1-p}), \frac{a}{b} + \tau)$ 和

$$r_{P_3^+} = b\tau + \frac{d(1-p)}{p} \ln(\frac{1}{1-p}) - a \ln(1 + \frac{b\tau}{a}) - d \ln(\frac{1-p}{p} \ln(\frac{1}{1-p})) - d,$$

$$r_{P_0^+} = \frac{d(1-p)}{p} \ln(\frac{1}{1-p}) - d \ln(\frac{1-p}{p} \ln(\frac{1}{1-p})) - d.$$

(b) $r_{P_0^+} > r_{Q_3}$, 则 $\Gamma_{r_{Q_3}} \subset D_{r_{P_0^+}}$, 如图 2.4.6(c). 我们注意到这种情况下

吸引子的分类完全相同于定理 2.4.8 中 $\tau \geq \frac{a}{b}, \tau \geq |PP_1^+|$ 时的情形 2. 记马蹄型正不变集 $ID_{r_{P_3^+}} \cup I\Gamma_{r_{P_3^+}} \setminus \mathcal{D}_{r_{P_0^+}} \triangleq \mathcal{D}_{h_4}$.

(c) $r_{P_0^+} < r_{Q_3}$, 则 $\Gamma_{r_{P_0^+}} \subset \mathcal{D}_{r_{Q_3}}$, 如图 2.4.6(d). 因此存在一条闭轨通过点 $P_3^+ = ((1-p)x_1, \frac{a}{b} + \tau)$, 且当 P_3^+ 位于 P_1^+ 上方时与直线 l_2 相交于点 Q_1 . 连接 Q_3 和 P_3^+ , 作线段 $\overline{Q_1P_2^+}$ 使得 $\overline{Q_1P_2^+} \parallel \overline{Q_3P_3^+}$. 此时存在与定理 2.4.8 完全相同的三种情况, 即 P_2^+ 位于 P_1^+ 的上方、 P_2^+ 位于 P_1^+ 的下方和 P_2^+ 和 P_1^+ 重合. 余下的讨论完全相同于定理 2.4.8 中当 $|P_0^+P_1^+| < \tau < |PP_1^+|$ 时的情形 2. 当 P_2^+ 位于 P_1^+ 上方或 P_2^+ 和 P_1^+ 重合时记马蹄型正不变集 $ID_{r_{P_3^+}} \cup I\Gamma_{r_{P_3^+}} \setminus \mathcal{D}_{r_{Q_3}} \triangleq \mathcal{D}_{h_5}$.

2.4.4 马蹄型吸引子的极限集及其内部结构

根据第 2.4.3 节, 系统 (2.4.1) 存在 5 个马蹄型正不变集 $\mathcal{D}_{h_i} (i = 1, 2, \dots, 5)$. 研究并了解它们的内部结构是非常有意义和有用的, 即从它们内部出发的任一轨线的极限集是什么? 下面的定理对马蹄吸引子 $\mathcal{D}_{h_1} (x_1 = \frac{d}{c(1-p)})$ 时的情形给出了回答.

定理 2.4.11 假设 $\tau \geq \max\{\frac{a}{b}, |PP_1^+|\}$, $\Pi_{z_0^+}(t)$ 是从初始点 $(x_0^+, y_0^+) \in \mathcal{D}_{h_1}$ 且满足 $x_0^+ < x_1$ 出发的轨道, 则下面结论之一一定成立:

- (i) $\Pi_{z_0^+}$ 是一个阶 1 周期解;
- (ii) $\Pi_{z_0^+}$ 是一个阶 2 周期解;
- (iii) $\lim_{t \rightarrow \infty} \rho(\Pi_{z_0^+}(t), \Pi^1) = 0$;
- (iv) $\lim_{t \rightarrow \infty} \rho(\Pi_{z_0^+}(t), \Pi^2) = 0$,

其中 $\Pi^n (n = 1, 2)$ 是包含在马蹄吸引子 \mathcal{D}_{h_1} 中的阶 n 周期解.

证明 首先我们证明存在一个阶 1 周期解位于马蹄吸引子 \mathcal{D}_{h_1} 的内部. 注意到 $\tau \geq |PP_1^+|$ 和

$$\overline{Q_1Q_2} \subset M, \quad I(\overline{Q_1Q_2}) = \overline{P_3^+P_4^+} \subset N$$

成立. 因此, 点 P_4^+ 位于 P_5^+ 的下方, 点 P_3^+ 位于 P_2^+ 的上方且位于 P_4^+ 的下方, 如图 2.4.5(a). 记坐标 $P_2^+ = (\frac{d}{c}, y_2^+)$, $P_3^+ = (\frac{d}{c}, y_3^+)$, $P_4^+ = (\frac{d}{c}, y_4^+)$, 和 $P_5^+ = (\frac{d}{c}, y_5^+)$, 则 $y_2^+ < y_3^+ < y_4^+ < y_5^+$, 且

$$\begin{aligned} y_5^+ &= -\frac{a}{b} \text{LambertW}\left(-\frac{b}{a} y_4^+ \exp\left(-\frac{b}{a} y_4^+ + \frac{A}{a}\right)\right) + \tau, \\ y_3^+ &= -\frac{a}{b} \text{LambertW}\left(-\frac{b}{a} y_2^+ \exp\left(-\frac{b}{a} y_2^+ + \frac{A}{a}\right)\right) + \tau. \end{aligned} \quad (2.4.67)$$

根据后继函数 $d(s)$ 的定义 (由 (2.4.45) 式所定义) 我们有

$$d(y_4^+) < 0, \quad d(y_3^+) > 0,$$

这说明至少存在位于 P_3^+ 和 P_4^+ 之间一点 $P^* = (\frac{d}{c}, y^*)$ 使得 $d(y^*) = 0$, 因此我们证明了阶 1 周期解的存在性.

其次, 我们证明阶 2 周期解存在的几种情形. 利用定理 2.4.6 相同的证明方法, 如图 2.4.5(a), 我们取管 V 是由积分曲线 $\overline{Q_5^+ Q_1^+}, \overline{Q_4^+ Q_2^+}$ 、线段 $\overline{Q_5^+ Q_4^+}$ 和曲线 $\overline{Q_2^+ Q_1^+}$ 围城的有界开域. 容易知道 $S \subset V$ (其中 $S = \{(x, y) \in R_+^2 | x = \frac{d}{c(1-p)}, q_1 < y < q_2\}$, q_1 和 q_2 分别由 (2.4.58) 和 (2.4.59) 式所定义) 和

- (i) $\Pi(z, t) \in V$ (其中 $z = (x, y)$) 对任意 $z \in S$ 和 $-r < t < r$ 成立;
- (ii) 对每一 $z \in V$, 存在唯一 $r(z)$ 满足 $|r(s)| < r$ 使得 $\Pi(z, r(z)) \in S$;
- (iii) $V = \{\Pi(z, t) | z \in S, -r < t < r\}$.

根据管和 (r, V) -截痕的定义我们知道开集 V 在 R_+^2 中是一个管且 S 是管 V 中的一个 (r, V) -截痕. 注意到 (R_+^2, Π, R_+) 是一个动力系统且集合 $M \in R_+^2$ 和 $S \subset M$. 因此对每一个属于集合 M 且位于管 V 中的点 z , V 的截痕一定位于集合 M 中. 这说明了集合 $M \subset R_+^2$ 是好放置的. 根据定理 1.1.1 和定理 1.1.2 我们知道函数 Φ 在 R_+^2 上是连续的.

如果任意从 $(x_0^+, y_0^+) \in \mathcal{D}_{h_1}$ 出发的轨线既不是阶 1 周期解也不是阶 2 周期解 (不失一般性, 我们选择 $(x_0^+, y_0^+) \in \mathcal{D}_{h_1} \cap N$), 即 $y_0^+ \neq y_1^+ \neq y_2^+$, 则根据定理 2.4.5 和推论 2.4.1, 对任意的正整数 k , 所有脉冲点的可能排序为:

- (a) 如果 $y_1^+ < y_0^+ < y_2^+$, 则

$$\frac{a}{b} < \cdots < y_{2k+1}^+ < \cdots < y_3^+ < y_1^+ < y_0^+ < y_2^+ < \cdots < y_{2k}^+ < \cdots \leq \frac{a}{b} + \tau.$$

- (b) 如果 $y_1^+ < y_2^+ < y_0^+$, 则

$$\frac{a}{b} < y_1^+ < y_3^+ < \cdots < y_{2k+1}^+ < \cdots < y_{2k}^+ < \cdots < y_2^+ < y_0^+ \leq \frac{a}{b} + \tau.$$

- (c) 如果 $y_2^+ < y_0^+ < y_1^+$, 则

$$\frac{a}{b} < \cdots < y_{2k}^+ < \cdots < y_2^+ < y_0^+ < y_1^+ < \cdots < y_{2k+1}^+ < \cdots \leq \frac{a}{b} + \tau.$$

- (d) 如果 $y_0^+ < y_2^+ < y_1^+$, 则

$$\frac{a}{b} < y_0^+ < y_2^+ < \cdots < y_{2k}^+ < \cdots < y_{2k+1}^+ < \cdots < y_3^+ < y_1^+ \leq \frac{a}{b} + \tau.$$

以上四种情况说明存在两个正常数 y_1^*, y_2^* 使得

$$\frac{a}{b} \leq \lim_{k \rightarrow \infty} y_{2k+1}^+ = y_1^* \leq \frac{a}{b} + \tau, \quad \frac{a}{b} \leq \lim_{k \rightarrow \infty} y_{2k}^+ = y_2^* \leq \frac{a}{b} + \tau. \quad (2.4.68)$$

如果在马蹄吸引子 \mathcal{D}_{h_1} 中情形 (a) 发生, 则 $y_1^* < y_2^*$ 一定成立. 由于函数 $\Phi(z)$ 是连续的, 且 $\{z_k^+\} = \{(\frac{d}{c}, y_k^+)\}$ 是序列紧的. 根据定理 1.1.1, 对任意

$z \in F$, Π_2 是一个轨道渐近稳定的阶 2 的周期解, 周期为 $\sum_{k=1}^2 \Phi(z_k)$, 其中 $F = \{z_1 = (\frac{d}{c}, y_1^*), z_2 = (\frac{d}{c}, y_2^*)\}$. 进一步, 由于 $\frac{a}{b} < y_1^* < y_0^+$, 根据定理 2.4.4 我们得到阶 1 周期解一定包含在阶 2 周期解的内部.

如果在马蹄吸引子 \mathcal{D}_{h_1} 中情形 (b) 发生, 则 $y_1^* \leq y_2^*$ 一定成立. 如果 $y_1^* < y_2^*$, 利用与上面相同的方法知道 $\Pi_2(z \in F)$ 是一个轨道渐近稳定的阶 2 周期解. 如果 $y_1^* = y_2^*$, 则阶 1 周期解是轨道渐近稳定的.

情形 (c) 和 (d) 相同于情形 (a) 和 (b). 因此定理的结论成立. \square

推论 2.4.2 假设 $\tau \geq \max\{\frac{a}{b}, |PP_1^+|\}$, $x_1 = \frac{d}{c(1-p)}$, $\Pi_{z_0^+}(t)$ 是一条从 $(x_0^+, y_0^+) \in (\Omega_{x_1} \setminus \mathcal{ID}_{\tau_{P_5^+}}) \cup (\mathcal{ID}_{\tau_{P_2^+}} \setminus \mathcal{D}_{\bar{r}})$ 且满足 $x_0^+ < x_1$ 出发的轨线, 则下面结论之一一定成立:

$$(i) \lim_{t \rightarrow \infty} \rho(\Pi_{z_0^+}(t), \Pi^1) = 0;$$

$$(ii) \lim_{t \rightarrow \infty} \rho(\Pi_{z_0^+}(t), \Pi^2) = 0,$$

其中 $\Pi^n (n = 1, 2)$ 是包含在马蹄吸引子 \mathcal{D}_{h_1} 中的阶 n 周期解.

注记 2.4.6 对马蹄型吸引子 $\mathcal{D}_{h_i} (i = 2, \dots, 5)$ 我们有相同于定理 2.4.11 的结论. 特别的马蹄型吸引子的内部结构是下面的情形之一:

(a) 存在唯一一个阶 1 周期解, 其它从马蹄型吸引子内部出发的轨线当 $t \rightarrow \infty$ 都渐近的趋向它 (在第 2.4.5 节, 我们给出了这种情况发生的充分条件);

(b) 阶 1 周期解和阶 2 周期解共存, 其它从马蹄型吸引子内部出发的轨线当 $t \rightarrow \infty$ 都渐近的趋向阶 2 周期解或阶 1 周期解;

(c) 马蹄型吸引子的内部可能被阶 2 周期解充满 (例如, 这种情况可能在定理 2.4.8 中当 $|P_0^+P_1^+| < \tau < |PP_1^+|$ 和 $q_1 = \bar{q}_2$ 时发生).

2.4.5 最大不变集的存在性和阶 1 周期解的全局稳定性

从第 2.4.3 和第 2.4.4 节, 我们注意到正不变集 $\mathcal{D}_{h_i} (i = 1, \dots, 5)$ 不是不变集. 这一节, 我们的主要目的是利用 Lyapunov 函数研究系统 (2.4.1) 包含在 \mathcal{D}_{h_i} 中的最大不变集的存在性. 同时, 我们给出一些保证阶 1 周期解关于集合 Ω_{x_1} 全局稳定性的充分条件. 相同的, 这一节我们只就集合 \mathcal{D}_{h_1} 给出主要结论.

为此我们取

$$H(x, y) = by + cx - a \ln(y) - d \ln(x) + H_0, \quad H_0 = a \left(\ln\left(\frac{a}{b}\right) - 1 \right) + d \left(\ln\left(\frac{d}{c}\right) - 1 \right) \quad (2.4.69)$$

为 Lyapunov 函数. 则对任意 $(x, y) \in \Omega_{x_1} \setminus M$, 我们有

$$\frac{dH}{dt}|_{(2.4.1)} = c\dot{x} - d\frac{\dot{x}}{x} + b\dot{y} - a\frac{\dot{y}}{y} = 0, \quad (2.4.70)$$

对任意 $(x, y) \in M$ 我们有

$$\begin{aligned} H(x + \Delta x, y + \Delta y) - H(x, y) &= H((1-p)x_1, y + \tau) - H(x_1, y) \\ &= b(y + \tau) + c(1-p)x_1 \\ &\quad - a \ln(y + \tau) - d \ln((1-p)x_1) \\ &\quad - [by + cx_1 - a \ln(y) - d \ln(x_1)] \\ &= b\tau - cp x_1 - a \ln\left(\frac{y+\tau}{y}\right) - d \ln(1-p). \end{aligned} \quad (2.4.71)$$

利用 $x_1 = \frac{d}{c(1-p)}$ 得到

$$H((1-p)x_1, y + \tau) - H(x_1, y) = b\tau - a \ln\left(\frac{y + \tau}{y}\right) - d\left(\frac{p}{1-p} + \ln(1-p)\right). \quad (2.4.72)$$

因此, 如果 $b\tau > d\left(\frac{p}{1-p} + \ln(1-p)\right)$ 且

$$y \leq \frac{\tau}{\exp\left(\frac{b\tau}{a} - \frac{d}{a}\left(\frac{p}{1-p} + \ln(1-p)\right)\right) - 1} \triangleq \bar{q}_1, \quad (2.4.73)$$

则我们有 $H((1-p)x_1, y + \tau) - H(x_1, y) \leq 0$ 成立. 因此, 如果 $\tau \geq \max\{\frac{a}{b}, |PP_1^+|\}$, $q_2 \leq \bar{q}_1$ 且 $z \in \bar{S} = \{(x, y) \in R_+^2 | x = \frac{d}{c(1-p)}, q_1 \leq y \leq q_2\} \subset M$, 则我们有

$$H((1-p)x_1, y + \tau) - H(x_1, y) \leq 0 \quad (2.4.74)$$

成立, 其中 $|PP_1^+|, q_1, q_2$ 分别由 (2.4.56) 式, (2.4.58) 式和 (2.4.59) 式所定义.

令

$$\mathcal{R} \triangleq \{z \in \mathcal{D}_{h_1} | z \notin \bar{S}\} \cup \{z \in \mathcal{D}_{h_1} | z \in \bar{S}, H((1-p)x_1, y + \tau) = H(x_1, y)\}. \quad (2.4.75)$$

容易知道 $\mathcal{R} \equiv \mathcal{D}_{h_1}$, 根据定理 1.2.3, 我们有下面的主要结论:

定理 2.4.12 假设 $\tau \geq \max\{\frac{a}{b}, |PP_1^+|\}$, $b\tau > d\left(\frac{p}{1-p} + \ln(1-p)\right)$ 和 $q_2 \leq \bar{q}_1$. 令 Ω 是包含在马蹄吸引子 \mathcal{D}_{h_1} 中最大的不变集, 则最大不变集 Ω 关于集合 $\Omega_{x_1} \setminus \mathcal{D}_{\bar{r}}$ 是全局一致吸引的. 也就是说, 对任意的 $z_0 \in \Omega_{x_1} \setminus \mathcal{D}_{\bar{r}}$, 我们有 $\Pi_{z_0} \rightarrow \Omega$.

推论 2.4.3 假设 $\tau \geq \max\{\frac{a}{b}, |PP_1^+|\}$, $b\tau > d\left(\frac{p}{1-p} + \ln(1-p)\right)$ 和 $q_2 \leq \bar{q}_1$. 进一步, 假设马蹄吸引子 \mathcal{D}_{h_1} 中除了阶 1 周期解 Π^1 外, 不包含其它的不变集, 则 Π^1 关于集合 $\Omega_{x_1} \setminus \mathcal{D}_{\bar{r}}$ 是全局渐近稳定的.

2.5 基于 IPM 策略和食饵依赖的消化模型

这一节的基本模型是考虑当捕食者捕食到食饵的数量很小时, 捕食者对食饵的消化能力随食饵的密度增加而增加. 为了研究这种情况下系统的稳定性, 我们利用下面简单的模型:

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = x(t)(a - by(t)), \\ \frac{dy(t)}{dt} = \frac{\lambda bx(t)y(t)}{1+bhx(t)} - dy(t), \end{cases} \quad (2.5.1)$$

其中 a, b, c, h, λ 和 d 是正常数, a 是食饵的自然死亡率, b 捕食者对食饵的搜寻率, h 是捕食者对食饵的消化时间, λ 是捕食者对食饵的消化率, d 是捕食者的死亡率.

一个简短的代数计算说明了系统 (2.5.1) 具有与系统 (2.2.1) 相同的等倾线. 如果 $\lambda > dh$, 则系统 (2.5.1) 有一个唯一的正平衡态 $(\frac{d}{\lambda b - dbh}, \frac{a}{b})$, 且是系统 (2.5.1) 的一个中心型奇点. 因此在下面的讨论中, 我们总假设 $\lambda > dh$ 成立.

2.5.1 具固定时刻脉冲效应和食饵依赖的消化模型

这一节我们考虑系统 (2.5.1) 具周期综合害虫管理的数学模型. 即通过周期脉冲捕杀一定比例的害虫或喷洒杀虫剂杀死一定比例的害虫和周期的投放一个常数天敌来控制害虫. 为此我们考虑下面固定时刻脉冲的脉冲微分方程:

$$\begin{cases} \left. \begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= x(t)(a - by(t)), \\ \frac{dy(t)}{dt} &= \frac{\lambda bx(t)y(t)}{1+bhx(t)} - dy(t), \end{aligned} \right\} & t \neq nT, \\ \left. \begin{aligned} \Delta x(t) &= -px(t), \\ \Delta y(t) &= \tau, \end{aligned} \right\} & t = nT, \end{cases} \quad (2.5.2)$$

其中 $\Delta x(t) = x(t^+) - x(t)$, $\Delta y(t) = y(t^+) - y(t)$, T 是脉冲周期.

利用引理 2.3.1 和第 2.3 节相同的方法, 我们得到系统 (2.5.2) 在第 n 个脉冲区间 $t_0 = (n-1)T \leq t \leq nT$ 上害虫消除周期解的表达式为

$$(0, y^*(t)) = (0, \frac{\tau \exp(-d(t - nT))}{1 - \exp(-dT)}). \quad (2.5.3)$$

对害虫消除周期解 (2.5.3) 有下面的主要结论:

定理 2.5.1 如果

$$T < \frac{1}{a} \ln\left(\frac{1}{1-p}\right) + \frac{b\tau}{ad} \triangleq T_{max}.$$

则 $(0, y^*(t))$ 是全局渐近稳定的.

证明 首先我们证明局部稳定性. 设 $(x(t), y(t))$ 是系统 (2.5.2) 的任一解. 周期解 $(0, y^*(t))$ 的局部稳定可利用系统的变分方程来证明. 为此作变换 $x(t) = u(t), y(t) = y^*(t) + v(t)$, 则相应线性方程的解为

$$\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \Phi(t) \begin{pmatrix} u(0) \\ v(0) \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t < T,$$

其中 Φ 满足

$$\frac{d\Phi}{dt} = \begin{pmatrix} a - by^*(t) & 0 \\ \lambda by^*(t) & -d \end{pmatrix} \Phi(t)$$

且 $\Phi(0) = I$ 是单位矩阵. 对上述变换系统 (2.5.2) 的脉冲条件变为

$$\begin{pmatrix} u(nT^+) \\ v(nT^+) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(nT) \\ v(nT) \end{pmatrix}.$$

因此, 如果矩阵

$$M = \begin{pmatrix} 1-p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Phi(T)$$

的两个特征值的模小于 1, 则周期解 $(0, y^*(t))$ 是局部稳定的. 实际上, 两个 Floquet 乘子是:

$$\mu_1 = e^{-dT} < 1, \quad \mu_2 = (1-p) \exp\left(\int_0^T (a - by^*(t)) dt\right),$$

根据 Floquet 理论, 系统 (2.5.2) 的解是局部稳定的如果 $|\mu_2| < 1$, 即 $T < \frac{1}{a} \ln\left(\frac{1}{1-p}\right) + \frac{b\tau}{ad}$.

其次我们证明全局稳定性. 取 $\epsilon > 0$ 使得

$$\delta \triangleq (1-p) \exp\left(\int_0^T (a - b(y^*(t) - \epsilon)) dt\right) < 1.$$

注意到 $\frac{dy(t)}{dt} > -dy(t)$, 我们可以考虑如下的脉冲微分方程:

$$\begin{cases} \frac{dz(t)}{dt} = -dz(t), & t \neq nT, \\ \Delta z(t) = \tau, & t = nT, \\ z(0^+) = y(0^+). \end{cases} \quad (2.5.4)$$

根据引理 2.3.1 和脉冲微分方程的比较定理 1.3.1 我们得到当 $t \rightarrow \infty$ 时, $y(t) \geq z(t)$ 和 $z(t) \rightarrow y^*(t)$, 因此对充分大的时间 t 有

$$y(t) \geq z(t) > y^*(t) - \epsilon. \quad (2.5.5)$$

不妨假设上式对所有的 $t \geq 0$ 成立。由 (2.5.2) 得

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} \leq x(t)(a - b(y^*(t) - \epsilon)), & t \neq nT, \\ x(nT^+) = (1 - p)x(nT), & t = nT. \end{cases} \quad (2.5.6)$$

又由脉冲微分方程的比较定理得

$$\begin{aligned} x((n+1)T) &\leq x(nT^+) \exp\left(\int_{nT}^{(n+1)T} (a - b(y^*(t) - \epsilon)) dt\right) \\ &= x(nT)(1 - p) \exp\left(\int_{nT}^{(n+1)T} (a - b(y^*(t) - \epsilon)) dt\right). \end{aligned} \quad (2.5.7)$$

则当 $n \rightarrow \infty$ 时, 有 $x(nT) \leq x(0^+) \delta^n$ 和 $x(nT) \rightarrow 0$ 。由于当 $nT < t \leq (n+1)T$ 时 $0 < x(t) \leq x(nT)(1 - p) \exp(aT)$, 因此当 $n \rightarrow \infty$ 时, 有 $x(t) \rightarrow 0$ 。□

图 2.5.1 给出了系统 (2.5.2) 害虫根除周期解的数值例子。从图上我们可以看出天敌 $y(t)$ 周期性的震动, 而害虫 $x(t)$ 很快的趋向零。其中参数 $T_{max} = 3.556$ 。

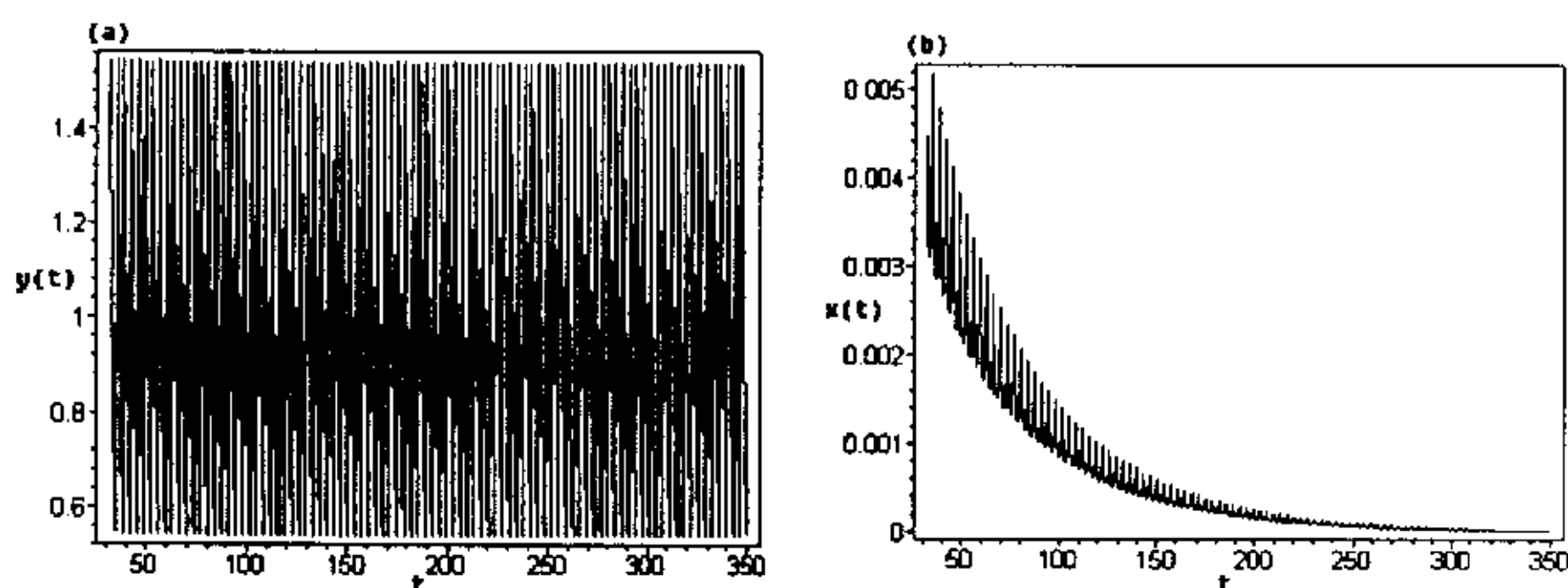


图 2.5.1: 捕食被捕食系统 (2.5.2) 的相图, 其中参数 $a = b = 1, d = 0.3, p = 0.02, \tau = 1, T = 3.5, \lambda = 0.5$ 。(a) 天敌种群随时间的变化情况。(b) 害虫种群随时间的变化情况。

注记 2.5.1 如果脉冲周期 T 超过 T_{max} , 则害虫根除周期解变为不稳定, 并且害虫数量 $x(t)$ 开始出现震动。如果周期 T 进一步增加, 系统 (2.5.2) 出现周期倍分现象并最终出现混沌。图 2.5.2 给出了系统 (2.5.2) 的一个典型的混沌吸引子的数值结果。从数值结果我们知道具固定时刻脉冲效应的食饵依赖的消化模型具有更多的动力学性质。

注记 2.5.2 系统 (2.5.2) 存在另一个有趣的现象就是超敏感性。超敏感性通常用来描述系统的解在一个相当长的时间后瞬时收敛到一个稳定吸引子的现象。这些瞬时的动力学现象发生的时间比外界周期环境波动的时间要大得多 [44, 53]。生态学家关心和考虑的一个重要问题是一个种群在经过几十代或几百

代后，其数量会走向一个什么状态？而超敏感性就说明了种群在经历了几千年或更长的时间后，系统任能持久。图 2.5.3 给出了一个超敏感性的例子。在这个例子中，幼年种群在经历了大约一千代后突然稳定到一个周期吸引子。

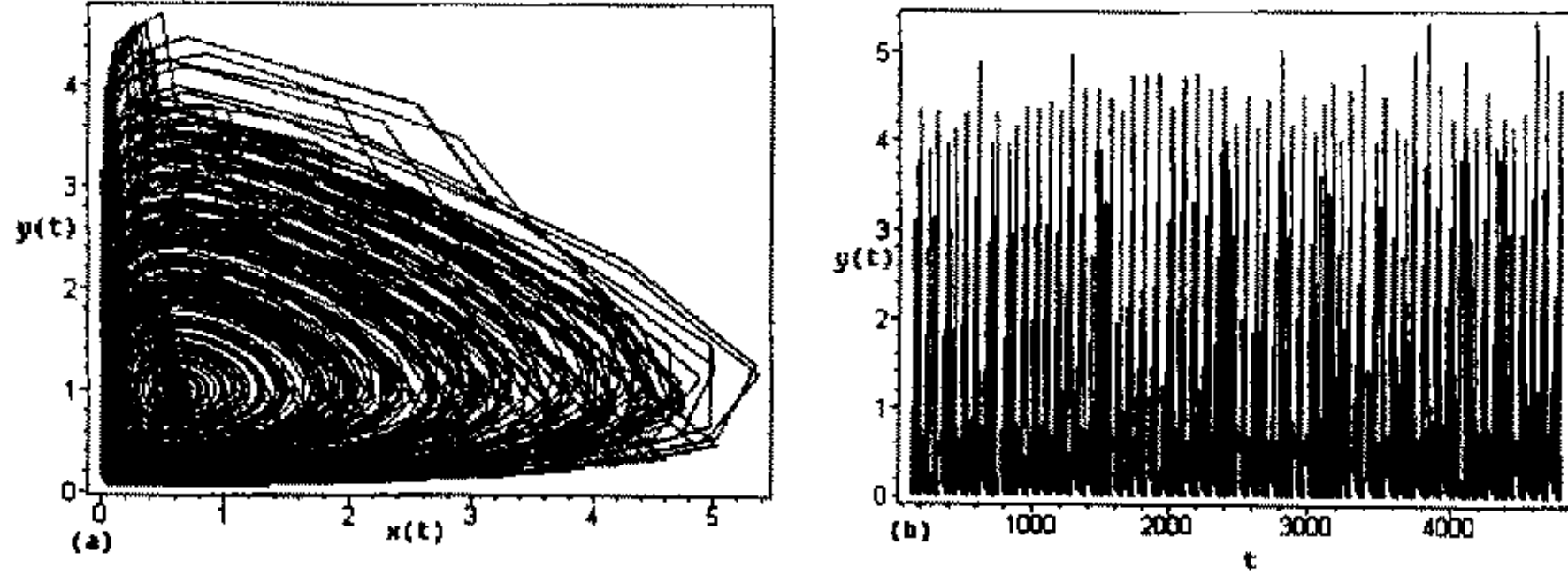


图 2.5.2：(a) 系统 (2.5.2) 的一个典型的混沌吸引子，参数为 $a = b = 1, d = 0.3, p = 0.02, \tau = 1, \lambda = 0.5, T = 16$ 。(b) 天敌种群随时间的变化情况。

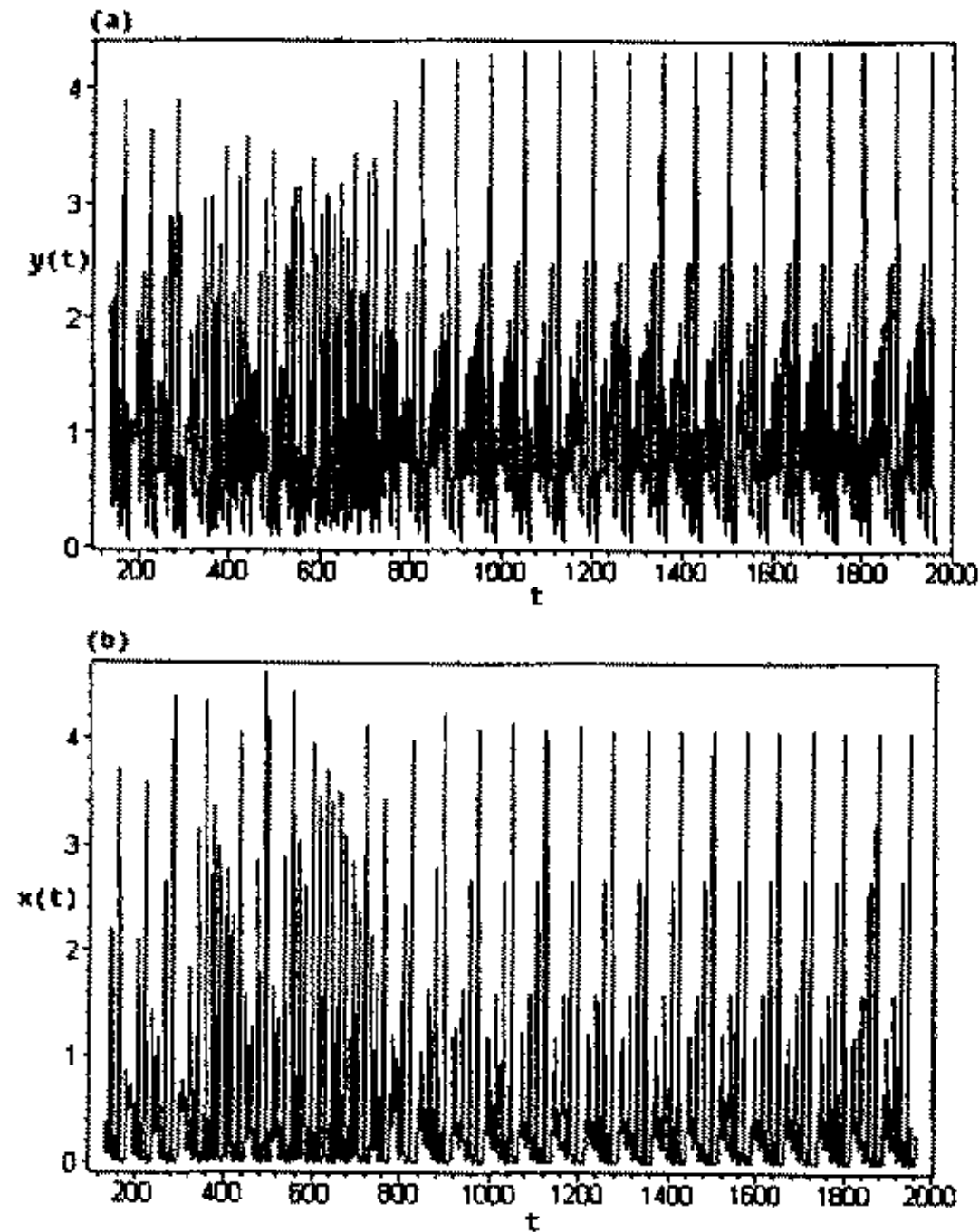


图 2.5.3：超敏感性。(a) 天敌种群随时间的变化情况，参数为 $a = b = 1, d = 0.3, p = 0.02, \tau = 1, \lambda = 0.5, T = 15$ 。(b) 害虫种群随时间的变化情况。

2.5.2 具状态依赖脉冲效应和食饵依赖的消化模型

综合害虫管理是一个综合利用生物的、化学的和机械的方法来长期控制害虫使之不超过经济危害水平 (如图 1.1.1)。类似于模型 2.4.1, 我们考虑如下具状态依赖脉冲效应和食饵依赖的消化模型:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx(t)}{dt} = x(t)(a - by(t)), \\ \frac{dy(t)}{dt} = \frac{\lambda bx(t)y(t)}{1 + bhx(t)} - dy(t), \end{array} \right\} \quad x \neq ET, \\ \left\{ \begin{array}{l} \Delta x(t) = -px(t), \\ \Delta y(t) = \tau, \end{array} \right\} \quad x = ET, \quad (2.5.8) \\ x(0^+) = x_0 < ET, \quad y(0^+) = y_0,$$

其中 ET 的生物意义我们已经在第 2.4 节给出. 这一节的主要目的是研究系统 (2.5.8) 的周期解的存在性及其相应的周期的解析表达式. 为了简单, 在下面的讨论中, 我们总假设 $\tau > 0$.

定理 2.5.2 : 如果 $x_1 \triangleq ET < \frac{\exp(\frac{bh\tau}{\lambda})(1-p)^{-\frac{hd}{\lambda}} - 1}{bh[1 - \exp(\frac{bh\tau}{\lambda})(1-p)^{(1-\frac{hd}{\lambda})}]}$, 则系统 (2.5.8) 存在唯一的阶 1 周期解.

证明 下面我们给出一个不同于 2.4 节阶 1 周期解的存在性证明方法. 设 $x = \xi(t), y = \eta(t)$ 是一个阶 1 周期解. 记 $x_1 = ET, \xi_0 = \xi(0^+), \eta_0 = \eta(0^+), \xi_1 = \xi(T) = x_1, \eta_1 = \eta(T), \xi_1^+ = \xi(T^+)$ 和 $\eta_1^+ = \eta(T^+)$. 根据 T -周期性, 我们有

$$\xi_1^+ = \xi_0, \quad \eta_1^+ = \eta_0,$$

即

$$(1-p)x_1 = \xi_0, \quad \eta_1 + \tau = \eta_0. \quad (2.5.9)$$

对 $t \in (0, T]$, 系统 (2.5.8) 的解 $x = \xi(t), y = \eta(t)$ 满足关系

$$\frac{\lambda}{h} \ln\left(\frac{1 + bh\xi(t)}{1 + bh\xi_0}\right) - d \ln\left(\frac{\xi(t)}{\xi_0}\right) = a \ln\left(\frac{\eta(t)}{\eta_0}\right) - b[\eta(t) - \eta_0]. \quad (2.5.10)$$

特别的, 当 $t = T$ 时我们有

$$\frac{\lambda}{h} \ln\left(\frac{1 + bhx_1}{1 + bh\xi_0}\right) - d \ln\left(\frac{x_1}{\xi_0}\right) = a \ln\left(\frac{\eta_1}{\eta_0}\right) - b[\eta_1 - \eta_0], \quad (2.5.11)$$

根据 (2.5.9) 得

$$\ln\left(\frac{1 + bhx_1}{1 + (1-p)bhx_1}\right)^{\frac{\lambda}{h}} (1-p)^d - b\tau = a \ln\left(\frac{\eta_0 - \tau}{\eta_0}\right),$$

则有

$$\eta_0 = \frac{\tau}{1 - \left(\frac{1+bhx_1}{1+(1-p)bhx_1}\right)^{\frac{\lambda}{ah}} (1-p)^{(d/a)} \exp\left(-\frac{b\tau}{a}\right)}. \quad (2.5.12)$$

如果 $\left(\frac{1+bhx_1}{1+(1-p)bhx_1}\right)^{\frac{\lambda}{ah}} (1-p)^{(d/a)} \exp\left(-\frac{b\tau}{a}\right) < 1$, 则有 $\eta_0 > 0$ 成立, 即

$$x_1 = ET < \frac{\exp\left(\frac{bh\tau}{\lambda}\right)(1-p)^{-\frac{hd}{\lambda}} - 1}{bh[1 - \exp\left(\frac{bh\tau}{\lambda}\right)(1-p)^{(1-\frac{hd}{\lambda})}]}. \quad (2.5.13)$$

因此如果条件 (2.5.13) 成立, 则系统 (2.5.8) 有一个唯一的阶 1 周期解. \square

根据轨道稳定和具有渐近相图的性质的定义 1.2.1 和 1.2.2, 由定理 1.2.2 我们有下列的结论:

定理 2.5.3 如果 $x_1 = ET < \frac{q^{\frac{ha}{\lambda}} \exp\left(\frac{bh\tau}{\lambda}\right)(1-p)^{-\frac{hd}{\lambda}} - 1}{bh[1 - q^{\frac{ha}{\lambda}} \exp\left(\frac{bh\tau}{\lambda}\right)(1-p)^{(1-\frac{hd}{\lambda})}]} \triangleq ET_{max}$, 则阶 1 周期解 $(\xi(t), \eta(t))$ 是轨道稳定和具有渐近相图的性质, 其中 $q = 1 - \frac{2b\tau}{b\tau + a + \sqrt{b^2\tau^2 + a^2}}$.

证明 由定理 1.2.2, 我们可以计算系统在阶 1 周期解 $(\xi(t), \eta(t))$ 处的变分方程的乘子 μ_2 . 由于

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x} &= a - by, & \frac{\partial Q}{\partial y} &= \frac{\lambda bx}{1 + bhx} - d, \\ \frac{\partial a}{\partial x} &= -p, & \frac{\partial a}{\partial y} &= 0, & \frac{\partial b}{\partial x} &= \frac{\partial b}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} &= 1, & \frac{\partial \phi}{\partial y} &= 0, \\ \Delta_1 &= \frac{P_+}{P} = \frac{\xi_0(a - b\eta_0)}{\xi_1(a - b\eta_1)}, \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned} \int_0^T \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right) dt &= \int_0^T \left[(a - b\eta(t)) + \left(\frac{\lambda b\xi(t)}{1 + bh\xi(t)} - d\right)\right] dt \\ &= \int_0^T \left(\frac{\dot{\xi}(t)}{\xi(t)} + \frac{\dot{\eta}(t)}{\eta(t)}\right) dt = \int_0^T d \ln(\xi(t)\eta(t)) \\ &= \ln\left(\frac{\xi_1\eta_1}{\xi_0\eta_0}\right). \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} \mu_2 &= \Delta_1 \exp\left\{\int_0^T \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right) dt\right\} = \frac{\eta_1(a - b\eta_0)}{\eta_0(a - b\eta_1)} \\ &= \left(\frac{a - b\eta_0}{\eta_0}\right) / \left(\frac{a - b(\eta_0 - \tau)}{\eta_0 - \tau}\right), \end{aligned} \quad (2.5.14)$$

我们考虑下面的三种情况:

情形 (1): 如果 $\eta_0 \leq a/b$, 容易知道 $0 \leq \mu_2 < 1$.

情形 (2): 如果 $a - b\eta_0 < 0$ 和 $a - b(\eta_0 - \tau) > 0$, 则 $-1 < \mu_2 < 0$ 当且仅当

$$2b\eta_0^2 - 2\eta_0(b\tau + a) + a\tau < 0, \quad (2.5.15)$$

即 η_0 必需满足

$$a/b < \eta_0 < \frac{b\tau + a + \sqrt{b^2\tau^2 + a^2}}{2b}. \quad (2.5.16)$$

情形 (3): 如果 $a - b(\eta_0 - \tau) \leq 0$, 容易知道 $\mu_2 > 1$. 实际上, 当 $z > 0$ 时我们可以考虑函数 $f(z) = \frac{a-bz}{z}$, 且 $f'(z) = -\frac{a}{z^2} < 0$. 因此情形 (3) 是成立的.

结合情形 (1), (2) 并利用定理 1.2.2, 如果

$$0 < \eta_0 < \frac{b\tau + a + \sqrt{b^2\tau^2 + a^2}}{2b},$$

则阶 1 周期解 $(\xi(t), \eta(t))$ 是轨道稳定和具有渐近相图的性质的, 即

$$x_1 = ET < \frac{q^{\frac{ha}{\lambda}} \exp(\frac{bh\tau}{\lambda})(1-p)^{-\frac{hd}{\lambda}} - 1}{bh[1 - q^{\frac{ha}{\lambda}} \exp(\frac{bh\tau}{\lambda})(1-p)^{(1-\frac{hd}{\lambda})}]}$$

□

进一步根据方程 (2.5.8) 我们可以给出阶 1 周期解 $(\xi(t), \eta(t))$ 的周期的解析表达式.

由 (2.5.8) 的第二个方程有

$$dt = \frac{dx}{x(a - by(x))}, \quad (2.5.17)$$

我们可以利用下面的关系来确定 $y(x)$

$$\frac{\lambda}{h} \ln\left(\frac{1 + bhx}{1 + bh(1-p)x_1}\right) - d \ln\left(\frac{x}{(1-p)x_1}\right) = a \ln\left(\frac{y}{\eta_0}\right) - b(y - \eta_0). \quad (2.5.18)$$

即我们得到下支

$$y_0(x) = -\frac{a}{b} \text{LambertW}\left(0, -\frac{b}{a}\eta_0 e^B\right) = -\frac{a}{b} W\left(0, -\frac{b}{a}\eta_0 e^B\right), \quad (2.5.19)$$

和上支

$$y_1(x) = -\frac{a}{b} \text{LambertW}\left(-1, -\frac{b}{a}\eta_0 e^B\right) = -\frac{a}{b} W\left(-1, -\frac{b}{a}\eta_0 e^B\right), \quad (2.5.19')$$

其中

$$B = \frac{\lambda b \ln\left(\frac{1 + bhx}{1 + bh(1-p)x_1}\right) - db h \ln\left(\frac{x}{(1-p)x_1}\right) - b^2 h \eta_0}{abh}.$$

对于周期解 $(\xi(t), \eta(t))$ 的周期 T 我们有下面的两种情况:

情形 (1): 如果 $a/b < \eta_0 < \frac{b\tau + a + \sqrt{b^2\tau^2 + a^2}}{2b}$. 则由 $y = y_0(x)$ 所确定的下支是从点 $(x_{min}, \frac{a}{b})$ (记 $t = t|_{P_1}$) 到点 $(x_1, \eta_0 - \tau)$ (记 $t = t|_{P_2}$), 沿逆时针方向积分有

$$t|_{P_2} - t|_{P_1} = \int_{x_{min}}^{x_1} \frac{dx}{x(a - by_0(x))}, \quad (2.5.20)$$

由 $y = y_1(x)$ 所确定的上支是从点 $((1-p)x_1, \eta_0)$ (记 $t = t|_{P_3}$) 到点 $(x_{min}, \frac{a}{b})$ (记 $t = t|_{P_1}$), 沿逆时针方向积分有

$$t|_{P_1} - t|_{P_3} = \int_{(1-p)x_1}^{x_{min}} \frac{dx}{x(a - by_1(x))}, \quad (2.5.21)$$

其中 x_{min} 是当 $y = \frac{a}{b}$ 时方程 (2.5.18) 的最小的解. 因此周期 T_1 的积分表达式是:

$$T_1 = \int_{x_{min}}^{x_1} \frac{dx}{x(a - by_0(x))} - \int_{x_{min}}^{(1-p)x_1} \frac{dx}{x(a - by_1(x))}. \quad (2.5.22)$$

情形 (2): 如果 $0 < \eta_0 \leq \frac{a}{b}$. 这种情形我们只需考虑下支. 相似的, 周期 T_1 积分表达式是:

$$T_1 = \int_{(1-p)x_1}^{x_1} \frac{dx}{x(a - bh_0(x))}. \quad (2.5.23)$$

要使 (2.5.22) 和 (2.5.23) 有意义, 我们必需要求 $-e^{-1} \leq -\frac{b}{a}\eta_0 e^B$ 对所有的 $x \in [(1-p)x_1, x_1], x \in [x_{min}, x_1]$ and $x \in [x_{min}, (1-p)x_1]$ 都成立.

实际上, 容易知道不等式 $-\frac{b}{a}\eta_0 e^A < 0$ 是自然成立的, 且不等式 $-e^{-1} \leq -\frac{b}{a}\eta_0 e^A$ 等价于

$$f(x) \triangleq -\frac{\lambda}{ah} \ln\left(\frac{1 + bhx}{1 + bh(1-p)x_1}\right) + \frac{d}{a} \ln\left(\frac{x}{(1-p)x_1}\right) + \frac{b}{a}\eta_0 + \ln\left(\frac{a}{b\eta_0}\right) - 1 \geq 0, \quad (2.5.24)$$

由于 $\lambda > dh$, 则函数 $f(x)$ 在点 $x = \frac{d}{\lambda b - dbh}$ 处有一个唯一的正的最大值. 实际上由 (2.5.24) 式我们有

$$f'(x) = -\frac{\lambda b}{a} \frac{1}{1 + bhx} + \frac{d}{ax}, \quad f'\left(\frac{d}{\lambda b - dbh}\right) = 0$$

和

$$f''\left(\frac{d}{\lambda b - dbh}\right) = \frac{(\lambda b - dbh)^2}{a} \left(\frac{h}{\lambda} - \frac{1}{d}\right) < 0,$$

这说明了 $x = \frac{d}{\lambda b - dbh}$ 是函数 $f(x)$ 的唯一最大值点.

因此, 为了证明对所有的 $x \in [(1-p)x_1, x_1], x \in [x_{min}, x_1]$ 和 $x \in [x_{min}, (1-p)x_1]$, 不等式 $f(x) \geq 0$ 成立, 我们只需证明 $f(x_1) \geq 0, f((1-p)x_1) \geq 0$ 和 $f(x_{min}) \geq 0$.

容易知道 $f(x_{\min}) = 0$ 和 $f((1-p)x_1) = \frac{b}{a}\eta_0 + \ln(\frac{a}{b\eta_0}) - 1 \geq 0$ 成立.

由于

$$\begin{aligned} f(x_1) &= -\frac{\lambda}{ah} \ln\left(\frac{1+bhx_1}{1+bh(1-p)x_1}\right) + \frac{d}{a} \ln\left(\frac{1}{(1-p)}\right) + \frac{b}{a}\eta_0 + \ln\left(\frac{a}{b\eta_0}\right) - 1 \\ &= -\ln\left(\frac{1+bhx_1}{1+bh(1-p)x_1}\right)^{\frac{\lambda}{ah}} + \ln\left(\frac{1}{(1-p)}\right)^{\frac{d}{a}} + \frac{b}{a}\eta_0 + \ln\left(\frac{a}{b\eta_0}\right) - 1 \\ &= \ln\left[\left(\frac{1+bhx_1}{1+bh(1-p)x_1}\right)^{-\frac{\lambda}{ah}} (1-p)^{-\frac{d}{a}}\right] + \frac{b}{a}\eta_0 + \ln\left(\frac{a}{b\eta_0}\right) - 1, \end{aligned} \quad (2.5.25)$$

根据 (2.5.12) 有

$$\left(\frac{1+bhx_1}{1+bh(1-p)x_1}\right)^{\frac{\lambda}{ah}} (1-p)^{\frac{d}{a}} = \left(1 - \frac{\tau}{\eta_0}\right) \exp\left(\frac{b\tau}{a}\right), \quad (2.5.26)$$

则

$$\begin{aligned} f(x_1) &= \ln\left[\frac{\eta_0}{\eta_0 - \tau} \exp\left(-\frac{b\tau}{a}\right)\right] + \frac{b}{a}\eta_0 + \ln\left(\frac{a}{b\eta_0}\right) - 1 \\ &= \ln\left(\frac{\eta_0}{\eta_0 - \tau}\right) - \frac{b\tau}{a} + \frac{b}{a}\eta_0 + \ln\left(\frac{a}{b\eta_0}\right) - 1 \\ &= \ln\left(\frac{a}{b(\eta_0 - \tau)}\right) + \frac{b(\eta_0 - \tau)}{a} - 1. \end{aligned} \quad (2.5.27)$$

容易证明 $f(x_1) = \ln\left(\frac{a}{b(\eta_0 - \tau)}\right) + \frac{b(\eta_0 - \tau)}{a} - 1 \geq 0$ 成立. 综上所述, 我们得到下面的结论:

定理 2.5.4 : 如果 $a/b < \eta_0 < \frac{b\tau + a + \sqrt{b^2\tau^2 + a^2}}{2b}$, 则周期解 $(\xi(t), \eta(t))$ 的周期 T_1 满足下面的关系:

$$T_1 = \int_{x_{\min}}^{x_1} \frac{dx}{x(a - by_0(x))} - \int_{(x_{\min})}^{(1-p)x_1} \frac{dx}{x(a - by_1(x))}. \quad (2.5.28)$$

如果 $0 < \eta_0 \leq \frac{a}{b}$, 则周期解 $(\xi(t), \eta(t))$ 的周期 T_1 满足下面的关系:

$$T_1 = \int_{(1-p)x_1}^{x_1} \frac{dx}{x(a - by_0(x))}. \quad (2.5.29)$$

例 2.5.1 : 如果选择参数 $a = b = 1, d = 0.3, \tau = 1, h = 0.02, ET = 1.5, \lambda = 0.5$ 和 $p = 0.2$, 周期解 $(\xi(t), \eta(t))$ 的相图如图 2.5.4. 由于 $\frac{a}{b} = 1 < \eta_0 = 1.66 <$

$\frac{b\tau+a+\sqrt{b^2\tau^2+a^2}}{2b} = 1.707$ ，且根据 (2.5.28) 我们得到周期为 $T \approx 10.4$ 。

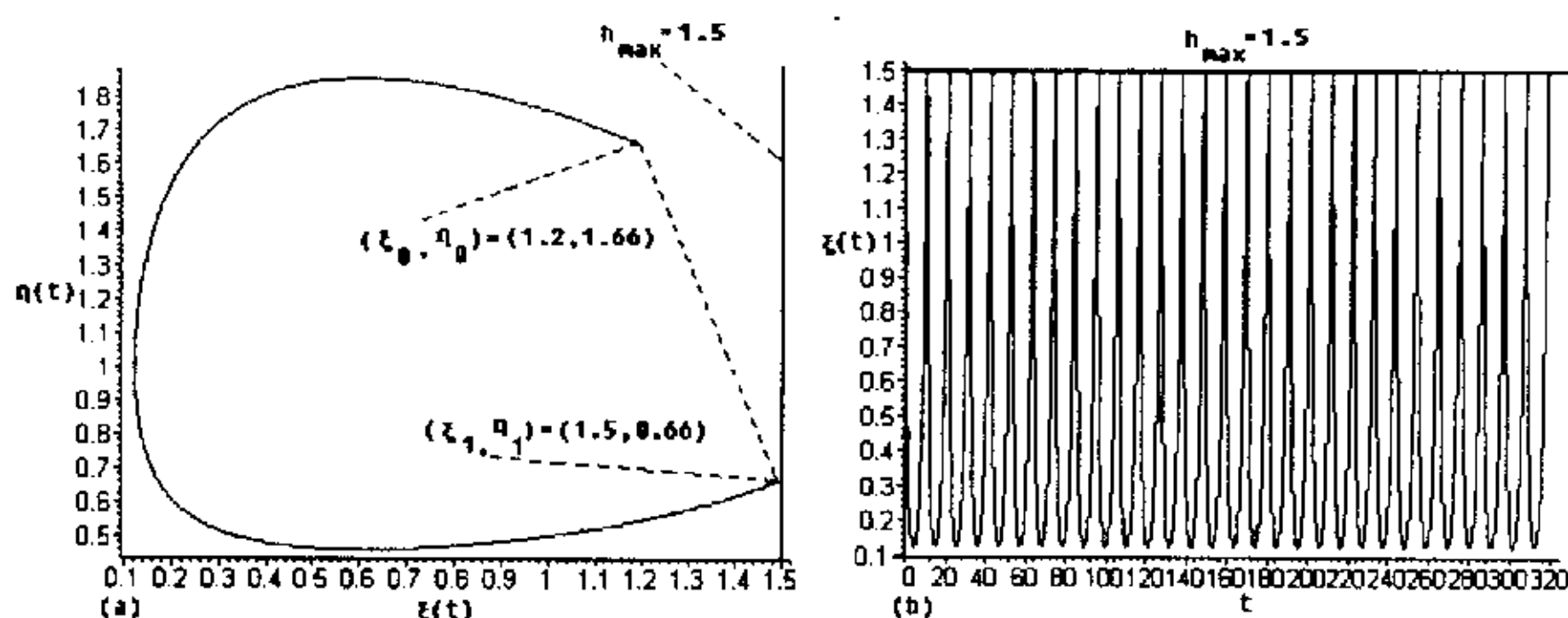


图 2.5.4 : (a) 轨道渐近稳定的周期解 $(\xi(t), \eta(t))$ ，初始条件为 $(\xi(0^+), \eta(0^+)) = (1.2, 1.66)$ 。(b) 害虫种群随时间的变化情况。

虽然模型 (2.5.8) 对 IPM 策略提供了一个很好的刻画，但是它完全忽略了外在环境因素对系统的影响。这些外在因素对系统有一个周期性 (季节性) 或不规则的 (环境的随机性、干扰和人类活动的随机性) 影响。它们如何影响系统周期解 $(\xi(t), \eta(t))$ 的存在性和稳定性? 为此我们考虑下面的小扰动系统:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx(t)}{dt} = x(t)(a - by(t)) + \epsilon g_1(x(t), y(t), \epsilon), \\ \frac{dy(t)}{dt} = \frac{\lambda bx(t)y(t)}{1+bx(t)} - dy(t) + \epsilon g_2(x(t), y(t), \epsilon), \\ \Delta x(t) = -px(t) + \epsilon I_1(x(t), y(t), \epsilon), \\ \Delta y(t) = \tau + \epsilon I_2(x(t), y(t), \epsilon), \\ x(0^+) = x_0 < ET, \quad y(0^+) = y_0. \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} x \neq ET, \\ \\ \\ \\ x = ET, \end{array} \quad (2.5.30)$$

假设函数 $g_j, I_j (j = 1, 2)$ 对所有的 $(x, y, \epsilon) \in R \times R \times J$ 是可微的，其中 $\epsilon \in J = (-\bar{\epsilon}, \bar{\epsilon})$ 是小参数，且方程 (2.5.30) 的解在区间 $t \in [0, T_1 + \sigma]$ 上有定义且关于参数是连续的。根据定理 1.2.1 我们有下面的结论:

定理 2.5.5 假设 $x_1 \triangleq ET < \frac{\exp(\frac{bh\tau}{\lambda})(1-p)^{-\frac{hd}{\lambda}} - 1}{bh[1 - \exp(\frac{bh\tau}{\lambda})(1-p)^{(1-\frac{hd}{\lambda})}]}$ ，则对充分小的 ϵ ，系统 (2.5.30) 存在一个 $T(\epsilon)$ -周期解 $P_\epsilon(t)$ 使得对所有 $t \in [0, T_1]$ 当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时成立

$$P_\epsilon(t) \rightarrow (\xi(t), \eta(t)), \quad T(\epsilon) \rightarrow T_1,$$

其中 T_1 是周期解 $(\xi(t), \eta(t))$ 的周期。

定理 2.5.5 说明了外在的小扰动不影响系统 (2.5.8) 周期解的存在性和稳定性。同样我们可以研究系统 (2.5.2) 各种正不变集、吸引子的存在性。

2.6 生物结论和需要进一步研究的问题

这一章, 我们建立了几个基于 IPM 策略的状态依赖的脉冲微分方程, 其主要目的是研究综合控制方案对害虫的影响. 综合害虫管理中的三种常用的方法 — 化学控制、生物控制和机械控制 — 被同时用来控制害虫使之不超过给定的经济临界 ET.

在研究中我们固定杀虫剂的用量 (即 p 是一个常数), 选择投放天敌的数量作为参数. 研究了系统的各种动力学行为. 其中包括: (a) 阶 1 周期解和阶 2 周期解的存在性以及他们的关系; (b) 不存在阶 $k(k \geq 3)$ 的周期解; (c) 正不变集、吸引子的存在性, 特别是马蹄型吸引子的存在性以及它们的内部结构; (d) 最大不变集的存在性和稳定性以及阶 1 周期解的全局稳定性. 从我们的主要结论知道我们能够完全控制害虫通过一次脉冲、两次脉冲和至多有限次脉冲、或一个周期性的脉冲控制. 从生物的观点, 这是非常有用的并能对害虫控制起到很好的作用.

从介绍中我们知道, ET 是 IPM 策略中的一个重要因子. 由于杀虫剂、天敌和收获的成本以及农作物的市场价格在计算 ET 时都被考虑到. 因此, 控制策略应该是动态的和变化的. 由于许多不确定因素, 特别是害虫种群的增长率使得大多数 ET 都是相对粗糙的. 其中有很多关于 EIL 的计算公式 [86,99,100,106]. 例如: $EIL = PD = \frac{CC}{V_a \times D_p}$, 其中 CC = 控制害虫的成本, V_a = 农作物的价值, D_p = 每一个害虫破坏的价值和 $ET = 80\%$ 的 EIL. 从我们的理论结果知道要想长远的控制害虫, ET 必须小于一个给定的常数, 并且这个常数能够根据系统的参数得到估计 (例如, 如果我们想控制害虫稳定到阶 1 的周期解, 一定要求 $ET < ET_{max} = \frac{a}{cp} \ln(q(1-p)^{-\frac{d}{a}}) + \frac{bz}{cp}$). 因此, 我们的理论结果发展和改进了 IPM 策略, 并能帮助我们得到更加精确的 ET, 这对害虫控制是非常重要的.

在现实生活中, 为了控制害虫, 我们必须详细的观察和记录害虫和天敌的数量, 这些数据对管理决策和控制策略的实施都起着非常重要的作用. 然而, 重复的观察和统计数据花费了大量的时间和金钱. 实际上, 我们的理论结果得到了系统周期解的周期 T , 并能通过周期性的脉冲策略成功的控制害虫而使得害虫不超过给定的 ET, (如图 2.4.1 和图 2.4.2, 其中阶 1 周期解的周期 $T_1 = 10.9$, 阶 2 周期解的周期 $T_2 = 11.1 + 10.78 = 21.88$). 因此, 我们仅仅需要知道害虫和天敌的初始值, 而不需要重复的进行观察和统计就能成功的控制害虫. 所以能够节约大量的人力和物力.

模型 (2.4.1) 是一个比较简短的 Volterra 模型. 它建立的过程中没有考虑种群的密度制约因素和捕食者对食饵的功能性反应. 因此, 我们有必要进一步研究具密度制约和各种功能性反应函数 (比如: Holling 功能性函数和率依赖的功能性函数) 的系统 (2.4.1), 这将更加符合实际, 也是我们今后要研究的问题.

第三章 具脉冲效应的周期 Lotka-Volterra 捕食 被捕食系统

3.1 生物背景

从第二章我们知道生物控制是综合害虫管理策略的关键因素之一 [30,99,105]。它是通过天敌助增来控制害虫的数量，这其中也包含了许多人类的活动。在实际生活中害虫天敌的生物控制元素包括：捕食者、拟寄生物和病原体，主要来源是通过天敌的自然繁殖和实验室培养。捕食者和拟寄生物的投放依赖于害虫所处的环境和害虫控制的目的。为了考虑外在天敌对原始食饵 - 捕食者系统的影响过程，可以用下面的经典系统来刻画这一过程：

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = ax(t) - \phi(x(t))y(t), \\ \dot{y}(t) = -by(t) + \gamma\phi(x(t))y(t) + p, \end{cases} \quad (3.1.1)$$

其中 a, b, γ 和 p 是正常数， $\phi(x)$ 是捕食者 $y(t)$ 对食饵的功能性反应函数，具体的生物意义可以参看文献 [12,65,105]。模型 (3.1.1) 的一个重要假设就是捕食者以一个常数数量 p 连续的输入。

渔业和生态系统的相互作用都受到环境和其它人类活动的影响，这些影响对可开发和再生资源的管理和利用都具有十分重要的意义。在许多实际的生活，种群数量可以被收获而减少，或通过放流苗种等人工增殖资源措施的管理而增加其数量。利用下面的模型，许多作者 [18-22] 研究了收获或存放对捕食 - 被捕食系统的影响：

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = xf(x, y) - E_1(x), \\ \dot{y}(t) = yg(x, y) - E_2(y), \end{cases} \quad (3.1.2)$$

其中 $x(t)$ 和 $y(t)$ 分别是食饵和捕食者的密度。函数 $f(x, y)$ 和 $g(x, y)$ 分别是两种群的内禀增长率；函数 $E_1(x)$ ($E_2(y)$) 表示人类活动对系统的影响 (例如：收获和存放)。如果 $E_1(x) = \bar{E}_1$ ， $E_2(y) = \bar{E}_2$ 是常数，表示一个常数量的食饵和捕食者被捕获；如果 $E_1(x) = \bar{E}_1x$ ， $E_2(y) = \bar{E}_2y$ ，表示收获和存放的种群数量与当时的种群数量成比例。

模型 (3.1.1) 和 (3.1.2) 总是假设人类的活动是连续的，然而实际生活中人类对外界资源的管理和利用总是季节性的或是离散的。同时考虑到自然界许多种群的出生率、死亡率以及人类对再生资源的管理等参数随季节呈周期变化这一规律。因此，模型 (3.1.2) 中人类的连续干扰应该用离散的脉冲干扰来代替，其相应的函数也应是周期函数。非自治脉冲微分方程给具有这类离散干扰的模型提供了一个自然的描述 [70]。在 Bainov 和他的合作者的书中给出了这类方程许多实际

例子 [9]。近来与种群动力学相关的脉冲微分方程的工作有：免疫接种 [2,94]，种群生态 [11,37] 和疾病的化学治疗 [69,85,91]。

本章我们将考虑下面具脉冲效应的 T - 周期捕食 - 被捕食系统：

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = \lambda l(t)u(t) - a(t)u^2(t) - b(t)u(t)v(t), \\ \dot{v}(t) = \mu m(t)v(t) + c(t)u(t)v(t) - d(t)v^2(t), \\ u(\tau_k^+) = (1 + c_k)u(\tau_k), \\ v(\tau_k^+) = (1 + d_k)v(\tau_k), \end{cases} \quad \begin{matrix} t \neq \tau_k, k \in Z_+, \\ t = \tau_k, k \in Z_+. \end{matrix} \quad (3.1.3)$$

其中 $l(t), m(t), a(t), b(t), c(t)$ 和 $d(t)$ 是连续的 T - 周期函数，并且满足 $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0, d \geq 0$ 和 $Z_+ = \{1, 2, \dots, \}$ 。假设

$$\frac{1}{T} \int_0^T l(t)dt = 1, \quad \frac{1}{T} \int_0^T m(t)dt = 1, \quad (3.1.4)$$

和 $c_k, d_k (k \in Z_+)$ 是常数，且存在一个整数 $q > 0$ 使得

$$c_{k+q} = c_k, \quad d_{k+q} = d_k, \quad \tau_{k+q} = \tau_k + T.$$

如果系统 (3.1.3) 没有脉冲影响，已有许多有意义的结果。其中关于系统正解的存在性、半平凡周期解和内部周期解的存在性问题我们可以参考以下文献 [5,76]。这一章的主要目的是通过研究模型 (3.1.3) 来说明人类活动对可再生资源的影响，我们的理论结果可在生物害虫控制、渔业资源的可持续发展以及在其它可再生资源的管理上得到应用。生物害虫控制是通过天敌助增来控制害虫以使害虫灭绝或使其数量不超过经济临界水平，而可再生资源的开发和利用的主要目的是保证资源的可持续发展。

系统 (3.1.3) 存在三种类型的非负 T - 周期解：种群灭绝周期解 $(0, 0)$ ，通常称为平凡周期解；一个分量消失的周期解，通常称为半平凡周期解；内部周期解。通过单调迭代方案，我们得到平凡周期解和半平凡周期解的全局稳定性条件和系统持续生存的充分条件。进一步利用重合度理论、正解的大范围分歧理论我们讨论了系统 (3.1.3) 内部周期解的存在性。最后，我们给出了所得结论的生物学暗指和相应的生物结论，并给出具体的例子说明了理论结果的应用。

3.2 具脉冲效应的单种群 Logistic 模型

给定 $\alpha, \beta \in PC_T, \beta > 0$ ，我们考虑下面的具脉冲效应的单种群 Logistic 模型

$$\begin{cases} \dot{\omega}(t) = \alpha(t)\omega(t) - \beta(t)\omega^2(t), & t \neq \tau_k, k \in Z_+, \\ \omega(\tau_k^+) = (1 + h_k)\omega(\tau_k), & t = \tau_k, k \in Z_+. \end{cases} \quad (3.2.1)$$

其中 $h_{k+q} = h_k (k \in Z_+)$ 是常数且满足 $1 + h_k > 0 (k \in Z_+)$ 。

容易知道系统 (3.2.1) 存在唯一周期解的充分必要条件是 $\bar{\alpha} > \frac{1}{T} \ln \left[\prod_{i=1}^q \frac{1}{1+h_i} \right]$ 。实际上, 对系统 (3.2.1), 我们可以作变换 $\omega = \frac{1}{x}$ 而得到下面的线性非齐次脉冲方程

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -\alpha(t)x(t) + \beta(t), & t \neq \tau_k, k \in Z_+, \\ x(\tau_k^+) = \frac{1}{1+h_k}x(\tau_k), & t = \tau_k, k \in Z_+. \end{cases} \quad (3.2.2)$$

令

$$W(t, s) = \prod_{s \leq \tau_k < t} \frac{1}{1+h_k} \exp\left(-\int_s^t \alpha(r) dr\right)$$

是系统 (3.2.2) 相应线性齐次脉冲方程的 Cauchy 矩阵, 则

$$x(t) = W(t, 0)x(0) + \int_0^t W(t, s)\beta(s)ds \quad (3.2.3)$$

是方程 (3.2.2) 的一个解。如果 $x(0) = x(T)$, 则这个解是 T -周期的, 或者如果

$$(1 - W(T, 0))x(0) = \int_0^T W(T, s)\beta(s)ds. \quad (3.2.4)$$

因为 $\bar{\alpha} > \frac{1}{T} \ln \left[\prod_{i=1}^q \frac{1}{1+h_i} \right]$ 和

$$\int_0^T W(T, s)\beta(s)ds > 0$$

成立, 则齐次脉冲方程

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -\alpha(t)x(t), & t \neq \tau_k, k \in Z_+, \\ x(\tau_k^+) = \frac{1}{1+h_k}x(\tau_k), & t = \tau_k, k \in Z_+. \end{cases} \quad (3.2.5)$$

的乘子 $W(T, 0)$ 是小于 1 的, 所以方程 (3.2.4) 有一个唯一的解满足 $x(0) = p_0 > 0$ 。对于初值 $x(0) = p_0$, 我们得到系统 (3.2.2) 唯一正的 T -周期解, 记为 $p(t)$, 则函数 $\theta_{[\alpha, \beta]} := x(t) = \frac{1}{p(t)}$ 是系统 (3.2.1) 的唯一的 T -周期解。

在方程 $\dot{\theta}_{[\alpha, \beta]} = \alpha\theta_{[\alpha, \beta]} - \beta\theta_{[\alpha, \beta]}^2$ 两边同除以 $\theta_{[\alpha, \beta]}$, 然后分别在区间 $(0, \tau_1)$, $(\tau_k, \tau_{k+1}) (k = 1, \dots, q-1)$ 和 (τ_q, T) 上积分得:

$$\begin{aligned} \ln \left[\frac{\theta_{[\alpha, \beta]}(\tau_1)}{\theta_{[\alpha, \beta]}(0^+)} \right] &= \int_0^{\tau_1} \alpha - \int_0^{\tau_1} \beta\theta_{[\alpha, \beta]}, \\ \ln \left[\frac{\theta_{[\alpha, \beta]}(\tau_{k+1})}{\theta_{[\alpha, \beta]}(\tau_k^+)} \right] &= \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \alpha - \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \beta\theta_{[\alpha, \beta]}, \quad k = 1, \dots, q-1, \\ \ln \left[\frac{\theta_{[\alpha, \beta]}(T)}{\theta_{[\alpha, \beta]}(\tau_q^+)} \right] &= \int_{\tau_q}^T \alpha - \int_{\tau_q}^T \beta\theta_{[\alpha, \beta]}. \end{aligned}$$

同时相加上面 $q+1$ 个等式我们得到

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{T} \int_0^T \beta\theta_{[\alpha, \beta]} + \frac{1}{T} \ln \left[\prod_{i=1}^q \frac{1}{1+h_i} \right]. \quad (3.2.6)$$

对任意的 α , 如果 $\bar{\alpha} - \frac{1}{T} \ln \left[\prod_{i=1}^q \frac{1}{1+h_i} \right] \leq 0$, 我们定义 $\theta_{[\alpha, \beta]} \equiv 0$. 给定 $\omega_0 \in R$ 和两个函数 $a, b \in PC([0, \infty), R)$ 且满足 $b > 0$, 我们记 $\Phi_{[a, b]}(\cdot, t_0^+, \omega_0)$ 是下面 Cauchy 问题的唯一解

$$\begin{cases} \dot{\omega}(t) = a\omega(t) - b\omega^2(t), & t \geq t_0 (\neq \tau_k), k \in Z_+, \\ \omega(\tau_k^+) = (1+h_k)\omega(\tau_k), & t = \tau_k, k \in Z_+, \\ \omega(t_0^+) = \omega_0. \end{cases} \quad (3.2.7)$$

则 $\Phi_{[a, b]}(\cdot, t_0^+, \omega_0)$ 是正的且对所有的 $t \geq t_0$ 有定义. 下面的引理给出了周期解 $\theta_{[\alpha, \beta]}$ 的全局吸引性.

引理 3.2.1 给定 $\alpha, \beta \in PC_T$ 且满足 $\beta > 0$. 对任意 $\omega_0 > 0$ 和 $k \in Z_+$, 如果 $\bar{\alpha} - \frac{1}{T} \ln \left[\prod_{i=1}^q \frac{1}{1+h_i} \right] > 0$ 和 $1+h_k > 0$, 则

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\Phi_{[\alpha, \beta]}(t, t_0^+, \omega_0) - \theta_{[\alpha, \beta]}| = 0.$$

证明 根据 (3.2.3) 和 (3.2.4), 系统 (3.2.1) 满足初值 $\omega(t_0) = \omega_0 > 0$ 的解的一般形式是:

$$\Phi_{[\alpha, \beta]} = \left(\frac{1}{\omega_0} e^{(-\int_{t_0}^t \alpha(\tau) d\tau)} \prod_{t_0 \leq \tau_k < t} \frac{1}{1+h_k} + \int_{t_0}^t \beta(s) e^{(-\int_s^t \alpha(\tau) d\tau)} \prod_{s \leq \tau_k < t} \frac{1}{1+h_k} ds \right)^{-1}, \quad (3.2.8)$$

并且容易证明

$$\theta_{[\alpha, \beta]} = \left[e^{\int_0^T \alpha(\tau) d\tau} \prod_{k=1}^q (1+h_k) - 1 \right] \left[\int_t^{t+T} \beta(s) \exp\left(-\int_s^t \alpha(\tau) d\tau\right) \prod_{t \leq \tau_k < s} (1+h_k) ds \right]^{-1}. \quad (3.2.9)$$

是系统 (3.2.1) 的一个 T -周期解.

在 (3.2.8) 中, 不失一般性, 我们假设 $t_0 = 0$, 并且对所有的 t , 存在 $n \in Z_+$ 使得 $t \in ((n+1)T, (n+1)T + T]$. 根据引理 3.2.1 的条件我们有

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow \infty} \prod_{0 \leq \tau_k < t} \frac{1}{1+h_k} e^{(-\int_0^t \alpha(\tau) d\tau)} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \prod_{0 \leq \tau_k < T} \frac{1}{1+h_k} \prod_{T \leq \tau_k < 2T} \frac{1}{1+h_k} \cdots \prod_{(n+1)T \leq \tau_k < t} \frac{1}{1+h_k} \\ & \quad e^{-\int_0^T \alpha(\tau) d\tau - \int_T^{2T} \alpha(\tau) d\tau - \cdots - \int_{(n+1)T}^t \alpha(\tau) d\tau} \quad (3.2.10) \\ &= \prod_{(n+1)T \leq \tau_k < t} \frac{1}{1+h_k} e^{-\int_{(n+1)T}^t \alpha(\tau) d\tau} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\prod_{k=1}^q \frac{1}{1+h_k} e^{(-\int_0^T \alpha(\tau) d\tau)} \right]^n \\ &= 0. \end{aligned}$$

因此我们只需证明极限

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left[\int_0^t \beta(s) e^{-\int_s^t \alpha(\tau) d\tau} \prod_{s \leq \tau_k < t} \frac{1}{1+h_k} ds - \frac{\int_t^{t+T} \beta(s) e^{-\int_s^t \alpha(\tau) d\tau} \prod_{t \leq \tau_k < s} (1+h_k) ds}{\frac{A}{y(T)} - 1} \right] = 0 \quad (3.2.11)$$

成立. 其中 $A = e^{\int_0^T \alpha(\tau) d\tau}$, $y(T) = \prod_{k=1}^q \frac{1}{1+h_k}$. 由于

$$\begin{aligned} & \int_0^t \beta(s) e^{-\int_s^t \alpha(\tau) d\tau} \prod_{s \leq \tau_k < t} \frac{1}{1+h_k} ds - \frac{\int_t^{t+T} \beta(s) e^{-\int_s^t \alpha(\tau) d\tau} \prod_{t \leq \tau_k < s} (1+h_k) ds}{\frac{A}{y(T)} - 1} \\ &= \prod_{0 \leq \tau_k < t} \frac{1}{1+h_k} e^{-\int_0^t \alpha(\tau) d\tau} \left[\int_0^t \beta(s) e^{-\int_s^0 \alpha(\tau) d\tau} \prod_{0 \leq \tau_k < s} (1+h_k) ds \right. \\ & \quad \left. - \frac{\int_t^{t+T} \beta(s) e^{-\int_s^0 \alpha(\tau) d\tau} \prod_{0 \leq \tau_k < s} (1+h_k) ds}{\frac{A}{y(T)} - 1} \right] \\ &= \prod_{0 \leq \tau_k < t} \frac{1}{1+h_k} e^{-\int_0^t \alpha(\tau) d\tau} \cdot F(t), \end{aligned} \quad (3.2.12)$$

其中

$$F(t) = \left[\int_0^t \beta(s) e^{\int_0^s \alpha(\tau) d\tau} \prod_{0 \leq \tau_k < s} (1+h_k) ds - \frac{\int_t^{t+T} \beta(s) e^{\int_0^s \alpha(\tau) d\tau} \prod_{0 \leq \tau_k < s} (1+h_k) ds}{\frac{A}{y(T)} - 1} \right], \quad (3.2.13)$$

并且存在一个 $j \in Z_+$ 使得 $t \in (\tau_{j-1}, \tau_j]$. 如果 $t \neq \tau_j$, 则有

$$\begin{aligned} \frac{dF(t)}{dt} &= \beta(t) e^{\int_0^t \alpha(\tau) d\tau} \prod_{0 \leq \tau_k < t} (1+h_k) - \frac{\beta(t)}{\frac{A}{y(T)} - 1} e^{\int_0^{t+T} \alpha(\tau) d\tau} \prod_{0 \leq \tau_k < t+T} (1+h_k) \\ & \quad + \frac{\beta(t)}{\frac{A}{y(T)} - 1} e^{\int_0^t \alpha(\tau) d\tau} \prod_{0 \leq \tau_k < t} (1+h_k) \\ &= \beta(t) e^{\int_0^t \alpha(\tau) d\tau} \prod_{0 \leq \tau_k < t} (1+h_k) - \frac{\beta(t)}{\frac{A}{y(T)} - 1} e^{\int_0^t \alpha(\tau) d\tau} \frac{A}{y(T)} \prod_{0 \leq \tau_k < t} (1+h_k) \\ & \quad + \frac{\beta(t)}{\frac{A}{y(T)} - 1} e^{\int_0^t \alpha(\tau) d\tau} \prod_{0 \leq \tau_k < t} (1+h_k) \\ &= 0. \end{aligned} \quad (3.2.14)$$

如果 $t = \tau_j$, 由 (3.2.13) 式有 $\lim_{t \rightarrow \tau_j^+} F(t) = F(\tau_j^+) = (1+h_j)F(\tau_j)$ 和 $F(\tau_j^-) = F(\tau_j)$

成立. 根据 (3.2.14) 知函数 $F(t)$ 对所有 $t \geq 0$ 是有界的. 因此方程 (3.2.10) 和 (3.2.12) 说明了引理 3.2.1 的结论是正确的. \square

从 (3.2.8) 和 (3.2.9) 我们容易得到下面的结论:

推论 3.2.1 令 $\alpha_j, \beta_j \in PC_T, j = 1, 2$, 满足 $\alpha_1 \leq \alpha_2$ 和 $\beta_1 \geq \beta_2 > 0$. 则

$\theta_{[\alpha_1, \beta_1]} \leq \theta_{[\alpha_2, \beta_2]}$. 进一步如果 $\bar{\alpha}_2 - \frac{1}{T} \ln \left[\prod_{i=1}^q \frac{1}{1+h_i} \right] > 0$ 并且严格不等式 $\alpha_1 < \alpha_2$ 和 $\beta_1 > \beta_2$ 之一成立, 则 $\theta_{[\alpha_1, \beta_1]} \ll \theta_{[\alpha_2, \beta_2]}$.

下面的比较结果是非常标准和有用的:

引理 3.2.2 给定 $\omega_0 \in R$ 且满足 $\omega_0 > 0$. 考虑两个函数 $a, b \in PC([t_0, \infty), R)$ 满足 $b > 0$. 假设 $\omega \in PC^1$ 使得

$$\begin{cases} \dot{\omega}(t) \geq a\omega(t) - b\omega^2(t), & t \geq t_0 (\neq \tau_k), \\ \omega(\tau_k^+) \geq (1+h_k)\omega(\tau_k), & t = \tau_k, \\ \omega(t_0^+) \geq \omega_0 \end{cases} \quad (3.2.15)$$

成立. 则对所有的 $t \geq t_0$ 有 $\omega(t) \geq \Phi_{[a, \beta]}(\cdot; t_0^+, \omega_0)$. 相似的, 如果

$$\begin{cases} \dot{\omega}(t) \leq a\omega(t) - b\omega^2(t), & t \geq t_0 (\neq \tau_k), \\ \omega(\tau_k^+) \leq (1+h_k)\omega(\tau_k), & t = \tau_k, \\ \omega(t_0^+) \leq \omega_0 \end{cases} \quad (3.2.16)$$

成立. 则对所有的 $t \geq t_0$ 有 $\omega(t) \leq \Phi_{[a, \beta]}(\cdot; t_0^+, \omega_0)$.

证明 令 $\omega(t) = \frac{1}{z(t)}$, 则 (3.2.15) 式变为

$$\begin{cases} \dot{z}(t) \leq -az(t) + b, & t \geq t_0 (\neq \tau_k), \\ z(\tau_k^+) \leq \frac{1}{(1+h_k)}z(\tau_k), & t = \tau_k, \\ z(t_0^+) \leq z_0. \end{cases} \quad (3.2.17)$$

(3.2.16) 式变为

$$\begin{cases} \dot{z}(t) \geq -az(t) + b, & t \geq t_0 (\neq \tau_k), \\ z(\tau_k^+) \geq \frac{1}{(1+h_k)}z(\tau_k), & t = \tau_k, \\ z(t_0^+) \geq z_0. \end{cases} \quad (3.2.18)$$

由 (3.2.3) 式和定理 1.3.1, 知道引理 3.2.2 的结论成立. \square

现在我们引入一类渐近 T -周期函数. 给定一个函数 $a \in PC([0, \infty), R)$ 且不连续点为 $\tau_k, k \in Z_+$, 我们说 a 是一个渐近到集合 PC_T 的函数, 如果 $\lim_{t \rightarrow \infty} |a(t) - \alpha(t)| = 0$ 成立. 引理 3.2.1 的如下一般结果是很有用的.

定理 3.2.1. 考虑函数 $\beta \in PC_T$ 且 $\beta > 0$, 和 a 是一个渐近到集合 PC_T 的函数. 则对任意的 $\omega_0 > 0$, 有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\Phi_{[a, \beta]}(t, t_0^+, \omega_0) - \theta_{[a, \beta]}| = 0.$$

证明 给定 $\epsilon > 0$, 存在 $t_\epsilon > 0$ 使得

$$\alpha(t) - \epsilon \leq a(t) \leq \alpha(t) + \epsilon, \quad t \geq t_\epsilon.$$

因此, 根据引理 3.2.2 有

$$\begin{aligned} \Phi_{[\alpha-\epsilon, \beta]}(t; t_\epsilon, \Phi_{[\alpha, \beta]}(t_\epsilon, t_0^+, \omega_0)) &\leq \Phi_{[\alpha, \beta]}(t; t_0^+, \omega_0) \\ &\leq \Phi_{[\alpha+\epsilon, \beta]}(t; t_\epsilon, \Phi_{[\alpha, \beta]}(t_\epsilon; t_0^+, \omega_0)), \end{aligned}$$

对所有的 $t \geq t_\epsilon$ 成立. 而且由引理 3.2.1 我们得到

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\Phi_{[\alpha \pm \epsilon, \beta]}(t; t_\epsilon, \Phi_{[\alpha, \beta]}(t_\epsilon; t_0^+, \omega_0)) - \theta_{[\alpha \pm \epsilon, \beta]}| = 0.$$

另一方面, 根据 $\theta_{[\alpha \pm \epsilon, \beta]}$ 的定义在集合 PC'_T 中有 $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \theta_{[\alpha \pm \epsilon, \beta]} = \theta_{[\alpha, \beta]}$. 因此结论成立. \square

在结束本节之前, 我们给出系统 (3.1.3) 解的一个性质. 系统 (3.1.3) 存在一个半平凡正周期解 $(u, 0)$ 的充要条件是 $\lambda - \frac{1}{T} \ln \left[\prod_{i=1}^q \frac{1}{1+c_i} \right] > 0$, 即 $(\theta_{[\lambda, a]}, 0)$. 相似的, (3.1.3) 存在一个半平凡正周期解 $(0, v)$ 充要条件是 $\mu - \frac{1}{T} \ln \left[\prod_{i=1}^q \frac{1}{1+d_i} \right] > 0$, 即 $(0, \theta_{[\mu, d]})$. 为了方便起见, 我们记 $\theta_\lambda := \theta_{[\lambda, a]}$ 和 $\theta_\mu := \theta_{[\mu, d]}$. 根据 (3.2.1) 和 (3.2.6) 式得到

$$\lambda - \frac{1}{T} \ln \left[\prod_{i=1}^q \frac{1}{1+c_i} \right] = \frac{1}{T} \int_0^T a \theta_\lambda, \quad \mu - \frac{1}{T} \ln \left[\prod_{i=1}^q \frac{1}{1+d_i} \right] = \frac{1}{T} \int_0^T d \theta_\mu. \quad (3.2.19)$$

注意到如果 (u, v) 是一个正的 T -周期解且满足 $u(0^+) > 0$, 则 $u \gg 0$. 相似的, 如果 $v(0^+) > 0$, 则 $v \gg 0$. 特别的, 如果 $(\bar{u}, \bar{v}) \in PC'_T \times PC'_T$ 是系统 (3.1.3) 的一个共存态, 则 $\bar{u} \gg 0$ 和 $\bar{v} \gg 0$. 因此

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\dot{\bar{u}}(t)}{\bar{u}(t)} = \lambda l - a\bar{u}(t) - b\bar{v}(t), \\ \frac{\dot{\bar{v}}(t)}{\bar{v}(t)} = \mu m + c\bar{u}(t) - d\bar{v}(t), \end{array} \right\} \quad t \neq \tau_k, k \in Z_+, \quad (3.2.20)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{u}(\tau_k^+) = (1+c_k)\bar{u}(\tau_k), \\ \bar{v}(\tau_k^+) = (1+d_k)\bar{v}(\tau_k), \end{array} \right\} \quad t = \tau_k, k \in Z_+.$$

与 (3.2.6) 相似的有

$$\begin{aligned} \lambda - \frac{1}{T} \ln \left[\prod_{i=1}^q \frac{1}{1+c_i} \right] &= \frac{1}{T} \left[\int_0^T a \bar{u} + \int_0^T b \bar{v} \right], \\ \mu - \frac{1}{T} \ln \left[\prod_{i=1}^q \frac{1}{1+d_i} \right] &= \frac{1}{T} \left[- \int_0^T c \bar{u} + \int_0^T d \bar{v} \right]. \end{aligned} \quad (3.2.21)$$

特别的, 如果 (3.1.3) 存在一个共存态, 则 $\lambda - \frac{1}{T} \ln \left[\prod_{i=1}^q \frac{1}{1+c_i} \right] > 0$.

3.3 单调迭代方案

这一节我们利用单调迭代技巧构造性的证明系统 (3.1.3) 解的收敛性. 脉冲微分方程的单调迭代技巧可以参看文献 [8,10,59]. 首先我们分析如下序列的性质:

$$U_0 := 0, \quad V_n := \theta_{[\mu m + cU_{n-1}, d]}, \quad U_n := \theta_{[\lambda l - bV_n, a]}, \quad n \geq 1. \quad (3.3.1)$$

注意到上式对所有的系数都是有意义的.

引理 3.3.1 对每一 $n \geq 1$ 下面的不等式成立,

$$V_1 \leq \cdots \leq V_{2n-1} \leq V_{2n} \leq \cdots \leq V_2, \quad U_2 \leq \cdots \leq U_{2n} \leq U_{2n-1} \leq \cdots \leq U_1. \quad (3.3.2)$$

而且极限

$$\underline{V} := \lim_{n \rightarrow \infty} V_{2n-1} \leq \bar{V} := \lim_{n \rightarrow \infty} V_{2n}, \quad \underline{U} := \lim_{n \rightarrow \infty} U_{2n} \leq \bar{U} := \lim_{n \rightarrow \infty} U_{2n-1}, \quad (3.3.3)$$

在 PC'_T 上是好定义. $(\bar{V}, \bar{U}, \underline{V}, \underline{U})$ 是下面方程的分量非负的 T -周期解

$$\begin{cases} \dot{\bar{U}}(t) = (\lambda l - a\bar{U} - b\underline{V})\bar{U}, & \begin{cases} \dot{\underline{U}}(t) = (\lambda l - a\underline{U} - b\bar{V})\underline{U}, \\ \underline{U}(\tau_k^+) = (1 + c_k)\underline{U}(\tau_k), \end{cases} \\ \bar{U}(\tau_k^+) = (1 + c_k)\bar{U}(\tau_k), & \\ \dot{\bar{V}}(t) = (\mu m + c\bar{U} - d\bar{V})\bar{V}, & \begin{cases} \dot{\underline{V}}(t) = (\mu m + c\underline{U} - d\underline{V})\underline{V}, \\ \underline{V}(\tau_k^+) = (1 + d_k)\underline{V}(\tau_k). \end{cases} \\ \bar{V}(\tau_k^+) = (1 + d_k)\bar{V}(\tau_k), & \end{cases} \quad (3.3.4)$$

进一步, 如果

1. $b \gg 0, \underline{U} > 0, \bar{V} > 0$, 和 $\underline{U} = \bar{U}$ 对某一 $t \in R$ 成立, 或
2. $c \gg 0, \underline{V} > 0, \bar{U} > 0$, 和 $\underline{V} = \bar{V}$ 对某一 $t \in R$ 成立,

则 $\underline{U} = \bar{U}, \underline{V} = \bar{V}$.

证明 利用推论 3.2.1 和归纳法证明我们的结论. 由 θ 的定义对所有的 $n \geq 1$ 我们有 $U_n \geq 0$ 和 $V_n \geq 0$. 因此, 根据推论 3.2.1 有 $\theta_{[\mu m, d]} \leq \theta_{[\mu m + cU_1, d]}$, 即 $V_1 \leq V_2$, 这说明不等式 $\lambda l - bV_1 \geq \lambda l - bV_2$ 成立. 再根据推论 3.2.1 有 $U_1 \geq U_2$. 假设 (3.3.2) 式对所有的 $n \in \{1, \dots, k\}$ 成立. 我们证明下式成立

$$V_{2k-1} \leq V_{2k+1} \leq V_{2k+2} \leq V_{2k}, \quad U_{2k} \leq U_{2k+2} \leq U_{2k+1} \leq U_{2k-1}.$$

根据归纳假设有 $U_{2k-2} \leq U_{2k}$, 由 (3.3.1) 有 $V_{2k-1} \leq V_{2k+1}$, 这说明 $U_{2k-1} \geq U_{2k+1}$. 因此, $V_{2k} \geq V_{2k+2}$ 和 $U_{2k} \leq U_{2k+2}$. 另一方面, 由 $U_{2k} \leq U_{2k-1}$ 有 $V_{2k+1} \leq V_{2k}$, 所以 $U_{2k+1} \geq U_{2k}$ 和 $V_{2k+2} \geq V_{2k+1}$. 因此 $U_{2k+2} \leq U_{2k+1}$, 即我们证明了 (3.3.2) 式是成立的.

根据单调方案我们知道极限式 (3.3.3) 是有定义的. 另一方面, 根据 θ 的定义有

$$\begin{cases} \dot{U}_{2n-1}(t) = (\lambda l - aU_{2n-1} - bV_{2n-1})U_{2n-1}, \\ U_{2n-1}(\tau_k^+) = (1 + c_k)U_{2n-1}(\tau_k), \\ \dot{U}_{2n}(t) = (\lambda l - aU_{2n} - bV_{2n})U_{2n}, \\ U_{2n}(\tau_k^+) = (1 + c_k)U_{2n}(\tau_k), \\ \dot{V}_{2n}(t) = (\mu m + cU_{2n-1} - dV_{2n})V_{2n}, \\ V_{2n}(\tau_k^+) = (1 + d_k)V_{2n}(\tau_k), \\ \dot{V}_{2n-1}(t) = (\mu m + cU_{2n-2} - dV_{2n-1})V_{2n-1}, \\ V_{2n-1}(\tau_k^+) = (1 + d_k)V_{2n-1}(\tau_k). \end{cases} \quad (3.3.5)$$

由于序列 U_k 和 V_k 是一致有界的, 根据 (3.3.5) 和定义 1.3.1 我们知道序列 U_{2n-1}, U_{2n}, V_{2n} 和 V_{2n-1} 是拟等度连续的. 因此由 (3.3.2) 式和定理 1.3.2 我们知道极限式 (3.3.3) 是一致成立的, 即极限点在集合 PC_T 中. 在 (3.3.5) 式两边取极限知 (3.3.4) 式成立.

下面我们证明引理的最后一个结论成立. 假设 $b \gg 0$, 则 $\underline{U} > 0, \bar{V} > 0$. 如果 $\underline{V} < \bar{V}$, 则 $-b\underline{V} > -b\bar{V}$. 根据推论 3.2.1 和 (3.3.4) 的 U -方程有 $\underline{U} \ll \bar{U}$. 因此条件 1 隐含 $\underline{V} = \bar{V}$. 根据方程解的存在唯一性我们有 $\underline{U} = \bar{U}$. 类似的由条件 2 我们得到 $\underline{U} = \bar{U}, \underline{V} = \bar{V}$. \square

给定初值 $(u_0, v_0) \in R^2$, 记如下 Cauchy 问题过该初值的唯一解为 $(u(t; t_0, u_0, v_0), v(t; t_0, u_0, v_0))$.

$$\begin{cases} \left. \begin{aligned} \dot{u}(t) &= \lambda l(t)u(t) - a(t)u^2(t) - b(t)u(t)v(t), \\ \dot{v}(t) &= \mu m(t)v(t) + c(t)u(t)v(t) - d(t)v^2(t), \end{aligned} \right\} & t \geq t_0 (\neq \tau_k), k \in Z_+, \\ \left. \begin{aligned} u(\tau_k^+) &= (1 + c_k)u(\tau_k), \\ v(\tau_k^+) &= (1 + d_k)v(\tau_k), \end{aligned} \right\} & t = \tau_k, k \in Z_+, \\ u(t_0^+) &= u_0, \quad v(t_0^+) = v_0. \end{cases} \quad (3.3.6)$$

根据迭代方案 (3.3.1) 我们得到如下结论:

定理 3.3.1 对任意 $t_0 \in R$ 和 $(u_0, v_0) \in R_+^2$, 下面的结论成立:

$$\begin{aligned} \limsup_{t \rightarrow \infty} [(u(t; t_0, u_0, v_0) - \bar{U}(t))] &\leq 0 \leq \liminf_{t \rightarrow \infty} [(u(t; t_0, u_0, v_0) - \underline{U}(t))], \\ \limsup_{t \rightarrow \infty} [(v(t; t_0, u_0, v_0) - \bar{V}(t))] &\leq 0 \leq \liminf_{t \rightarrow \infty} [(v(t; t_0, u_0, v_0) - \underline{V}(t))]. \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

证明 为了简化记号我们记 $(u(t), v(t)) := (u(t; t_0, u_0, v_0), v(t; t_0, u_0, v_0))$ 。考虑迭代方案

$$\mathcal{U}_0 := 0, \quad \mathcal{V}_n := \Phi_{[\mu m + c\mathcal{U}_{n-1}, d]}(\cdot; t_0, v_0), \quad \mathcal{U}_n := \Phi_{[\lambda - b\mathcal{V}_n, a]}(\cdot; t_0, u_0), \quad n \geq 1. \quad (3.3.8)$$

利用引理 3.3.2 和相似与引理 3.3.1 的方法, 我们容易得到对任意的 $n \geq 1$ 有

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_1 &\leq \cdots \leq \mathcal{V}_{2n-1} \leq v \leq \mathcal{V}_{2n} \leq \cdots \leq \mathcal{V}_2, \\ \mathcal{U}_2 &\leq \cdots \leq \mathcal{U}_{2n} \leq u \leq \mathcal{V}_{2n-1} \leq \cdots \leq \mathcal{U}_1. \end{aligned} \quad (3.3.9)$$

特别的, $(u(t), v(t))$ 对所有的 $t \geq t_0$ 有定义。最后, 结合引理 3.2.2 和定理 3.3.1 以及归纳假设得到

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [\mathcal{U}_n(t) - U_n(t)] = \lim_{t \rightarrow \infty} [\mathcal{V}_n(t) - V_n(t)] = 0, \quad n \geq 1$$

上式和 (3.3.3) 式的一致收敛性说明了定理的结论成立。 \square

注记 3.3.1 相似的, 如果我们考虑如下迭代方案

$$\hat{V}_0 := 0, \quad \hat{U}_n := \theta_{[\lambda - b\hat{V}_{n-1}, a]}, \quad \hat{V}_n := \theta_{[\mu m + c\hat{U}_n, d]}, \quad n \geq 1, \quad (3.3.10)$$

我们能得到与引理 3.3.1 和定理 3.3.1 相同的结论。

为了说明这一节结论的可行性, 我们给出一个具体的例子。考虑系统

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = \lambda l(t)u(t) - u^2(t) - bu(t)v(t), \\ \dot{v}(t) = \lambda l(t)v(t) + cu(t)v(t) - v^2(t), \\ u(\tau_k^+) = (1 + c_k)u(\tau_k), \\ v(\tau_k^+) = (1 + d_k)v(\tau_k), \end{cases} \quad \begin{cases} t \neq \tau_k, k \in Z_+ \\ t = \tau_k, k \in Z_+, \end{cases} \quad (3.3.11)$$

其中 $l(t) \in PC_T$ 且满足 $\frac{1}{T} \int_0^T l = 1$, $b, c \in R$ 满足 $b > 0, c > 0$ 。假设 $\lambda - \frac{1}{T} \ln \left[\prod_{i=1}^q \frac{1}{1+h_i} \right] > 0$ 且记 θ_λ 为如下系统唯一的 T -周期解:

$$\begin{cases} \dot{\omega}(t) = \lambda l(t)\omega(t) - \omega^2(t), \\ \omega(\tau_k^+) = (1 + h_k)\omega(\tau_k), \end{cases}$$

则

$$\lambda - \frac{1}{T} \ln \left[\prod_{i=1}^q \frac{1}{1+h_i} \right] = \frac{1}{T} \int_0^T \theta_\lambda, \quad (3.3.12)$$

若记 $\theta_{[\lambda + \alpha\theta_\lambda, 1]}$ 为如下系统唯一的 T -周期解

$$\begin{cases} \dot{\omega}(t) = \lambda l(t)\omega(t) + \alpha\theta_\lambda\omega(t) - \omega^2(t), \\ \omega(\tau_k^+) = (1 + h_k)\omega(\tau_k), \end{cases}$$

其中 $\alpha \in R$ 则有

$$\lambda - \frac{1}{T} \ln \left[\prod_{i=1}^q \frac{1}{1+h_i} \right] + \alpha \frac{1}{T} \int_0^T \theta_\lambda = \frac{1}{T} \int_0^T \theta_{[\lambda + \alpha \theta_\lambda, 1]}. \quad (3.3.13)$$

由 (3.3.12) 和 (3.3.13) 容易得到

$$\theta_{[\lambda + \alpha \theta_\lambda, 1]} = (1 + \alpha) \theta_\lambda, \quad \alpha \in R.$$

利用上面的恒等式我们可以计算由 (3.3.1) 确定的序列 U_n, V_n :

$$(i) \quad b \geq 1, \quad U_n = 0, \quad V_n = \theta_\lambda, \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$(ii) \quad b < 1, bc \geq 1$$

$$U_{2n} = 0, \quad U_{2n-1} = (1-b)\theta_\lambda, \quad V_{2n} = (1+c-bc)\theta_\lambda, \quad V_{2n-1} = \theta_\lambda, \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$(iii) \quad b < 1, bc < 1$$

$$U_n = (1-b) \sum_{j=0}^{n-1} (-bc)^j \theta_\lambda, \quad V_n = [(1+c) \sum_{j=0}^{n-2} (-bc)^j + (bc)^{n-1}] \theta_\lambda, \quad n = 1, 2, \dots.$$

3.4 平凡与半平凡周期解的全局稳定性

这一节我们研究系统 (3.1.3) 的绝灭性, 即寻找条件使得平凡周期解 $(0, 0)$ 和半平凡周期解 $(\theta_\lambda, 0)$ 或 $(0, \theta_\mu)$ 是全局稳定的. 我们有如下的结论:

定理 3.4.1. (a) 如果 $(0, 0)$ 不是线性不稳定的, 则对任意 $(u_0, v_0) \geq 0$ 有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (u(t; t_0, u_0, v_0), v(t; t_0, u_0, v_0)) = (0, 0),$$

(b) 如果 $\lambda - \frac{1}{T} \ln \left[\prod_{i=1}^q \frac{1}{1+c_i} \right] > 0$ 且 $(\theta_\lambda, 0)$ 不是线性不稳定的, 则对任意 (u_0, v_0) 满足 $u_0 > 0$ 和 $v_0 \geq 0$ 有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [(u(t; t_0, u_0, v_0), v(t; t_0, u_0, v_0)) - (\theta_\lambda(t), 0)] = (0, 0),$$

(c) 如果 $\mu - \frac{1}{T} \ln \left[\prod_{i=1}^q \frac{1}{1+d_i} \right] > 0$ 且 $(0, \theta_\mu)$ 不是线性不稳定的, 则对任意 (u_0, v_0) 满足 $u_0 \geq 0$ 和 $v_0 > 0$ 有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [(u(t; t_0, u_0, v_0), v(t; t_0, u_0, v_0)) - (0, \theta_\mu(t))] = (0, 0),$$

为了证明定理 3.4.1, 我们利用如下的平凡周期解和半平凡周期解的线性稳定性结论:

引理 3.4.1 (i) 平凡解 $(0, 0)$ 是线性不稳定的当且仅当系统 (3.1.3) 存在一个半平凡周期解, 即当且仅当 $\lambda - \frac{1}{T} \ln \left[\prod_{i=1}^q \frac{1}{1+c_i} \right] > 0$ 或 $\mu - \frac{1}{T} \ln \left[\prod_{i=1}^q \frac{1}{1+d_i} \right] > 0$.

(ii) 设 $\lambda - \frac{1}{T} \ln \left[\prod_{i=1}^q \frac{1}{1+c_i} \right] > 0$, 则 $(\theta_\lambda, 0)$ 线性不稳定的当且仅当 $\mu - \frac{1}{T} \ln \left[\prod_{i=1}^q \frac{1}{1+d_i} \right] > -\frac{1}{T} \int_0^T c \theta_\lambda$; 线性稳定的当且仅当 $\mu - \frac{1}{T} \ln \left[\prod_{i=1}^q \frac{1}{1+d_i} \right] < -\frac{1}{T} \int_0^T c \theta_\lambda$.

(iii) 设 $\mu - \frac{1}{T} \ln \left[\prod_{i=1}^q \frac{1}{1+d_i} \right] > 0$, 则 $(0, \theta_\mu)$ 线性不稳定的当且仅当 $\lambda - \frac{1}{T} \ln \left[\prod_{i=1}^q \frac{1}{1+c_i} \right] > \frac{1}{T} \int_0^T b \theta_\mu$; 线性稳定的当且仅当 $\lambda - \frac{1}{T} \ln \left[\prod_{i=1}^q \frac{1}{1+c_i} \right] < \frac{1}{T} \int_0^T b \theta_\mu$.

证明 我们可以利用变分方程来研究系统 (3.1.3) 周期解 $(\tilde{u}(t), \tilde{v}(t))$ 的局部稳定性. 为此作变换 $(u(t), v(t)) = (\tilde{u}(t) + x(t), \tilde{v}(t) + y(t))$, 则

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \Phi(t) \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix}, \quad t \in [0, T],$$

其中 $\Phi(t)$ 满足

$$\frac{d\Phi(t)}{dt} = \begin{pmatrix} \lambda l - 2a\tilde{u} - b\tilde{v} & -b\tilde{u} \\ c\tilde{v} & \mu m - 2d\tilde{v} + c\tilde{u} \end{pmatrix} \Phi$$

且 $\Phi(0) = I$ 是单位矩阵. 重新组合系统 (3.1.3) 的脉冲条件得到

$$\begin{pmatrix} x(\tau_k^+) \\ y(\tau_k^+) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+c_k & 0 \\ 0 & 1+d_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(\tau_k) \\ y(\tau_k) \end{pmatrix}.$$

因此, 如果如下矩阵

$$M = \begin{pmatrix} \prod_{i=1}^q (1+c_i) & 0 \\ 0 & \prod_{i=1}^q (1+d_i) \end{pmatrix} \Phi(T)$$

的两个特征值的模小于 1, 则 T -周期解是局部稳定的.

(i) 平凡解 $(0, 0)$ 的局部稳定性

平凡解 $(0, 0)$ 处的基解矩阵为

$$\frac{d\Phi(t)}{dt} = \begin{pmatrix} \lambda l & 0 \\ 0 & \mu m \end{pmatrix} \Phi$$

则

$$M = \begin{pmatrix} \prod_{i=1}^q (1+c_i) e^{\lambda T} & 0 \\ 0 & \prod_{i=1}^q (1+d_i) e^{\mu T} \end{pmatrix},$$

这说明平凡解 $(0, 0)$ 的两个 Floquet 乘子分别是 $\prod_{i=1}^q (1 + c_i)e^{\lambda T}$ 和 $\prod_{i=1}^q (1 + d_i)e^{\mu T}$ 。所以结论 (i) 是正确的。

(ii) 半平凡周期解 $(\theta_\lambda, 0)$ 和 $(0, \theta_\mu)$ 的局部稳定性

对于平凡解 $(\theta_\lambda, 0)$ 我们有

$$\frac{d\Phi(t)}{dt} = \begin{pmatrix} \lambda l - 2a\theta_\lambda & -b\theta_\lambda \\ 0 & \mu m + c\theta_\lambda \end{pmatrix} \Phi.$$

因此基解矩阵

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \exp(\int_0^t [\lambda l - 2a\theta_\lambda]) & -b \exp(\int_0^t [\lambda l - 2a\theta_\lambda]) \\ 0 & \int_0^t (\theta_\lambda \exp(\int_s^t [\mu m + c\theta_\lambda - \lambda l + 2a\theta_\lambda])) \\ & \exp(\int_0^t [\mu m + c\theta_\lambda]) \end{pmatrix}.$$

半平凡解 $(\theta_\lambda, 0)$ 的稳定性由如下矩阵的两个特征值确定

$$M = \begin{pmatrix} \prod_{i=1}^q (1 + c_i) & 0 \\ 0 & \prod_{i=1}^q (1 + d_i) \end{pmatrix} \Phi(T),$$

它们是

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \prod_{i=1}^q (1 + c_i) \exp(\int_0^T [\lambda l - 2a\theta_\lambda]) \\ &= \prod_{i=1}^q (1 + c_i) \exp(\int_0^T [\lambda l - a\theta_\lambda] - \int_0^T a\theta_\lambda) \\ &= \prod_{i=1}^q (1 + c_i) \exp[\ln(\frac{\theta_\lambda(\tau_1)}{\theta_\lambda(0^+)}) + \ln(\frac{\theta_\lambda(\tau_2)}{\theta_\lambda(\tau_1^+)}) + \cdots + \\ &\quad \ln(\frac{\theta_\lambda(\tau_q)}{\theta_\lambda(\tau_{q-1}^+)}) + \ln(\frac{\theta_\lambda(T)}{\theta_\lambda(\tau_q^+)})] \exp(-\int_0^T a\theta_\lambda) \\ &= \prod_{i=1}^q (1 + c_i) \exp[\ln(\prod_{i=1}^q \frac{1}{1+c_i})] \exp(-\int_0^T a\theta_\lambda) \\ &= \exp(-T(\lambda - \frac{1}{T} \ln[\prod_{i=1}^q \frac{1}{1+c_i}])) < 1, \text{ 如果 } \lambda - \frac{1}{T} \ln[\prod_{i=1}^q \frac{1}{1+c_i}] > 0, \\ \lambda_2 &= \prod_{i=1}^q (1 + d_i) \exp(\int_0^T [\mu m + c\theta_\lambda]). \end{aligned}$$

因此半平凡解 $(\theta_\lambda, 0)$ 的线性稳定性由 $\mu - \frac{1}{T} \ln[\prod_{i=1}^q \frac{1}{1+d_i}] + \frac{1}{T} \int_0^T c\theta_\lambda$ 的负号确定。

如果 $\mu - \frac{1}{T} \ln[\prod_{i=1}^q \frac{1}{1+d_i}] > -\frac{1}{T} \int_0^T c\theta_\lambda$, 则 $\lambda_2 > 1$, 因此半平凡解 $(\theta_\lambda, 0)$ 的不稳定流形是一维的。如果 $\mu - \frac{1}{T} \ln[\prod_{i=1}^q \frac{1}{1+d_i}] = -\frac{1}{T} \int_0^T c\theta_\lambda$ 则 $(\theta_\lambda, 0)$ 是中性稳定的。如果 $\mu - \frac{1}{T} \ln[\prod_{i=1}^q \frac{1}{1+d_i}] < -\frac{1}{T} \int_0^T c\theta_\lambda$, 则 $\lambda_2 < 1$ 。因此, $(\theta_\lambda, 0)$ 是线性渐近稳定的。

相似的, 半平凡解 $(0, \theta_\mu)$ 的线性稳定性由 $\lambda - \frac{1}{T} \ln \left[\prod_{i=1}^q \frac{1}{1+c_i} \right] - \frac{1}{T} \int_0^T b \theta_\mu$ 的负号确定. \square

证明定理 3.4.1 (a) 设 $(0, 0)$ 不是线性不稳定的, 则根据引理 3.4.1 有 $\lambda - \frac{1}{T} \ln \left[\prod_{i=1}^q \frac{1}{1+c_i} \right] \leq 0$ 和 $\mu - \frac{1}{T} \ln \left[\prod_{i=1}^q \frac{1}{1+d_i} \right] \leq 0$. 因此如果序列 $U_n, V_n, n \geq 1$ 满足 (3.3.1) 式, 则对所有的 $n \geq 1$ 成立 $U_n = V_n = 0$, 则 $\underline{U} = \bar{U} = \underline{V} = \bar{V} = 0$, 由定理 3.3.1 知结论成立.

(b) 设 $\lambda - \frac{1}{T} \ln \left[\prod_{i=1}^q \frac{1}{1+c_i} \right] > 0$ 和 $(\theta_\lambda, 0)$ 不是线性不稳定的, 则根据引理 3.4.1 有 $\mu - \frac{1}{T} \ln \left[\prod_{i=1}^q \frac{1}{1+d_i} \right] < -\frac{1}{T} \int_0^T c \theta_\lambda$. 在这种情况下对所有的 $n \geq 0$, 由 (3.3.1) 所确定的序列为 $U_n = \theta_\lambda$ 和 $V_n = 0$, 因此 $\underline{U} = \bar{U} = \theta_\lambda, \underline{V} = \bar{V} = 0$, 由定理 3.3.1 知结论成立.

(c) 设 $\mu - \frac{1}{T} \ln \left[\prod_{i=1}^q \frac{1}{1+d_i} \right] > 0$ 和 $(0, \theta_\lambda)$ 不是线性不稳定的, 则根据引理 3.4.1 有 $\lambda - \frac{1}{T} \ln \left[\prod_{i=1}^q \frac{1}{1+c_i} \right] < -\frac{1}{T} \int_0^T b \theta_\mu$. 在这种情况下对所有的 $n \geq 0$ 由 (3.3.10) 所确定的序列为 \hat{U}_n, \hat{V}_n , 则有 $\hat{V}_1 = \theta_{[\mu m + c \theta_\lambda, d]} \geq \theta_\mu$. 因此 $\lambda - \frac{1}{T} \ln \left[\prod_{i=1}^q \frac{1}{1+c_i} \right] - \frac{1}{T} \int_0^T b \hat{V}_1 \leq \lambda - \frac{1}{T} \ln \left[\prod_{i=1}^q \frac{1}{1+c_i} \right] - \frac{1}{T} \int_0^T b \theta_\mu \leq 0$. 故有 $\hat{U}_2 = 0$, 所以对所有的 $n \geq 2$ 有 $\hat{U}_n = 0$ 和 $\hat{V}_n = \theta_\mu$ 成立, 进而由注记 3.3.1 知结论成立. \square

定理 3.4.1 和引理 3.4.1 的一个自然的结论是:

推论 3.4.1 假设系统 (3.1.3) 存在正的 T - 周期解, 则

$$\lambda - \frac{1}{T} \ln \left[\prod_{i=1}^q \frac{1}{1+c_i} \right] > \frac{1}{T} \int_0^T b \theta_\mu, \quad \mu - \frac{1}{T} \ln \left[\prod_{i=1}^q \frac{1}{1+d_i} \right] > -\frac{1}{T} \int_0^T c \theta_\lambda. \quad (3.4.1)$$

也就是说, 所有的平凡和半平凡周期解都是线性不稳定的.

3.5 系统严格正的 T - 周期解的存在性

本节我们利用叠合度理论 [38] 来研究系统 (3.1.3) 严格正的 T - 周期解的存在性. 我们有如下的主要结论:

定理 3.5.1 (i) 必要条件: 如果 $a \gg 0$, $b \gg 0$ 并且系统 (3.1.3) 存在一个

T -周期正解, 则

$$\lambda - \frac{1}{T} \ln \left[\prod_{i=1}^q \frac{1}{1+c_i} \right] > 0, \quad -\left(\frac{c}{a}\right)_M < \frac{\mu - \frac{1}{T} \ln \left[\prod_{i=1}^q \frac{1}{1+d_i} \right]}{\lambda - \frac{1}{T} \ln \left[\prod_{i=1}^q \frac{1}{1+c_i} \right]} < \left(\frac{d}{b}\right)_M. \quad (3.5.1)$$

(ii) 充分条件: 假设

$$\lambda - \frac{1}{T} \ln \left[\prod_{i=1}^q \frac{1}{1+c_i} \right] > 0, \quad -\left(\frac{c}{a}\right)_L < \frac{\mu - \frac{1}{T} \ln \left[\prod_{i=1}^q \frac{1}{1+d_i} \right]}{\lambda - \frac{1}{T} \ln \left[\prod_{i=1}^q \frac{1}{1+c_i} \right]} < \left(\frac{d}{b}\right)_L. \quad (3.5.2)$$

则系统 (3.1.3) 至少存在一个正的 T -周期正解。

注记 3.5.1 当分式 $\frac{c}{a}, \frac{d}{b}$ 是常数时, 定理 3.5.1 给出了系统 (3.1.3) 存在周期解的充分必要条件。

证明 必要性: 由 (3.2.21) 和推论 3.4.1, 如果 $a \gg 0$ 和 $d \gg 0$, 则 (3.5.1) 是周期解存在的必要条件。

充分性: 作坐标变换

$$u(t) = \exp(x_1(t)), \quad v(t) = \exp(x_2(t)),$$

则系统 (3.1.3) 变为

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \lambda l - ae^{x_1} - be^{x_2}, \\ \dot{x}_2(t) = \mu m + ce^{x_1} - de^{x_2}, \end{cases} \quad t \neq \tau_k, k \in Z_+, \\ \begin{cases} x_1(\tau_k^+) = \ln(1+c_k) + x_1(\tau_k), \\ x_2(\tau_k^+) = \ln(1+d_k) + x_2(\tau_k), \end{cases} \quad t = \tau_k, k \in Z_+. \end{cases} \quad (3.5.3)$$

记 $DomL = PC_T^1 \times PC_T^1$ 和

$$L : DomL \rightarrow Z, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \rightarrow \left(\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix}, \left\{ \begin{pmatrix} \Delta x_1(\tau_k) \\ \Delta x_2(\tau_k) \end{pmatrix} \right\}_{k=1}^q \right),$$

以及 $N : PC_T^1 \times PC_T^1 \rightarrow Z$ 满足

$$N \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} \lambda l - ae^{x_1} - be^{x_2} \\ \mu m + ce^{x_1} - de^{x_2} \end{pmatrix}, \left\{ \begin{pmatrix} \ln(1+c_k) \\ \ln(1+d_k) \end{pmatrix} \right\}_{k=1}^q \right).$$

明显的我们有

$$\text{Ker}L = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{C}_1 \\ \bar{C}_2 \end{pmatrix} \in R^2, t \in [0, T] \right\}$$

且

$$\text{Im}L = \left\{ z = \left(\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}, \left\{ \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \end{pmatrix} \right\}_{k=1}^q \right) \in Z : \begin{pmatrix} \int_0^T f + \sum_{k=1}^q a_k = 0 \\ \int_0^T g + \sum_{k=1}^q b_k = 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

由于 $\text{Im}L$ 在 Z 中是闭的, L 是一个指标为零的 Fredholm 映射. 容易知道 P 和 Q 是连续的投影且使得

$$\text{Im}P = \text{Ker}L, \quad \text{Ker}Q = \text{Im}L = \text{Im}(I - Q),$$

其中 P 和 Q 分别为

$$P \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{T} \begin{pmatrix} \int_0^T x_1 + \sum_{k=1}^q a_k \\ \int_0^T x_2 + \sum_{k=1}^q b_k \end{pmatrix}$$

和

$$QZ = Q \left(\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}, \left\{ \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \end{pmatrix} \right\}_{k=1}^q \right) = \left(\frac{1}{T} \begin{pmatrix} \int_0^T f + \sum_{k=1}^q a_k \\ \int_0^T g + \sum_{k=1}^q b_k \end{pmatrix}, \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}_{k=1}^q \right)$$

进一步, 广义逆 $(L) K_p : \text{Im}L \rightarrow \text{Ker}P \cap \text{Dom}L$ 是

$$K_p Z = \begin{pmatrix} \int_0^t f + \sum_{t > \tau_k} a_k - \frac{1}{T} \int_0^T \int_0^t f - \sum_{k=1}^q a_k \\ \int_0^t g + \sum_{t > \tau_k} b_k - \frac{1}{T} \int_0^T \int_0^t g - \sum_{k=1}^q b_k \end{pmatrix}.$$

因此

$$QN \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} \lambda - \frac{1}{T} \int_0^T a e^{x_1} - \frac{1}{T} \int_0^T b e^{x_2} + \frac{1}{T} \sum_{k=1}^q \ln(1 + c_k) \\ \mu + \frac{1}{T} \int_0^T c e^{x_1} - \frac{1}{T} \int_0^T d e^{x_2} + \frac{1}{T} \sum_{k=1}^q \ln(1 + d_k) \end{pmatrix}, \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}_{k=1}^q \right),$$

和

$$K_p(I-Q)N \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \int_0^t l - \int_0^t ae^{x_1} - \int_0^t be^{x_2} + \sum_{t>\tau_k} \ln(1+c_k) \\ \mu \int_0^t m + \int_0^t ce^{x_1} - \int_0^t de^{x_2} + \sum_{t>\tau_k} \ln(1+d_k) \end{pmatrix} \\ - \begin{pmatrix} \frac{1}{T} \int_0^t [\lambda l - ae^{x_1} - be^{x_2}] + \sum_{k=1}^q \ln(1+c_k) \\ \frac{1}{T} \int_0^t [\mu m + ce^{x_1} - de^{x_2}] + \sum_{k=1}^q \ln(1+d_k) \end{pmatrix} \\ - \begin{pmatrix} (\frac{t}{T} - \frac{1}{2}) \int_0^t [\lambda l - ae^{x_1} - be^{x_2}] + \sum_{k=1}^q \ln(1+c_k) \\ (\frac{t}{T} - \frac{1}{2}) \int_0^t [\mu m + ce^{x_1} - de^{x_2}] + \sum_{k=1}^q \ln(1+d_k) \end{pmatrix}.$$

明显的, QN 和 $K_p(I-Q)N$ 是连续的. 利用定理 1.3.2 和 Arzela-Ascoli 定理知对任意开的有界集 $\Omega \subset X$, 集合 $K_p(I-Q)N(\bar{\Omega})$ 是紧的. 从 ImQ 到 $KerL$ 上的同构映射

$$J: ImQ \rightarrow X, \quad \left(\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}, \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}_{k=1}^q \right) \rightarrow \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$$

下面我们寻找一个满足定理 1.4.1 所有条件的开的有界子集 Ω . 相应于算子方程 $L \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \beta N \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \beta \in (0, 1)$, 有

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \beta[\lambda l - ae^{x_1} - be^{x_2}], \\ \dot{x}_2(t) = \beta[\mu m + ce^{x_1} - de^{x_2}], \end{cases} \quad t \neq \tau_k, k \in Z_+, \quad (3.5.4) \\ \begin{cases} \Delta x_1(\tau_k) = \beta \ln(1+c_k), \\ \Delta x_2(\tau_k) = \beta \ln(1+d_k), \end{cases} \quad t = \tau_k, k \in Z_+.$$

我们证明存在一个常数 M_0 使得系统 (3.5.4) 的任意 T -周期解满足 $\|x_1\|_{PC_T} + \|x_2\|_{PC_T} \leq M_0$. 下面记 M_i 为不依赖于 β 的固定常数, 且令 (x_1, x_2) 是一个 T -周期解. 积分 (3.5.4) 我们得到

$$\lambda - \frac{1}{T} \ln \left[\prod_{k=1}^q \frac{1}{1+c_k} \right] = \frac{1}{T} \left[\int_0^T ae^{x_1} + \int_0^T be^{x_2} \right], \quad (3.5.5)$$

$$\mu - \frac{1}{T} \ln \left[\prod_{k=1}^q \frac{1}{1+d_k} \right] = \frac{1}{T} \left[- \int_0^T ce^{x_1} + \int_0^T de^{x_2} \right]. \quad (3.5.6)$$

由 (3.5.5) 式有 $\|e^{x_1}\|_{PC_T} + \|e^{x_2}\|_{PC_T} \leq M_1$. 进而利用 (3.5.4) 我们得到 $\|\dot{x}_1\|_{PC_T^1} + \|\dot{x}_2\|_{PC_T^1} \leq M_2$. 又由 (3.5.5) 知存在 M_3 使得 $x_{1L}, x_{2L} \leq M_3$. 则有

$x_{1M} \leq x_{1L} + \|\dot{x}_1\|_{PC_T^1}$, 相似的我们可以得到 x_{2M} 的界。下面我们寻找 x_{1L} 和 x_{2L} 的一个下界。我们只给出 x_{1L} 的下界。实际上, 根据 (3.5.6) 我们得到

$$\begin{aligned} \mu - \frac{1}{T} \ln \left[\prod_{k=1}^q \frac{1}{1+d_k} \right] &\geq -\frac{1}{T} \int_0^T c e^{x_1} + \frac{1}{T} \int_0^T \frac{d}{b} b e^{x_2} \\ &\geq -\frac{1}{T} \int_0^T c e^{x_1} + \frac{1}{T} \left(\frac{d}{b}\right)_L \int_0^T b e^{x_2}. \end{aligned}$$

利用 (3.5.5) 式和上面的不等式有

$$\left(\frac{d}{b}\right)_L \left(\lambda - \frac{1}{T} \ln \left[\prod_{k=1}^q \frac{1}{1+c_k} \right] \right) - \left(\mu - \frac{1}{T} \ln \left[\prod_{k=1}^q \frac{1}{1+d_k} \right] \right) \leq \frac{1}{T} \int_0^T \left(\left(\frac{d}{b}\right)_L a + c \right) e^{x_1}.$$

从 (3.5.2) 式知上面不等式的第一项是正的。因此存在 M_4 使得 $x_M \geq M_4$ 。最后得到 $x_{1L} \geq x_{1M} - \|\dot{x}_1\|_{PC_T^1} \geq M_4 - M_2$ 。

由于 $\left(\frac{c}{a}\right)_L \leq \frac{\bar{c}}{\bar{a}}$ 和 $\left(\frac{d}{b}\right)_L \leq \frac{\bar{d}}{\bar{b}}$, 综合这两个不等式和 (3.5.2), 不难得出如下代数方程

$$\begin{aligned} \bar{a}u + \bar{b}v &= \lambda - \frac{1}{T} \ln \left[\prod_{k=1}^q \frac{1}{1+c_k} \right], \\ -\bar{c}u + \bar{d}v &= \mu - \frac{1}{T} \ln \left[\prod_{k=1}^q \frac{1}{1+d_k} \right] \end{aligned}$$

有唯一的解 $(u^*, v^*) \in R^2$ 。令 B 是半径大于 M_0 并包含在 R^2 中的球, $\Omega = \{X = (x_1, x_2) \in PC_T^1 \times PC_T^1 : \|X\| < B\}$ 。明显的 Ω 满足定理 1.4.1 的条件 (a)。当 $X \in \partial\Omega \cap KerL = \partial\Omega \cap R^2$, 其中 X 是 R^2 中的一个满足 $\|X\| = B$ 的常数向量, 则

$$QNX = \left(\begin{pmatrix} \lambda - \bar{a}e^{x_1} - \bar{b}e^{x_2} - \ln \left[\prod_{k=1}^q \frac{1}{1+c_k} \right] \\ \mu + \bar{c}e^{x_1} - \bar{d}e^{x_2} - \ln \left[\prod_{k=1}^q \frac{1}{1+d_k} \right] \end{pmatrix}, \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}_{k=1}^q \right).$$

对 $X \in KerL \cap \Omega$ 我们有

$$JQNX = \begin{pmatrix} \lambda - \bar{a}e^{x_1} - \bar{b}e^{x_2} - \ln \left[\prod_{k=1}^q \frac{1}{1+c_k} \right] \\ \mu + \bar{c}e^{x_1} - \bar{d}e^{x_2} - \ln \left[\prod_{k=1}^q \frac{1}{1+d_k} \right] \end{pmatrix}.$$

进一步, 根据定理 3.5.1 的假设条件, 容易证明

$$\deg\{JQNX, \Omega \cap KerL, 0\} = \text{sign}[(\bar{a}\bar{d} + \bar{b}\bar{c})u^*v^*] \neq 0.$$

所以我们证明了集合 Ω 满足定理 1.4.1 的所有条件。因此系统 (3.5.3) 在 $\bar{\Omega}$ 中至少有一个 T -周期解, 进而定理 3.5.1 的结论是正确的。□

3.6 系统的永久持续生存性

我们利用定义 1.5.1 和第 3.3 节得到的结论来研究系统 (3.1.3) 的持久性.

定理 3.6.1 (i) 如果 $\mu - \frac{1}{T} \ln \left[\prod_{k=1}^q \frac{1}{1+d_k} \right] > 0$, $\lambda - \frac{1}{T} \ln \left[\prod_{k=1}^q \frac{1}{1+c_k} \right] > \frac{1}{T} \int_0^T b \theta_\mu$ 且

$$\lambda - \frac{1}{T} \ln \left[\prod_{k=1}^q \frac{1}{1+c_k} \right] > \frac{1}{T} \int_0^T b \theta_{[\mu m + c \theta_{[\lambda l - b \theta_{\mu, a}], d}]} \quad (3.6.1)$$

则系统 (3.1.3) 是永久持续生存的.

(ii) 如果 $\lambda - \frac{1}{T} \ln \left[\prod_{k=1}^q \frac{1}{1+c_k} \right] > 0$, $-\frac{1}{T} \int_0^T c \theta_\lambda < \mu - \frac{1}{T} \ln \left[\prod_{k=1}^q \frac{1}{1+d_k} \right] \leq 0$ 且

$$\lambda - \frac{1}{T} \ln \left[\prod_{k=1}^q \frac{1}{1+c_k} \right] > \frac{1}{T} \int_0^T b \theta_{[\mu m + c \theta_{\lambda, d}]}, \quad (3.6.2)$$

$$\mu - \frac{1}{T} \ln \left[\prod_{k=1}^q \frac{1}{1+d_k} \right] > -\frac{1}{T} \int_0^T c \theta_{[\lambda l - b \theta_{[\mu m + c \theta_{\lambda, d}], a}]}. \quad (3.6.3)$$

则系统 (3.1.3) 是永久持续生存的.

证明 (i) 设序列 $U_n, V_n, n \geq 1$ 是由迭代方案 (3.3.1) 所确定的. 由于 $\mu - \frac{1}{T} \ln \left[\prod_{k=1}^q \frac{1}{1+d_k} \right] > 0$ 和 $\lambda - \frac{1}{T} \ln \left[\prod_{k=1}^q \frac{1}{1+c_k} \right] > \frac{1}{T} \int_0^T b \theta_\mu$, 我们有 $V_1 > 0$ 和 $U_1 > 0$. 而且, 条件 (3.6.1) 隐含 $U_2 > 0$. 根据定理 3.2.1 知结论成立. 相似的, 由注记 3.3.1 知结论的第二部分成立. \square

推论 3.6.1 (i) 如果 $a \gg 0, d \gg 0, \mu - \frac{1}{T} \ln \left[\prod_{k=1}^q \frac{1}{1+d_k} \right] > 0$ 且

$$\lambda - \frac{1}{T} \ln \left[\prod_{k=1}^q \frac{1}{1+c_k} \right] > \left(\frac{b}{d}\right)_M \left(\mu - \frac{1}{T} \ln \left[\prod_{k=1}^q \frac{1}{1+d_k} \right] \right), \quad (3.6.4)$$

$$\left\{ \lambda - \frac{1}{T} \ln \left[\prod_{k=1}^q \frac{1}{1+c_k} \right] - \left(\frac{b}{d}\right)_M \left(\mu - \frac{1}{T} \ln \left[\prod_{k=1}^q \frac{1}{1+d_k} \right] \right) \right\} > \left(\frac{b}{d}\right)_M \left(\frac{c}{a}\right)_M \left\{ \lambda - \frac{1}{T} \ln \left[\prod_{k=1}^q \frac{1}{1+c_k} \right] - \left(\frac{b}{d}\right)_L \left(\mu - \frac{1}{T} \ln \left[\prod_{k=1}^q \frac{1}{1+d_k} \right] \right) \right\}. \quad (3.6.5)$$

则系统 (3.1.3) 是永久持续生存的.

(ii) 如果 $\lambda - \frac{1}{T} \ln \left[\prod_{k=1}^q \frac{1}{1+c_k} \right] > 0$, $0 \geq \mu - \frac{1}{T} \ln \left[\prod_{k=1}^q \frac{1}{1+d_k} \right] > -\left(\frac{c}{a}\right)_L \left\{ \lambda - \frac{1}{T} \ln \left[\prod_{k=1}^q \frac{1}{1+c_k} \right] \right\}$,

$$\left[1 - \left(\frac{b}{d}\right)_M \left(\frac{c}{d}\right)_M \right] \left\{ \lambda - \frac{1}{T} \ln \left[\prod_{k=1}^q \frac{1}{1+c_k} \right] \right\} > \left(\frac{b}{d}\right)_M \left\{ \mu - \frac{1}{T} \ln \left[\prod_{k=1}^q \frac{1}{1+d_k} \right] \right\} \quad (3.6.6)$$

且

$$[-1 + (\frac{c}{a})_L(\frac{b}{d})_M]\{\mu - \frac{1}{T}\ln[\prod_{k=1}^q \frac{1}{1+d_k}]\} > (\frac{c}{a})_L\{\lambda - \frac{1}{T}\ln[\prod_{k=1}^q \frac{1}{1+c_k}]\} - (\frac{c}{a})_M(\frac{b}{d})_M\cdot \\ \{\lambda - \frac{1}{T}\ln[\prod_{k=1}^q \frac{1}{1+c_k}]\}. \quad (3.6.7)$$

则系统 (3.1.3) 是永久持续生存的。

定理 3.6.2 如果 $\bar{U} = \underline{U} \gg 0$ 和 $\bar{V} = \underline{V} \gg 0$, 则 (\bar{U}, \bar{V}) 是全局渐近稳定的。特别的系统 (3.1.3) 是永久持续生存的。

3.7 半平凡周期解的分支

这一节我们讨论系统 (3.1.3) 在半平凡周期解 $(\theta_\lambda, 0)$ 和 $(0, \theta_\mu)$ 附近的分支。注意到脉冲系统 (3.1.3) 可以改写为

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = \lambda l(t)u(t) - a(t)u^2(t) - b(t)u(t)v(t) + \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} c_k u(\tau_k) \delta(t - \tau_k), \\ \dot{v}(t) = \mu m(t)v(t) + c(t)u(t)v(t) - d(t)v^2(t) + \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} d_k v(\tau_k) \delta(t - \tau_k), \end{cases} \quad (3.7.1)$$

其中 δ 是 Dirac delta- 函数。

系统 (3.7.1) 的解可以看作算子 $\mathcal{F} : R^2 \times PC_T^1 \times PC_T^1 \rightarrow PC_T \times PC_T$ 的零点, 且

$$\mathcal{F}(\lambda, \mu, u, v) := (\dot{u} - (\lambda l - au - bv + \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} c_k \delta(t - \tau_k))u, \\ \dot{v} - (\mu m + cu - dv + \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} d_k \delta(t - \tau_k))v). \quad (3.7.2)$$

注意到算子 \mathcal{F} 关于所有变元是解析的。下面的结论是必要的:

引理 3.7.1 (i) 如果 $\lambda - \frac{1}{T}\ln[\prod_{k=1}^q \frac{1}{1+c_k}] > 0$ 且存在一个序列 $(\lambda_n, \mu_n, u_n, v_n)$ 对所有 $n \geq 1$ 满足 $v_n \neq 0$, 使得对 $\mu \in R$ 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda_n, \mu_n, u_n, v_n) = (\lambda, \mu, \theta_\lambda, 0)$ 成立, 则

$$\mu = \mu_\lambda := \frac{1}{T}\ln[\prod_{k=1}^q \frac{1}{1+d_k}] - \frac{1}{T} \int_0^T c \theta_\lambda. \quad (3.7.3)$$

(ii) 如果 $\mu - \frac{1}{T}\ln[\prod_{k=1}^q \frac{1}{1+d_k}] > 0$ 且存在一个序列 $(\lambda_n, \mu_n, u_n, v_n)$ 对所有 $n \geq 1$ 满足 $u_n \neq 0$, 使得对 $\lambda \in R$ 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda_n, \mu_n, u_n, v_n) = (\lambda, \mu, 0, \theta_\mu)$, 则

$$\lambda = \lambda_\mu := \frac{1}{T}\ln[\prod_{k=1}^q \frac{1}{1+c_k}] + \frac{1}{T} \int_0^T b \theta_\mu. \quad (3.7.4)$$

(iii) 如果 \mathcal{F} 有一列零点 $(\lambda_n, \mu_n, u_n, v_n)$, 使得对 $n \geq 1$ 有 $u_n \neq 0$ 和 $v_n \neq 0$ 成立, 且对 $(\lambda, \mu) \in R^2$ 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda_n, \mu_n, u_n, v_n) = (\lambda, \mu, 0, 0)$, 则 $\lambda - \frac{1}{T} \ln \left[\prod_{k=1}^q \frac{1}{1+c_k} \right] = \mu - \frac{1}{T} \ln \left[\prod_{k=1}^q \frac{1}{1+d_k} \right] = 0$.

证明 (i) 如果这样的序列存在, 则根据隐函数定理有 $\mathcal{L}(\lambda, \mu) := D_{(u,v)} \mathcal{F}(\lambda, \mu, \theta_\lambda, 0)$ 不是可逆的. 我们有

$$\mathcal{L}(\lambda, \mu) := \begin{pmatrix} \frac{d}{dt} - \lambda I + 2a\theta_\lambda - \sum_{k \in Z_+} c_k \delta(t - \tau_k) & b\theta_\lambda \\ 0 & \frac{d}{dt} - \mu m - c\theta_\lambda - \sum_{k \in Z_+} d_k \delta(t - \tau_k) \end{pmatrix}.$$

而且由于 $\int_0^T (2a\theta_\lambda - \lambda I) = \int_0^T (a\theta_\lambda - \lambda I) + \int_0^T a\theta_\lambda = \ln \left[\prod_{k=1}^q \frac{1}{1+c_k} \right] + \int_0^T a\theta_\lambda$, 如果 $\lambda - \frac{1}{T} \ln \left[\prod_{k=1}^q \frac{1}{1+c_k} \right] > 0$, 则 $(\frac{d}{dt} - \lambda I + 2a\theta_\lambda + \sum_{k \in Z_+} c_k \delta(t - \tau_k))^{-1}$ 是有定义的. 因此, $\mathcal{L}(\lambda, \mu)$ 是不可逆的当且仅当 $\frac{d}{dt} - \mu m - c\theta_\lambda - \sum_{k \in Z_+} d_k \delta(t - \tau_k)$ 没有逆, 即对任意 $x \in PC_T^1$, 我们有

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = (\mu m + c\theta_\lambda)x(t), & t \neq \tau_k, k \in Z_+, \\ x(\tau_k^+) = (1 + d_k)x(\tau_k), & t = \tau_k, k \in Z_+, \end{cases}$$

这隐含了 $\mu = \mu_\lambda = \frac{1}{T} \ln \left[\prod_{k=1}^q \frac{1}{1+d_k} \right] - \frac{1}{T} \int_0^T c\theta_\lambda$. 相似的, 引理 3.7.1 的第二部分成立.

(iii) 假设存在这样的序列, 则根据隐函数定理有 $\lambda - \frac{1}{T} \ln \left[\prod_{k=1}^q \frac{1}{1+c_k} \right] = 0$ 或 $\mu - \frac{1}{T} \ln \left[\prod_{k=1}^q \frac{1}{1+d_k} \right] = 0$ 成立. 假设 $\lambda - \frac{1}{T} \ln \left[\prod_{k=1}^q \frac{1}{1+c_k} \right] = 0$, 我们证明 $\mu - \frac{1}{T} \ln \left[\prod_{k=1}^q \frac{1}{1+d_k} \right] = 0$ 成立. 设 $V_n := \frac{v_n}{\|v_n\|_{PC_T}}, n \geq 1$. 则

$$\begin{cases} \dot{V}_n = \mu_n m V_n + c u_n V_n - d v_n V_n, & t \neq \tau_k, k \in Z_+, \\ V_n(\tau_k^+) = (1 + d_k) V_n(\tau_k), & t = \tau_k, k \in Z_+, n \geq 1. \end{cases} \quad (3.7.5)$$

由 (3.7.5) 式我们推出 \dot{V}_n 在 $(\tau_{k-1}, \tau_k) \cap [0, R), k \in Z_+$ 上是一致有界, 又由定理 1.3.2 知存在子列 (不妨仍记为 V_n) 使得在空间 PC_T 中 $V_n \rightarrow V$. 明显 $\|V\|_{PC_T} = 1$. 在 (3.7.5) 式中令 $n \rightarrow \infty$, 容易证明 V 满足下面的线性脉冲方程

$$\begin{cases} \dot{V} = \mu m V, & t \neq \tau_k, k \in Z_+, \\ V(\tau_k^+) = (1 + d_k) V(\tau_k), & t = \tau_k, k \in Z_+, n \geq 1. \end{cases} \quad (3.7.6)$$

因此只有当 $\mu - \frac{1}{T} \ln \left[\prod_{k=1}^q \frac{1}{1+d_k} \right] = 0$ 时, V 才是一个非平凡的周期解. \square

定理 3.7.1. (i) 如果 $\lambda - \frac{1}{T} \ln \left[\prod_{k=1}^q \frac{1}{1+c_k} \right] > 0$ 且 $\mu - \frac{1}{T} \ln \left[\prod_{k=1}^q \frac{1}{1+d_k} \right] + \frac{1}{T} \int_0^T c \theta_\lambda > 0$ 充分的小, 则系统 (3.1.3) 存在唯一一个稳定的周期解.

(ii) 如果 $\mu - \frac{1}{T} \ln \left[\prod_{k=1}^q \frac{1}{1+d_k} \right] > 0$ 且 $\lambda - \frac{1}{T} \ln \left[\prod_{k=1}^q \frac{1}{1+c_k} \right] - \frac{1}{T} \int_0^T b \theta_\mu > 0$ 充分的小, 则系统 (3.1.3) 存在唯一一个稳定的周期解.

证明 固定 $\lambda - \frac{1}{T} \ln \left[\prod_{k=1}^q \frac{1}{1+c_k} \right] > 0$ 并且取 μ 作为一个分支参数, 我们将应用定理 1.4.2 证明 $\mu = \mu_\lambda$ 是一个从半平凡周期解 $(\theta_\lambda, 0)$ 分支出内部周期解的分支值. 由于对所有 $\mu \in R$, 有 $\mathcal{F}(\lambda, \mu, \theta_\lambda, 0) = 0$ 成立, 则 $(\mu, u, v) = (\mu, \theta_\lambda, 0)$ 可以看作算子 \mathcal{F} 的解曲面. 容易知道

$$N[\mathcal{L}(\lambda, \mu_\lambda)] = \text{span}[(u_1, \phi)],$$

其中 $\phi := \prod_{0 < \tau_k < t} (1+d_k) \exp(\int_0^t (\mu m + c \theta_\lambda))$ 且 $u_1 := -[\frac{d}{dt} - \lambda I + 2a \theta_\lambda - \sum_{k \in Z_+} c_k \delta(t - \tau_k)]^{-1}(b \theta_\lambda \phi)$. 而且

$$R[\mathcal{L}(\lambda, \mu_\lambda)] = \{(u, v) \in PC_T \times PC_T : \int_0^T v \phi^* = 0\},$$

其中 $\phi^*(t) := \exp[-\int_0^t (\mu_\lambda m + c \theta_\lambda) + \ln(\prod_{0 < \tau_k < t} \frac{1}{1+d_k})]$. 如果我们分解 $\mathcal{L}(\lambda, \mu)$ 为下面的形式

$$\mathcal{L}(\lambda, \mu) = \mathcal{L}(\lambda, \mu_\lambda) + (\mu - \mu_\lambda) \mathcal{L}_1, \quad \mathcal{L}_1 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -m \end{pmatrix},$$

则 $\mathcal{L}_1(N[\mathcal{L}(\lambda, \mu_\lambda)]) = \text{span}[(0, -m\phi)]$. 而且 $\int_0^T m \phi \phi^* = \int_0^T m > 0$ 满足 $(0, -m\phi) \notin R[\mathcal{L}(\lambda, \mu_\lambda)]$, 因此由定理 1.4.2 知存在 $\epsilon_0 > 0$ 和一个解析映射 $(\mu, u, v) : (-\epsilon_0, \epsilon_0) \times PC_T^1 \times PC_T^1 \mapsto R \times PC_T^1 \times PC_T^1, |s| < \epsilon_0$, 且具有形式

$$(\mu(s), u(s), v(s)) = (\mu_\lambda + 0(s), \theta_\lambda + s u_1 + 0(s^2), s \phi + 0(s^2)), \quad s \rightarrow 0, \quad (3.7.7)$$

使得对所有 $s \in (-\epsilon_0, \epsilon_0)$ 有 $\mathcal{F}(\lambda, \mu(s), u(s), v(s)) = 0$ 成立. 而且 $R \times PC_T^1 \times PC_T^1$ 中存在 $(\mu_\lambda, \theta_\lambda, 0)$ 的一个领域 Q 使得某些 $(\mu, u, v) \in Q$, $\mathcal{F}(\lambda, \mu, u, v) = 0$, 则要么 $(\mu, u, v) = (\mu(s), u(s), v(s))$ 对 $s \in (-\epsilon_0, \epsilon_0)$ 成立, 或 $(\mu, u, v) = (\mu, \theta_\lambda, 0)$. 由于 $\phi \gg 0$, 则对正的适当小的数 s 有 $u(s) \gg 0$ 和 $v(s) \gg 0$, 并且对负的适当小的数 s 有 $u(s) \gg 0$ 和 $v(s) \ll 0$. 特别的, μ_λ 是一个分支值. 而且根据推论 3.4.1, 如果 $s > 0$ 则有 $\mu(s) > \mu_\lambda$. 由于当参数 μ 经过 μ_λ 时, 半平凡周期解 $(\theta_\lambda, 0)$ 的不稳定流形增加一维, 根据交换稳定性的原理对充分小的 $s > 0$, $(\mu(s), u(s), v(s))$ 是线性渐近稳定的 [42]. 下面的引理给出了解 $(\mu(s), u(s), v(s))$ 的渐近稳定性的证明. \square

引理 3.7.2 存在 $\epsilon_1 > 0$, $(u, v) \in PC_T^1 \times PC_T^1$ 满足 $u > 0$ 和 $v > 0$. 如果 $\mu \in (\mu_\lambda, \mu_\lambda + \epsilon_1)$ 和 $\mathcal{F}(\lambda, \mu, u, v) = 0$ 成立, 则存在 $s \in (0, \epsilon_0)$ 使得 $(\mu, u, v) = (\mu(s), u(s), v(s))$.

证明 利用反证法证明. 假设存在序列 $(\mu_n, u_n, v_n) \notin Q, n \geq 1$, 使得对所有 $n \geq 1$, $u_n > 0, v_n > 0$, $\mathcal{F}(\lambda, \mu_n, u_n, v_n) = 0$ 成立, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n = \mu_\lambda$. 根据第 3.3 节得到的结论我们可以推出

$$0 \leq u_n \leq \theta_\lambda, \quad 0 \leq v_n \leq \theta_{[\mu_n + c\theta_\lambda, d]}. \quad (3.7.8)$$

根据脉冲微分方程我们得到 (u_n, v_n) 在 $PC_T^1 \times PC_T^1$ 上是一致有界的. 令 (u_n, v_n) 是在 $PC_T \times PC_T$ 上收敛到 (\bar{u}, \bar{v}) 的序列. 容易验证 (\bar{u}, \bar{v}) 是系统 (3.7.1) 满足 $\mu = \mu_\lambda$ 的解. 根据推论 3.4.1, (\bar{u}, \bar{v}) 不可能是一个内部周期解. 而且由于 (u_n, v_n) 远离平凡周期解 $(\theta_\lambda, 0)$, $(\bar{u}, \bar{v}) \neq (\theta_\lambda, 0)$. 要使 $\mu_\lambda < 0$, 必需有 $(\bar{u}, \bar{v}) = (0, 0)$. 因为 $\lambda - \frac{1}{T} \ln \left[\prod_{k=1}^q \frac{1}{1+c_k} \right] > 0$, 所以根据引理 3.7.1 知道这是不可能的, 故结论成立. 相似的, 我们可以证明 (ii). \square

3.8 生物解释和举例

生物防治在有害生物的治理中有悠久的历史, 并且因可避免使用化学药剂带来的问题而日益受到重视. 生物控制的一个典型的方法是投放天敌, 即通过天敌助增来控制害虫. 根据害虫数量和具体的实际情况, 在一个关键的时刻或季节同时投放天敌以控制害虫数量的突然增加而不致造成经济损失. 通过在温室培养的庄稼中投放天敌来控制害虫的数量就是一个很好的例子. 例如: 在温室中周期性的投放拟寄生物 (*Encarsia formosa*) 来控制粉虱、投放 predaceous mite 来控制斑点蜘蛛. 果园中害虫天敌主要有捕食性瓢虫、草蛉、蓟马、食蚜蝇、捕食螨、小花蝽、蜘蛛、鸟类等. 天敌保护得好, 能有效地遏制害虫的猖獗危害, 从而省工省药, 保护环境. 众所周知, 大多数害虫一般在每一年的夏季爆发, 因此我们可以在这个时候投放天敌来控制害虫甚至根除害虫. 我们可以通过下面的例子来说明我们在这一章得到结果的具体应用.

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{u}(t) = \lambda(1 + \sin(2\pi t))u(t) - au^2(t) - bu(t)v(t), \\ \dot{v}(t) = \mu(1 + \cos(2\pi t))v(t) + cu(t)v(t) - dv^2(t), \end{array} \right\} t \neq \tau_k, \quad (3.8.1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u(\tau_k^+) = u(\tau_k), \\ v(\tau_k^+) = (1+p)v(\tau_k), \end{array} \right\} t = \tau_k = 0.5 \cdot (2k-1), k \in Z_+.$$

其中 $u(t)(v(t))$ 分别记作害虫和天敌的密度, a, b, c, d, p 是正常数且 $T = 1$. 如果我们需要全局控制害虫 (即要求周期解 $(0, \theta_\mu)$ 是全局渐近稳定的), 我们只需

要 $\mu - \ln[\frac{1}{1+p}] > 0$, $\lambda < \int_0^1 b\theta_\mu$. 下面我们给出一个数值例子说明如何利用我们得到的结果来控制害虫.

记 $\bar{\theta}_\mu := \int_0^1 \theta_\mu$, $\theta_c := \frac{\lambda}{b}$. 因此对半平凡周期解 $(0, \theta_\mu)$ 的稳定性, 条件 $\lambda < \int_0^1 b\theta_\mu$ 说明了在一个周期内的平均值 θ_μ 必需大于临界值 θ_c .

固定参数 $a = 0.2, b = 0.5, \mu = -0.2, c = 0.4, d = 0.4, \lambda = 0.32$, 选择参数 p 作为一个分支参数. 图 3.8.1 给出了系统 (3.8.1) 具周期脉冲投放拟寄生物的一个典型的解, 其中 $p = 0.4$ 且 $\mu - \ln[\frac{1}{1+p}] \approx 0.136 > 0$. 从图 3.8.1(a) 我们可以观察到变量 $v(t)$ 周期性的震动. 由于其平均值大于临界值 $\theta_c = 0.64$, 因此震动是全局稳定的. 相应的, 害虫种群的数量 $u(t)$ 则很快的趋向于零 (如图 3.8.1(b)).

对于周期共存态的分支, 我们知道在一个周期内的平均值 θ_μ 一定小于临界值 θ_c . 如果选择参数 $p = 0.35$, 我们有 $\mu - \ln[\frac{1}{1+p}] \approx 0.1 > 0$. 从图 3.8.2(a) 我们可以观察到变量 $v(t)$ 周期性的震动, 且在一个周期内的平均值小于临界值 $\theta_c = 0.64$. 在这种情况下害虫数量趋于一个小振幅的周期解 (如图 3.8.2(b)), 该周期解是稳定的, 由于在一个周期内的平均值 θ_μ 小于临界值 θ_c .

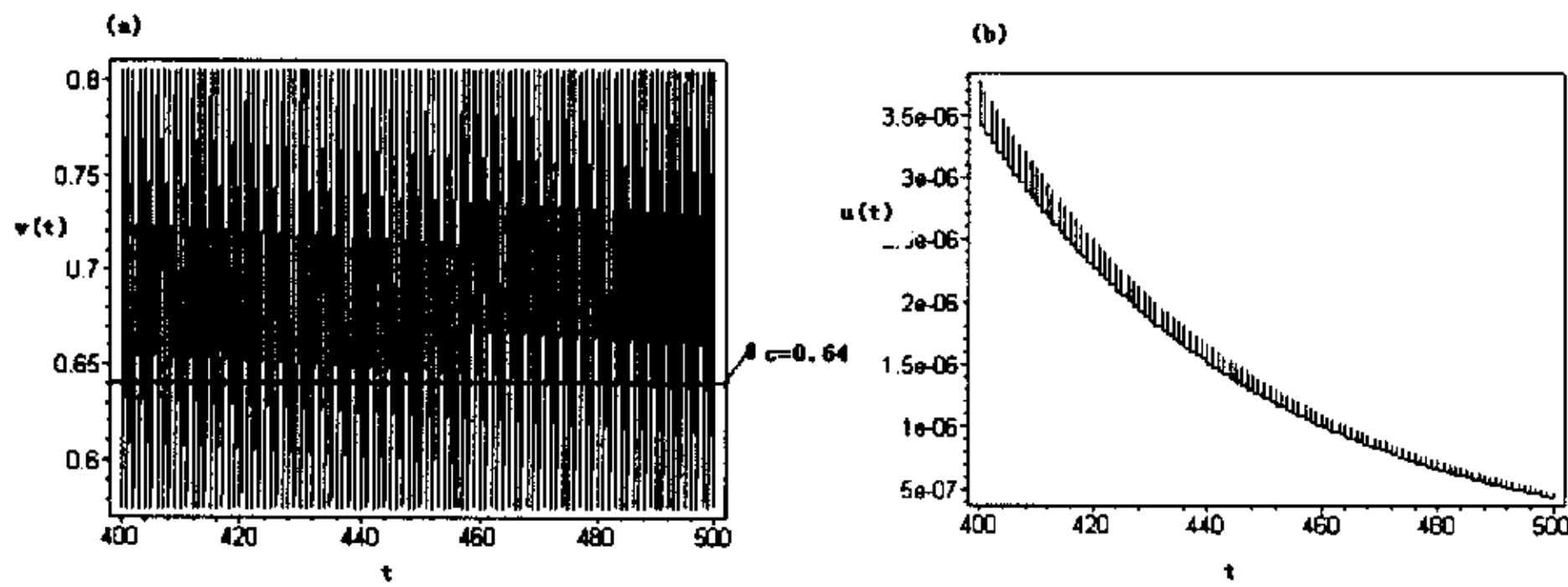


图 3.8.1: (a) 天敌种群数量 $v(t)$ 随时间的周期波动, 参数 $p = 0.4$. (b) 相应的害虫数量 $u(t)$ 随时间的变化情况.

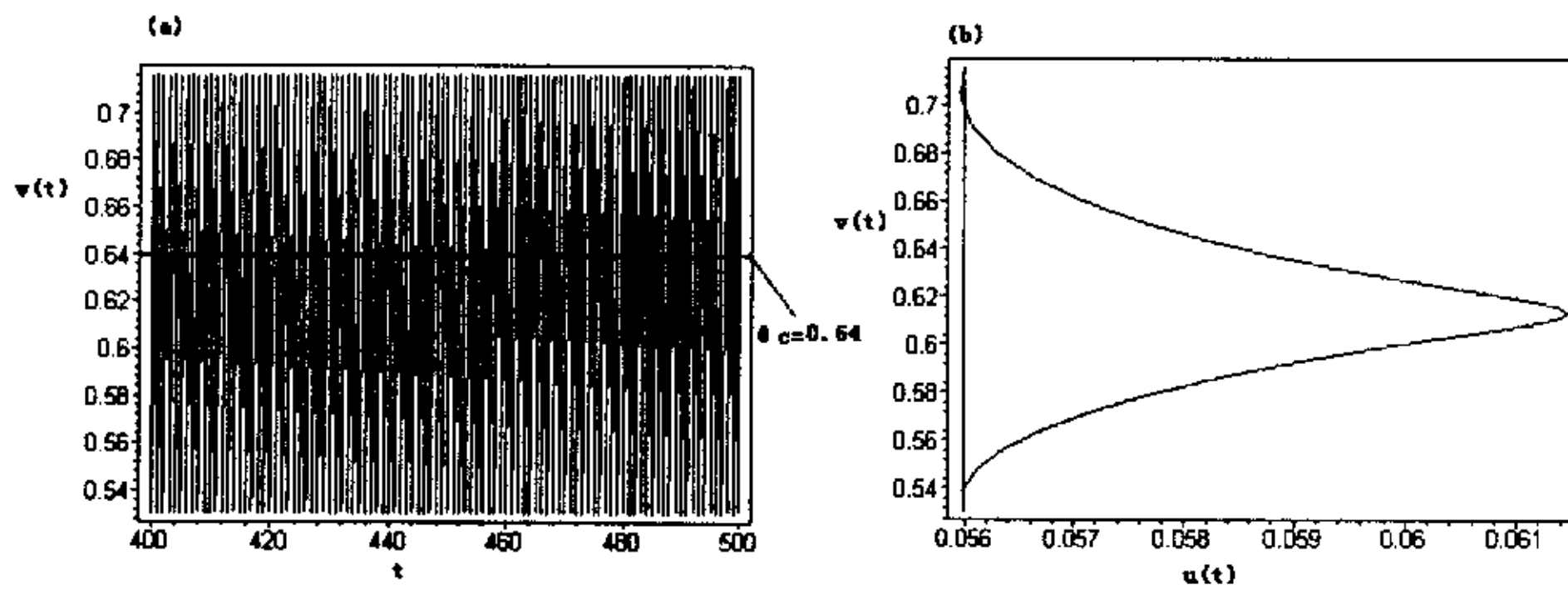


图 3.8.2: 害虫与天敌种群的周期共存态, 其中参数 $p = 0.35$. (a) 天敌种群数量 $v(t)$ 随时间的周期波动. (b) 害虫数量的小振幅周期解.

第四章 混杂矩阵模型及其种群动力学性质

4.1 生物背景

为了对生物种群动力学能有更好的理解,一个世纪以来,理论生态学家及应用数学家在许多方面改进了经典模型及建模思想。当考虑到种群个体的生理与行为特征时个体之间是有差异的。因此,他们与环境之间的交互影响也是不同的。结果,个体之间象出生、死亡、生长、新陈代谢、资源消耗等生命过程会有变化。年轻一些的个体里的出生率通常说来与年老一些的个体中的出生率大不相同,体形大一点的个体与体形小一点的个体的死亡率也不一样,类似的例子还可以举出很多。而且,种群内部的差异比种群之间的差异还要来得大。这些个体的生命指标最终决定整个种群的动力学行为及物理性的,生物性的环境对这些动力学行为的影响方式。

现在引用少量一些的例子来说明研究以下问题需要结构化模型:处理那些成熟与繁殖的时滞作用;同类别内部个体的竞争(介于小个体和大个体之间或介于幼年与成年之间);同类别内部的自食;选择特定年龄或特定体型食饵的捕食行为。这些及其它一些例子参看文献 [3-4,16-17, 51-52, 72-73, 101-104]。

一般地,我们假设一个时代重叠的种群具有 n 个阶段,所有阶段具有生育能力且生育率为 β_j (如果存在 k 幼年阶段,则 $\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_k = 0$)。阶段 i 的个体死亡率为 μ_i ,成熟到下一个阶段的成熟率为 m_i 。因此我们得到如下的常微分方程组

$$\begin{cases} \frac{dA_1(t)}{dt} = \sum_{j=1}^n \beta_j A_j(t) - (m_1 + \mu_1)A_1(t), \\ \frac{dA_2(t)}{dt} = m_1 A_1 - (m_2 + \mu_2)A_2(t), \\ \vdots \\ \frac{dA_{n-1}(t)}{dt} = m_{n-2} A_{n-2} - (m_{n-1} + \mu_{n-1})A_{n-1}(t), \\ \frac{dA_n(t)}{dt} = m_{n-1} A_{n-1} - \mu_n A_n(t). \end{cases} \quad (4.1.1)$$

其中 $A_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 表示阶段 i 的生物量或数量。假设 $A_j(0) \geq 0, \sum_{j=0}^n A_j(0) > 0$, 和 $\mu_j > 0, j = 1, 2, \dots, n$ 。生殖率 β_j , 成熟率 m_j , 死亡率 μ_j 可以是时间依赖和密度依赖的。在这种情况下,参数 β_j, m_j, μ_j 是非线性函数。具密度依赖阶段结构的矩阵模型我们可以参考文献 [71-73,75]。从文献 [16-17,68,90] 我们知道具密度依赖的生命指标函数(成熟率、死亡率和出生率等)有下面的一些形式:

$$(F1) \quad F1(W) = be^{-aW}, \text{ 满足 } a > 0, b > 0;$$

$$(F2) \quad F2(W) = \frac{s}{q+W^n}, \text{ 满足 } s, q, n > 0;$$

(F3) $F3(W) = b(1 - rW)^{\frac{1}{r}}$, 满足 $b > 0, r \leq 0$,

其中 W 是总数量的权函数, 即 $W(t) = r_1A_1 + r_2A_2 + \cdots + r_nA_n$. $r_i \geq 0 (i = 1, 2, \cdots, n)$ 是种间竞争系数. 函数 $F1$, 当 $n = 1$ 时的函数 $F2$ 分别是通常用在渔业模型中 Ricker 函数和 Beverton-Holt 函数. 函数 $F3$ 具有 Deriso-Schnute 形式 [15]. 注意到如果 $r \rightarrow 0$, 函数 $F3$ 能够退化成 Ricker 函数 be^{-W} ; 如果 $r = -1$ 和 $n = 1$, 函数 $F3$ 能够退化成 Beverton-Holt 函数 $\frac{b}{1+W}$.

种群模型可分为离散的和连续的两类. 对于离散模型, Leslie 矩阵模型给出了基本的年龄结构模型. 而 Mckendrick 偏微分方程模型和形如系统 (4.1.1) 的非线性微分方程模型 [16-17] 给出了基本的连续的年龄结构模型. 许多作者还研究了这两类模型之间的联系 [57, 101, 104].

以上模型不变的假设成年种群的出生是连续的, 然而事实并非如此, 很多种群的出生通常是季节性或瞬时的 [91]. 因此为了正确刻画这类种群的动力学行为, 成年种群的连续出生应该用一个年度的生育脉冲代替. 这一章的主要目的是研究具生育脉冲的阶段结构模型的动力学行为. 特别的, 我们试图回答下面的问题:

(1) 混杂矩阵模型的动力学行为与由常微分方程确定的连续阶段结构模型的动力学行为的主要区别是什么?

(2) 混杂矩阵模型关于参数的全局动力学行为是什么?

(3) 生殖时滞和密度依赖的出生如何影响混杂矩阵模型的动力学行为?

为了回答以上问题, 我们将研究一个从连续年龄结构模型推导出的混杂矩阵模型的动力学行为 (即连续的生殖策略被一个年度生育脉冲代替), 特别的, 我们将详细的研究二维混杂矩阵模型 (也就是说, 种群分成幼年和成年两类). 首先, 对一般的 n -维混杂矩阵模型, 我们得到了其在生育脉冲时刻的频闪映射, 利用其性质, 我们研究了如下两类二维矩阵模型: 一类是出生是密度依赖, 而幼年到成年的成熟率以及种群的死亡率是常数; 另一类是幼年到成年的成熟率是密度依赖的, 而出生率和死亡率是常数. 结合单参数族映射的分支定理和指数积分函数的性质, 得到了具非线性出生率或具密度依赖成熟率的混杂矩阵模型正平衡态的存在性和稳定性、超临界分支以及各种复杂现象甚至混沌. 进一步, 我们研究了脉冲微分系统与相应的频闪映射之间的关系, 我们的结果说明了生育脉冲能使系统的动力学行为变得非常复杂, 并能使系统出现各种周期震荡. 也就是说, 生育脉冲在对系统动力学行为的影响上提供了一个自然的周期而使得系统从倍周期分支通向混沌. 最后, 结合理论和数值方法我们讨论了脉冲系统周期解存在和稳定区域的大小随参数的改变, 得到了生殖时滞对系统既具有稳定性的影响也具有不稳定性的影响. 我们的结果与许多学者的实验结果是一致的 [48-49, 83-84].

4.2 模型的导出

首先, 为了方便我们从如下经典的 Mckendrick-von Foerster 偏微分方程导出我们的模型.

$$\frac{\partial \rho(t, a)}{\partial t} + \frac{\partial \rho(t, a)}{\partial a} = -\mu \rho(t, a). \quad (4.2.1)$$

在 (4.2.1) 中, $\rho = \rho(t, a)$ 表示种群在时刻 t 和年龄 a 的密度, $\mu = \mu(t, a, \rho(t, a))$ 是死亡函数. 为了刻画种群的动力学行为, 我们必须同时考虑一个新的方程来描述该种群的生育过程, 假设出生发生在每年的开始, 即

$$\rho(t, 0) = \int_0^{\infty} \beta(t, a, \rho(t, a)) \rho(t, a) da, \quad (4.2.2)$$

$$\beta(t, a, \rho(t, a)) = \begin{cases} \beta(k, a, \rho(k, a)), & t = k \in N, \\ 0, & t \neq k \in N. \end{cases} \quad (4.2.3)$$

函数 $\beta(t, a, \rho(t, a))$ 表示在时刻 t 具年龄 a 的成年种群出生的数量. 我们假设种群可以分为年龄阶段 A_1, A_2, \dots, A_n , 其中 $A_i(t) (i = 1, 2, \dots, n)$ 表示在时刻 t 年龄 a_{i-1} 和 a_i 之间的个体数量, $A_n(t)$ 表示在年龄 a_n 到无穷的个体数量 (或到 a_m , 最大可能的年龄).

为了刻画 A_1 的动力学行为, 从 0 到 a_1 积分 (4.2.1) 式得到

$$\frac{dA_1(t)}{dt} + \rho(t, a_1) - \rho(t, 0) + \int_0^{a_1} \mu(t, a, \rho(t, a)) \rho(t, a) da = 0. \quad (4.2.4)$$

如果假设出生和死亡率是与年龄无关的, 则

$$\rho(t, 0) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=0}^{\infty} \beta_j(k^+) A_j(k^+) \delta(t - k), \quad (4.2.5)$$

和

$$\int_0^{a_1} \mu(t, a, \rho(t, a)) \rho(t, a) da = \mu_1 A_1(t), \quad (4.2.6)$$

其中 $\delta(t)$ 是 Dirac delta-函数 [2], $\beta_j(k^+) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \beta_j(k + \epsilon)$, $A_j(k^+) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} A_j(k + \epsilon)$ 分别是函数 β_j 和 $A_j (j = 1, 2, \dots, n)$ 的右极限, μ_1 是阶段 A_1 的死亡率. 函数 $\rho(t, a_1)$ 表示在时刻 t 具年龄 a_1 的种群密度且表示从第一阶段 A_1 到第二阶段 A_2 的成熟数量. 如果我们定义 m_1 满足关系 $m_1 A_1(t) = \rho(t, a_1)$, 综合 (4.2.5) 和 (4.2.6) 式, 利用 (4.2.4) 得到

$$\frac{dA_1(t)}{dt} = \sum_{j=1}^n \sum_{k=0}^{\infty} \beta_j(k^+) A_j(k^+) \delta(t - k) - m_1 A_1(t) - \mu_1 A_1(t). \quad (4.2.7)$$

利用相似的方法, 从 a_{i-1} 到 a_i 积分 (4.2.1) 式得到

$$\frac{dA_i(t)}{dt} = m_{i-1}A_{i-1} - (m_i + \mu_i)A_i(t), i = 1, 2, \dots, n, \quad (4.2.8)$$

(4.2.8) 中 m_n 为零.

一般地, 我们假设一个时代重叠的种群具有 n 个阶段. 所有阶段具有生育能力且生育率为 β_j (如果存在 k 幼年阶段, 则 $\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_k = 0$). 阶段 i 的个体死亡率为 μ_i , 成熟到下一个阶段的成熟率为 m_i . 因此我们得到如下的脉冲微分方程.

$$\begin{cases} \frac{dA_1(t)}{dt} = \sum_{j=1}^n \sum_{k=0}^{\infty} \beta_j A_j(k^+) \delta(t-k) - (m_1 + \mu_1)A_1(t), \\ \frac{dA_2(t)}{dt} = m_1 A_1 - (m_2 + \mu_2)A_2(t), \\ \vdots \\ \frac{dA_{n-1}(t)}{dt} = m_{n-2}A_{n-2} - (m_{n-1} + \mu_{n-1})A_{n-1}(t), \\ \frac{dA_n(t)}{dt} = m_{n-1}A_{n-1} - \mu_n A_n(t). \end{cases} \quad (4.2.9)$$

其中 $A_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 表示阶段 i 的生物量或数量. 假设 $A_j(0) \geq 0, \sum_{j=0}^n A_j(0) > 0$, 和 $\mu_j > 0, j = 1, 2, \dots, n$.

等价的, 系统 (4.2.9) 能改写为下面的脉冲微分方程组:

$$\begin{cases} \frac{dA_1(t)}{dt} = -(m_1 + \mu_1)A_1(t), \\ \frac{dA_2(t)}{dt} = m_1 A_1 - (m_2 + \mu_2)A_2(t), \\ \vdots \\ \frac{dA_{n-1}(t)}{dt} = m_{n-2}A_{n-2} - (m_{n-1} + \mu_{n-1})A_{n-1}(t), \\ \frac{dA_n(t)}{dt} = m_{n-1}A_{n-1} - \mu_n A_n(t), \end{cases} \quad t \neq k \in N, \quad (4.2.10)$$

$$\begin{cases} A_1(k^+) = A_1(k) + \sum_{j=1}^n \beta_j A_j(k), \\ A_i(k^+) = A_i(k), \quad i = 2, 3, \dots, n, \end{cases} \quad t = k \in N. \quad (4.2.11)$$

如果我们记 $A = (A_1, A_2, \dots, A_n)^T$,

$$M = \begin{pmatrix} -m_1 - \mu_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ m_1 & -m_2 - \mu_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -m_{n-1} - \mu_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & m_{n-1} & -\mu_n \end{pmatrix}.$$

和

$$I = \begin{pmatrix} 1 + \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \cdots & \beta_{n-1} & \beta_n \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

则系统 (4.2.10) 和 (4.2.11) 变为如下的混杂矩阵模型

$$\begin{cases} \frac{dA(t)}{dt} = MA(t), & t \neq k \in N, \\ A(k^+) = IA(k), & t = k \in N. \end{cases} \quad (4.2.12)$$

4.3 混杂矩阵模型解的正性和频闪映射

从生物观点来看, 一个种群的数量不可能是负的, 即 A_j 应是一个非负数. 对于混杂系统 (4.2.12), 我们有如下的关于解的正性结果:

引理 4.3.1 集合 $\Omega = \{0 < A_j < \infty, j = 1, 2, \dots, n\}$ 是系统 (4.2.12) 的一个正的不变集, 即对所有的 $0 < t < \infty$ 和 j , 如果 $A_j(0) > 0$, 则系统 (4.2.12) 的解总是正的.

证明 由于

$$A_j(t) = \exp\left(-\int_0^t (m_j + \mu_j) dr\right) \left[A_j(0) + \int_0^t m_{j-1} A_{j-1}(s) \exp\left(\int_0^s (m_j + \mu_j) du\right) ds\right],$$

$$j = 2, 3, \dots, n$$

其中 $m_n = 0$. 如果存在某个 j 和时间 $t_{(j)}^* > 0$ 使得 $A_j(t_{(j)}^*) = 0$ 和对所有的 $t < t_{(j)}^*$ 有 $A_j(t) > 0$, 且对所有的 $t \leq t_{(j)}^*$ 和 $i > j$ 有 $A_i(t) > 0$. 则存在时间区间 $0 < T_{j-1} < \bar{T}_{j-1} \leq t_{(j)}^*$ 使得对所有 $t \in (T_{j-1}, \bar{T}_{j-1})$ 有 $A_{j-1}(t) < 0$. 因此, 存在时刻 $t_{(j-1)}^* < t_{(j)}^*$ 使得 $A_{j-1}(t_{(j-1)}^*) = 0$. 依次类推, 存在一个时刻 $t_1^* > 0$ 使得对所有的 $t \leq t_1^*, i \geq 2$ 有 $A_1(t_1^*) = 0$ 和 $A_i(t) > 0$. 而且根据系统 (4.2.10) 和 (4.2.11) 我们有

$$\begin{cases} \frac{dA_1(t)}{dt} = -(m_1 + \mu_1)A_1(t), & t \neq k \in N, 0 \leq t \leq t_1^*, \\ A_1(k^+) \geq A_1(k) + \beta_1 A_1(k), & t = k \in N, 0 \leq t \leq t_1^*. \end{cases} \quad (4.3.1)$$

进一步根据脉冲微分方程的比较定理 1.3.1 有

$$A_1(t_1^*) \geq A_1(0) \prod_1^{k_1} (1 + \beta_1) \exp\left(\int_0^{t_1^*} -(m_1 + \mu_1) dr\right) > 0,$$

其中 $k_1 \in N$ 使得 $t_1^* \in (k_1, k_1 + 1)$, 这与 $A_1(t_1^*) = 0$ 矛盾. 所以结论成立. \square

注记 4.3.1 对于阶段结构的模型, 很自然的知道种群数量在某一个阶段可能为零, 但种群任能持久生存. 实际上, 如果 $A_j(0) \geq 0$ 和 $\sum_{j=0}^n A_j(0) > 0$, 则对所有的 $t \geq 0$, 我们有 $\sum_{j=0}^n A_j(t) > 0$.

现在我们假设 m_i, μ_i 是常数, 在任两个脉冲时刻之间系统 (4.2.10) 可以写成下面的一般形式:

$$\frac{dA_i(t)}{dt} + (m_i + \mu_i)A_i(t) = m_{i-1}A_{i-1}(t), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad t \in [k, k+1), \quad (4.3.2)$$

其中 $m_0 = m_n = 0$.

方程 (4.3.2) 两边乘以积分因子

$$\phi(t) = e^{(m_i + \mu_i)(t-k)}, \quad k \leq t < k+1,$$

并求解得

$$A_i(t) = m_{i-1}e^{-(m_i + \mu_i)(t-k)} \int_k^t A_{i-1}(s)e^{(m_i + \mu_i)(s-k)} ds + A_i(k)e^{-(m_i + \mu_i)(t-k)}. \quad (4.3.3)$$

利用分步积分得到

$$\int_k^t A_{i-1}(s)e^{(m_i + \mu_i)(s-k)} ds = \left[\frac{e^{(m_i + \mu_i)(t-k)}}{m_i + \mu_i} A_{i-1}(t) - \frac{A_{i-1}(k)}{m_i + \mu_i} \right] - \int_k^t \frac{e^{(m_i + \mu_i)(s-k)}}{m_i + \mu_i} \frac{dA_{i-1}(s)}{ds} ds,$$

把 (4.3.2) 代入上式的右端得

$$\int_k^t A_{i-1}(s)e^{(m_i + \mu_i)(s-k)} ds = \left[\frac{e^{(m_i + \mu_i)(t-k)}}{m_i + \mu_i} A_{i-1}(t) - \frac{A_{i-1}(k)}{m_i + \mu_i} \right] - \int_k^t \frac{e^{(m_i + \mu_i)(s-k)}}{m_i + \mu_i} [m_{i-2}A_{i-2}(s) - (m_{i-1} + \mu_{i-1})A_{i-1}(s)] ds,$$

从而得到如下的关于积分的递推公式:

$$\int_k^t A_{i-1}(s)e^{(m_i + \mu_i)(s-k)} ds = \frac{1}{(m_i + \mu_i) - (m_{i-1} + \mu_{i-1})} [e^{(m_i + \mu_i)(t-k)} A_{i-1}(t) - A_{i-1}(k) - m_{i-2} \int_k^t A_{i-2}(s)e^{(m_i + \mu_i)(s-k)} ds].$$

上式代入 (4.3.3) 得

$$\begin{aligned} A_i(t) &= \frac{m_{i-1}}{(m_i + \mu_i) - (m_{i-1} + \mu_{i-1})} [A_{i-1}(t) - A_{i-1}(k)e^{-(m_i + \mu_i)(t-k)}] - \\ &\quad \frac{m_{i-1}}{(m_i + \mu_i) - (m_{i-1} + \mu_{i-1})} \frac{m_{i-2}}{(m_i + \mu_i) - (m_{i-2} + \mu_{i-2})} [A_{i-2}(t) - A_{i-2}(k)e^{-(m_i + \mu_i)(t-k)}] \\ &\quad + \dots + (-1)^{i-1} \prod_{j=1}^{i-1} \frac{m_{i-j}}{(m_i + \mu_i) - (m_{i-j} + \mu_{i-j})} [A_1(t) - A_1(k)e^{-(m_i + \mu_i)(t-k)}] \\ &\quad + A_i(k)e^{-(m_i + \mu_i)(t-k)}, \end{aligned}$$

或写成更加紧簇的形式

$$A_i(t) = \sum_{l=1}^{i-1} \left\{ \prod_{j=1}^l (-1)^{l+1} \frac{m_{i-j}}{(m_i+\mu_i)-(m_{i-j}+\mu_{i-j})} [A_{i-l}(t) - e^{-(m_i+\mu_i)(t-k)} A_{i-l}(k)] \right\} + A_i(k) e^{-(m_i+\mu_i)(t-k)}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.3.4)$$

由于 (4.3.4) 式在脉冲点之间成立, 对每一次生育脉冲, 更多数量的 A_1 被增加。如果我们记

$$\bar{A}_i(k) \doteq \sum_{l=1}^{i-1} \left\{ \prod_{j=1}^l (-1)^{l+1} \frac{m_{i-j}}{(m_i+\mu_i)-(m_{i-j}+\mu_{i-j})} [\bar{A}_{i-l}(k) - e^{-(m_i+\mu_i)} A_{i-l}(k)] \right\} + A_i(k) e^{-(m_i+\mu_i)}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

则我们得到系统 (4.2.12) 如下的频闪映射:

$$\begin{cases} A_1(k+1) = A_1(k) e^{-(\mu_1+m_1)} + \sum_{i=1}^n \beta_i \bar{A}_i(k), \\ A_j(k+1) = \bar{A}_j(k), \quad j = 2, 3, \dots, n. \end{cases} \quad (4.3.5)$$

注记 4.3.2 在 1982 年, Tomita[103] 仔细的研究了频闪映射的性质, 它是表征非线性振子的混沌响应的有力工具。其思想与 Poincaré 映射有类似的地方, 但不是描述相轨线与一个平面的交点, 而是在一个恒定时间间隔收集这些点。

例 4.3.1 如果 $n = 2$, (4.3.4) 变为

$$\begin{cases} A_1(t) = A_1(k) e^{-(m_1+\mu_1)(t-k)}, \\ A_2(t) = \frac{m_1}{\mu_2-(m_1+\mu_1)} [A_1(t) - A_1(k) e^{-\mu_2(t-k)}] + A_2(k) e^{-\mu_2(t-k)}, \end{cases} \quad k \leq t < k+1. \quad (4.3.6)$$

则我们有

$$\begin{cases} \bar{A}_1(k) = A_1(k) e^{-(m_1+\mu_1)}, \\ \bar{A}_2(k) = \frac{m_1}{\mu_2-(m_1+\mu_1)} [\bar{A}_1(k) - A_1(k) e^{-\mu_2}] + A_2(k) e^{-\mu_2}. \end{cases} \quad (4.3.7)$$

因此, 由 (4.3.5) 我们得到二维混杂矩阵的频闪映射:

$$\begin{cases} A_1(k+1) = A_1(k) e^{-(\mu_1+m_1)} + \sum_{i=1}^2 \beta_i \bar{A}_i(k), \\ A_2(k+1) = \bar{A}_2(k). \end{cases} \quad (4.3.8)$$

4.4 两阶段具密度依赖生育脉冲模型的动力学行为

这一节的主要内容分为两部分: 第一部分研究当没有生殖时滞时, 密度依赖生育脉冲对频闪映射所确定的离散系统动力学行为的影响。进一步我们讨论了频闪

映射所确定的离散系统与相应的脉冲微分方程的关系；第二部分研究生殖时滞和密度依赖生育脉冲对频闪映射所确定的离散系统动力学行为的影响。对于每一种情况，我们假设 $\beta_i (i = 1, 2)$ 是密度依赖的，即 $\beta_i = b_i e^{-(A_1(t) + A_2(t))}$ ，其中 $b_i (i = 1, 2)$ 是常数。

4.4.1 无生殖时滞的情形

考虑如下二维混杂系统

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dA_1(t)}{dt} = -(m_1 + \mu_1)A_1(t), \\ \frac{dA_2(t)}{dt} = m_1 A_1(t) - \mu_2 A_2(t), \end{array} \right\} \quad t \neq k \in N, \\ \left\{ \begin{array}{l} A_1(k^+) = A_1(k) + [b_1 A_1(k) + b_2 A_2(k)] e^{-(A_1(k) + A_2(k))}, \\ A_2(k^+) = A_2(k), \end{array} \right\} \quad t = k \in N. \quad (4.4.1)$$

为了简便，假设 $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ 和 $b_1 = b_2 = b$ 。由 (4.3.7)，我们有 $\bar{A}_1(k) + \bar{A}_2(k) = e^{-\mu}(A_1(k) + A_2(k))$ 。进而根据 (4.3.8)，我们得到如下相应系统 (4.4.1) 的频闪映射：

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1(k+1) = bp[A_1(k) + A_2(k)]e^{-p(A_1(k) + A_2(k))} + pqA_1(k), \\ A_2(k+1) = p(1-q)A_1(k) + pA_2(k), \end{array} \right. \quad (4.4.2)$$

其中 $p = e^{-\mu}$, $q = e^{-m_1}$ 。

作变换 $x = pA_1, y = pA_2$ ，则系统 (4.4.2) 变为

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{k+1} = bp[x_k + y_k]e^{-(x_k + y_k)} + pqx_k, \\ y_{k+1} = p(1-q)x_k + py_k, \end{array} \right. \quad (4.4.3)$$

非线性模型 (4.4.3) 的动力学行为可以利用任何一个参数来研究，这里我们选择 b 来研究系统 (4.4.3) 的各种动力学行为。首先平凡平衡态 $E_0(0, 0)$ 总是系统 (4.4.3) 的解。当 b 充分小时， $E_0(0, 0)$ 是局部稳定的。我们首先关心的是在什么条件下 $E_0(0, 0)$ 变为不稳定，而系统持久。其次当增加 b 且 E_0 变为不稳定的同时会出现一个稳定正平衡态 E^* ，进一步增加 b 正平衡态不稳定，此时一个超临界的倍周期分支发生，即正平衡态的稳定性失去而出现一个稳定的两点环。最后，随这 b 的进一步增加将伴随着一系列的分支，最终出现混沌。

• $(x, y) = (0, 0)$ 的分支

在 $(x, y) = (0, 0)$ 的领域内，系统 (4.4.3) 的局部动力学行为由如下的线性化方程确定

$$X_{m+1} = BX_m, \quad (4.4.4)$$

其中 B 是系统 (4.4.3) 的线性部分， $X = (x, y)^T$ 。 $X = 0$ 是稳定的当矩阵 B

的特征值的模小于 1, 即要求矩阵 B 满足如下三个 Jury 条件 [63]:

$$1 - \text{tr}B + \det B > 0, \quad (4.4.5a)$$

$$1 + \text{tr}B + \det B > 0, \quad (4.4.5b)$$

$$1 - \det B > 0. \quad (4.4.5c)$$

这三个条件相应于矩阵 B 的特征值可能出现三种不同的方式超过复平面上的单位圆环. 如果不等式 (4.4.5a) 不成立, 则矩阵 B 的一个特征值大于 1; 如果不等式 (4.4.5b) 不成立, 则矩阵 B 的一个特征值小于 -1; 如果不等式 (4.4.5c) 不成立, 则矩阵 B 的一对复共轭特征值位于单位圆环的外边.

容易知道对平衡态 $E_0(0, 0)$, (4.4.5b) 和 (4.4.5c) 总是成立的, 当 b 增加, 不等式 (4.4.5a) 在一个临界点 b_0 上不成立, 即不等式 (4.4.5a) 变为

$$b < \frac{1-p}{p} \equiv b_0, \quad (4.4.6)$$

因此 b 必需大于 b_0 种群才有可能从 $X = 0$ 增加.

对于差分方程 (4.4.3) 我们可以定义内禀净再生数 [31,32] R_0 (一个个体在生命周期内出生的新生个体的平均数), 即

$$R_0 = \frac{bp}{1-p}$$

不等式 (4.4.6) 可以改写为 $R_0 < 1$. 也就是说, 个体在死亡之前出生的个体数量的平均小于 1 则种群将消亡.

• 正平衡态 $E^*(x^*, y^*)$ 的分支

正平衡态 $E^* = (x^*, y^*)$ 存在的充分必要条件是 $R_0 > 1$, 且

$$E^* = (x^*, y^*) = \left(-\frac{1-p}{1-pq} \ln\left(\frac{1-p}{bp}\right), -\frac{p(1-p)}{1-pq} \ln\left(\frac{1-p}{bp}\right) \right).$$

正平衡态 $E^* = (x^*, y^*)$ 处的特征方程是

$$\lambda^2 - [1 + pq + (1-p)\ln\left(\frac{1}{R_0}\right)]\lambda + pq[1 + (1-p)\ln\left(\frac{1}{R_0}\right)]. \quad (4.4.7)$$

容易知道 $\lambda_2 = pq$ 和 $\lambda_1 = 1 + (1-p)\ln\left(\frac{1}{R_0}\right)$, 且 λ_2 小于 1. 如果 $\lambda_1 = -1$ 我们得到 $2 + (1-p)\ln\left(\frac{1}{R_0}\right) = 0$. 由此我们断定当不等式 (4.4.5b) 不成立时, 正平衡态 $E^* = (x^*, y^*)$ 在点 $b = b_c = \frac{1-p}{p} e^{\frac{2}{1-p}}$ 处通过一个倍周期分支变为不稳定, 即我们有下面的主要结论:

定理 4.4.1 对每一固定且满足 $0 < p < 1, 0 < q < 1$ 的 p, q , $E_0(0, 0)$ 在点

$$b = b_0 = \frac{1-p}{p} (\text{或 } R_0 = 1)$$

处经历一个跨临界的分支; $E^* = (x^*, y^*)$ 在点

$$b = b_c = \frac{1-p}{p} e^{\frac{2}{1-p}} \quad (4.4.8)$$

处经历一个超临界的倍周期分支。

证明 由上面的讨论, 我们只需证明分支是超临界的。为此我们注意到 Jacobian 矩阵 D_{E^*} 可以写为

$$D_{E^*} = \begin{pmatrix} (1-p)(1 + \ln(\frac{1}{R_0})) + pq & (1-p)(1 + \ln(\frac{1}{R_0})) \\ p(1-q) & q \end{pmatrix}. \quad (4.4.9)$$

定义矩阵

$$T = \begin{pmatrix} \frac{\lambda_1 - p}{p(1-q)} & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

这里 T 的每一列是 (4.4.9) 式相应于特征值 λ_1, λ_2 的特征向量, 其逆矩阵为

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{p(1-q)}{\lambda_1 - pq} & \frac{p(1-q)}{\lambda_1 - pq} \\ -\frac{p(1-q)}{\lambda_1 - pq} & \frac{\lambda_1 - p}{\lambda_1 - pq} \end{pmatrix}.$$

应用坐标变换 $(\bar{x}, \bar{y}) = (x - x^*, y - y^*)$, 然后展开方程 (4.4.3) 直到三次项, 再利用如下的变换

$$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = T^{-1} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix},$$

我们得到

$$\begin{cases} u_{k+1} = \lambda_1 u_k + \frac{1}{a_{11}} [-\frac{1}{2}(\lambda_1 + 1) + p] u_k^2 + \frac{1}{6a_{11}^2} [\lambda_1 + 2 - 3p] u_k^3 + o(4), \\ v_{k+1} = \lambda_2 v_k - \frac{1}{a_{11}} [-\frac{1}{2}(\lambda_1 + 1) + p] u_k^2 - \frac{1}{6a_{11}^2} [\lambda_1 + 2 - 3p] u_k^3 + o(4), \end{cases} \quad (4.4.10)$$

其中 $a_{11} = \frac{p(1-q)}{\lambda_1 - pq}$ 。下面我们考虑映射

$$(u, v) \rightarrow (\lambda_1 u + g(u, v), \lambda_2 v + h(u, v)), \quad (4.4.11)$$

这里 $\lambda_1 = 1 + (1-p)\ln(\frac{1}{R_0})$ (在分支点上 $\lambda_1 = -1$), $\lambda_2 = pq$ 且

$$g(u, v) = \frac{1}{a_{11}} [-\frac{1}{2}(\lambda_1 + 1) + p] u^2 + \frac{1}{6a_{11}^2} [\lambda_1 + 2 - 3p] u^3$$

$$h(u, v) = -g(u, v)$$

下一步把 (4.4.11) 式约化到中心流形上。由于 $g(u, v)$ 是与变量 v 无关的, 根据文献 [45-47], 中心流形 (直到三次) 为

$$u \rightarrow F(u) = \lambda_1 u + \frac{1}{a_{11}} \left[-\frac{1}{2}(\lambda_1 + 1) + p \right] u^2 + \frac{1}{6a_{11}^2} [\lambda_1 + 2 - 3p] u^3.$$

由定理 1.4.3(Guckenheimer 和 Holmes[45-47]), 分支是超临界的如果关系式

$$\frac{\partial F}{\partial b} \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial b} = \frac{\partial F}{\partial b} \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} - \left(\frac{\partial F}{\partial u} - 1 \right) \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial b} \neq 0, \quad (4.4.12)$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{\partial^3 F}{\partial u^3} \right) > 0, \quad (4.4.13)$$

在分支点上成立。

容易知道 (4.4.12) 式左边的非退化条件等于

$$-\frac{p}{1-p} e^{-\frac{2}{1-p}} < 0,$$

(4.4.13) 等于

$$\frac{(1+pq)^2}{p^2(1-q)^2} \left(2p^2 - p + \frac{1}{3} \right) > 0.$$

因为 $2p^2 - p + \frac{1}{3} = 2(p - \frac{1}{4})^2 + \frac{5}{24} > 0$, 所以上式明显对所有的参数都成立。因此, 分支是超临界的。□

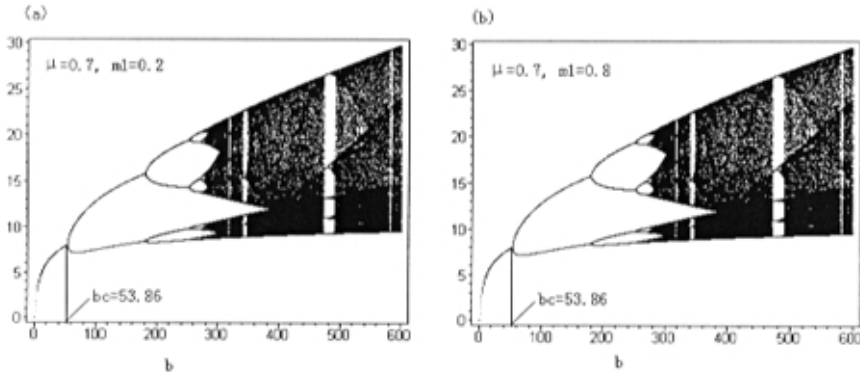


图 4.4.1: 系统 (4.4.3) 关于总数量的分支参数图。说明参数 q 对系统 (4.4.3) 的动力学行为的影响。其它的参数是 (a) $\mu = 0.7, m_1 = 0.2$; (b) $\mu = 0.7, m_1 = 0.8$ 。

结合数值实验 (如图 4.4.1), 当参数 b 超过稳定性临界值 b_c 一点时, 系统存在一个稳定的周期 2 解. 进一步增加 b 出现新的分支 (例如周期 4, 8 等等), 直到参数 b 达到一个值 b_a . 由图知道 b_a 是远远的大于 b_c . 如果我们固定参数 $\mu = 0.7, m_1 = 0.2$ (即 $p = e^{-0.7}, q = e^{-0.2}$), (x^*, y^*) 经历第一次分支当 $b = b_c = 53.867$, 周期 4 解当 b 达到 179.85 时出现. 当 $b \geq b_a \approx 278.11$ 时系统出现混沌.

笔记 4.4.2 由 b_0, b_c 的表达式和图 4.4.1, 我们注意到参数 $q(0 < q < 1)$ 不影响系统 (4.4.3) 的动力学行为.

系统 (4.4.3) 关于总数量的分支参数图 4.4.2 显示了另一个有趣的现象. 从左到右, 每一个混沌窗口出现了周期增加的现象, 即如果一个左边的给定混沌窗口的周期是 k , 则右边混沌窗口的周期是 $k+1$. 这种周期增加的现象在化学反应 [36,54] 和电路 [61] 中观察到, 以及在一维差分方程、时滞微分方程和密度依赖的阶段结构的模型中被研究 [46,64,65].

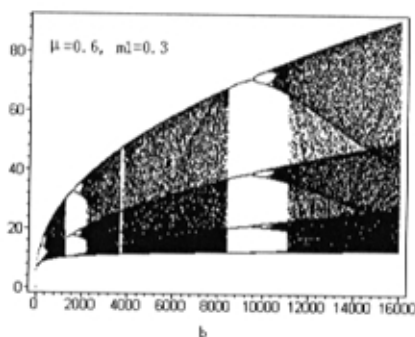


图 4.4.2: 系统 (4.4.3) 关于总数量的分支参数图, 说明周期增加的现象. 其它的参数是 $\mu = 0.6, m_1 = 0.3$.

• 系统 (4.4.1) 和系统 (4.4.3) 的关系

在 4.4.2 节中, 我们利用频闪映射研究了系统 (4.4.1) 的动力学性质. 对于周期系统或周期性的脉冲系统, 频闪映射是 Poincaré 映射的一种特殊情况. 利用 Poincaré 映射的性质及其与相应系统的关系, 我们知道系统 (4.4.1) 解的性质相应于 Poincaré 映射为:

- (i): 频闪映射的不动点对应原系统存在一个以脉冲周期为周期的周期解;
- (ii): 频闪映射的 k - 周期点对应原系统存在一个以 k 倍脉冲周期为周期的周期解, 通常称为次谐周期解或次谐周期 k 的;

(iii): 频闪映射的不变环对应于原系统的拟周期解、或圆环面;

(iv): 奇怪吸引子.

下面我们说明系统 (4.4.1) 的解的行为具有情形 (i), (ii), (iv):

当 $b < b_0$ (即 $R_0 < 1$), 平衡态 $E_0(0, 0)$ 是稳定的. 对于 $b \in (0, b_0)$, 系统 (4.4.1) 的轨道趋于零, 即种群是绝灭的.

当 $b_0 < b < b_c$, 平衡态 E^* 是稳定的. 在此区间的 b , 系统 (4.4.1) 的任一解趋向一个周期为 1 的周期解 $(A_{1p}(t), A_{2p}(t))$, 且

$$\begin{cases} A_{1p}(t) = -\frac{1-p}{p(1-pq)} \ln\left(\frac{1-p}{bp}\right) e^{-(m_1+\mu)(t-k)}, \\ A_{2p}(t) = -\frac{1-p}{1-pq} \ln\left(\frac{1-p}{bp}\right) e^{-\mu(t-k)} [1 - e^{-m_1(t-k)}] - \frac{1-p}{p(1-pq)} \ln\left(\frac{1-p}{bp}\right) e^{-\mu(t-k)}, \end{cases} \quad (4.4.14)$$

其中 $k \leq t < k+1$, $p = e^{-\mu}$, $q = e^{-m_1}$. 也就是说, 系统 (4.4.1) 的周期解 (4.4.14) 是局部渐近稳定的. 在 $b = b_0$ 处存在一个跨临界的分支, 周期解 $(0, 0)$ 和 $(A_{1p}(t), A_{2p}(t))$ 交换稳定性; 在 $b = b_c$ 处存在一个超临界的分支, 周期 1 解和周期 2 解相互交换稳定性. 如图 4.4.3 和 4.4.4.

分支参数图 4.4.1 和图 4.4.3 以及图 4.4.4 说明了系统 (4.4.1) 和系统 (4.4.3) 的关系, 进而也说明了生育脉冲提供了一个自然的周期而使得系统从周期倍分到混沌.

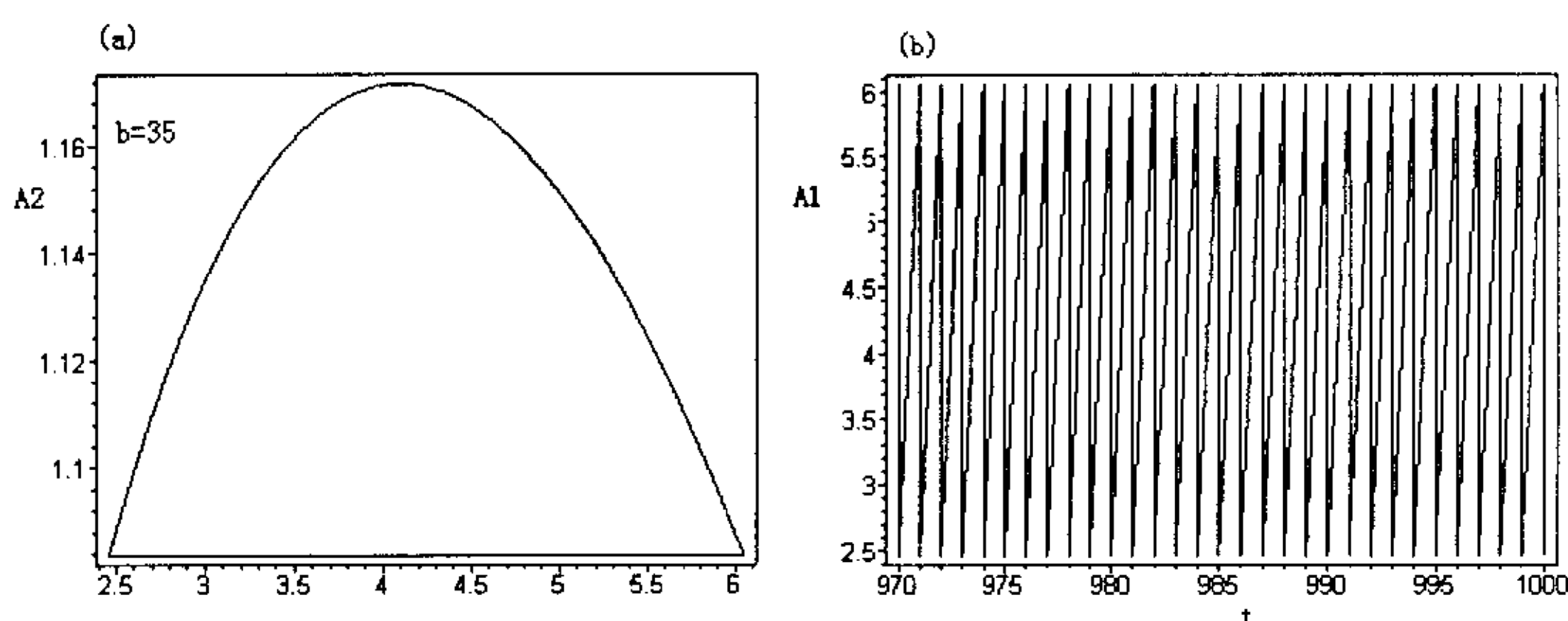


图 4.4.3: A_1 成年与幼年种群的周期共存态. 参数取值为 $b = 35$, $\mu = 0.7$, $m_1 = 0.2$. (a) 周期 1 解; (b) 幼年种群周期 1 解的时间序列.

4.4.2 有生殖时滞的情形 ($b_1 = 0, b_2 = b \neq 0$)

此小节我们考虑只有成年种群具有生育能力, 即考虑如下的二维混杂系统:

$$\begin{cases} \left. \begin{aligned} \frac{dA_1(t)}{dt} &= -(m_1 + \mu_1)A_1(t), \\ \frac{dA_2(t)}{dt} &= m_1A_1(t) - \mu_2A_2(t), \end{aligned} \right\} t \neq k \in N, \\ \left. \begin{aligned} A_1(k^+) &= A_1(k) + bA_2(k)e^{-(A_1(k)+A_2(k))}, \\ A_2(k^+) &= A_2(k), \end{aligned} \right\} t = k \in N. \end{cases} \quad (4.4.15)$$

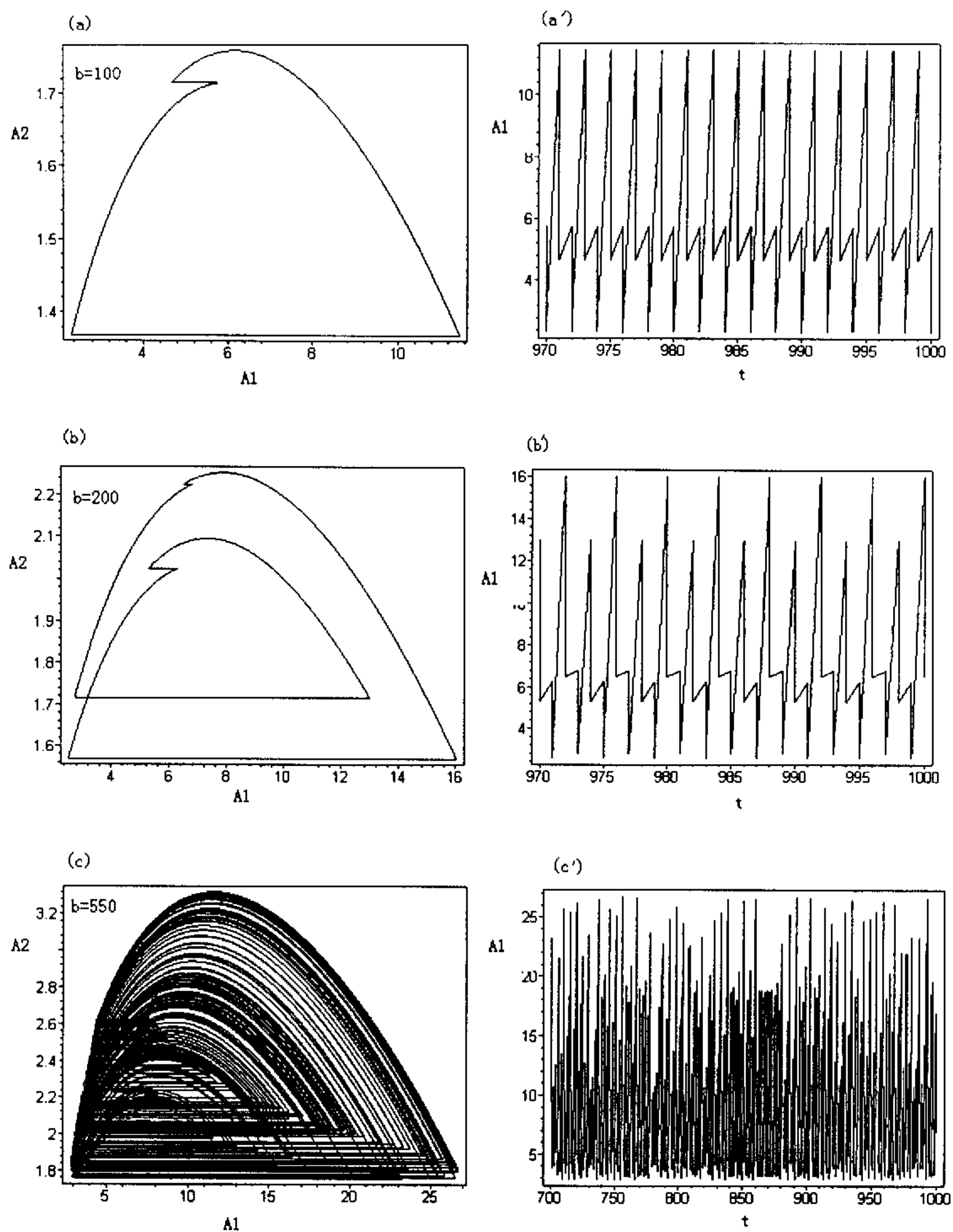


图 4.4.4: 周期倍分到混沌. (a) 周期 2 解, (a)' 幼年种群周期 2 解的时间序列; (b) 周期 4 解, (b)' 幼年种群周期 4 解的时间序列; (c) 奇怪吸引子, (c)' 幼年种群奇怪吸引子的时间序列. 其它参数为 $\mu = 0.7, m_1 = 0.2$.

为了简单起见, 我们假设 $\mu_1 = \mu_2 = \mu$. 相似于系统 (4.4.1), 我们有下面的

相应与系统 (4.4.15) 的频闪映射

$$\begin{cases} A_1(k+1) = bp[A_2(k) + (1-q)A_1(k)]e^{-p(A_1(k)+A_2(k))} + pqA_1(k), \\ A_2(k+1) = p(1-q)A_1(k) + pA_2(k), \end{cases} \quad (4.4.16)$$

其中 $p = e^{-\mu}, q = e^{-m_1}$.

作变换 $x = pA_1, y = pA_2$, 则系统 (4.4.16) 变为

$$\begin{cases} x_{k+1} = bp[y_k + (1-q)x_k]e^{-(x_k+y_k)} + pqx_k, \\ y_{k+1} = p(1-q)x_k + py_k, \end{cases} \quad (4.4.17)$$

系统 (4.4.17) 具有两个平衡态 $\bar{E}_0(0,0), \bar{E}^*(\bar{x}^*, \bar{y}^*)$ 且

$$\bar{x}^* = -\frac{1-p}{1-pq} \ln\left(\frac{(1-pq)(1-p)}{bp(1-q)}\right), \quad \bar{y}^* = -\frac{p(1-p)}{1-pq} \ln\left(\frac{(1-pq)(1-p)}{bp(1-q)}\right).$$

定义 $\bar{b}_0 = \frac{(1-p)(1-pq)}{p(1-q)}$, $\bar{b}_c = \frac{(1-p)(1-pq)}{p(1-q)} e^{\frac{2+2p^2q}{(1-p)(1+pq)}}$ 和内禀净再生数 $\bar{R}_0 = \frac{bp(1-p)}{(1-p)(1-pq)}$. 对系统 (4.4.17) 我们有与系统 (4.4.3) 相同的结论.

定理 4.4.2 对任意固定且满足 $0 < p < 1, 0 < q < 1$ 的 p, q , $\bar{E}_0 = (0,0)$ 在点

$$b = \bar{b}_0 = \frac{(1-p)(1-pq)}{p(1-q)} \quad (\text{或 } \bar{R}_0 = 1) \quad (4.4.18)$$

处经历一个跨临界的分支; $\bar{E}^* = (\bar{x}^*, \bar{y}^*)$ 在点

$$b = \bar{b}_c = \frac{(1-p)(1-pq)}{p(1-q)} e^{\frac{2+2p^2q}{(1-p)(1+pq)}} \quad (4.4.19)$$

处经历一个超临界的倍周期分支.

证明 定理 4.4.2 的证明完全相同于定理 4.4.1 的证明, 这里从略. \square

下面我们主要讨论生殖时滞对系统 (4.4.3) 和 (4.4.17) 稳定性的影响. 对系统 (4.4.3) 我们已经知道参数 q 不影响系统 (4.4.3) 正平衡态 E^* 的稳定性. 进一步, 从图 4.4.1 可以看出参数 q 也不影响系统 (4.4.3) 的复杂行为. 为此, 我们讨论参数组 (p, q) 如何影响系统 (4.4.3) 和 (4.4.17) 正平衡态存在和稳定的区间长度 ($b_c - b_0$ 和 $\bar{b}_c - \bar{b}_0$).

记

$$\begin{aligned} D(p) &= b_c - b_0 = b_0[e^{2/(1-p)} - 1], \\ \bar{D}(p, q) &= \bar{b}_c - \bar{b}_0 = \bar{b}_0[e^{\frac{2(1+p^2q)}{(1-p)(1+pq)}} - 1]. \end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned}\lim_{q \rightarrow 0} \bar{b}_0 &= \lim_{q \rightarrow 0} \frac{(1-p)(1-pq)}{p(1-q)} = \frac{1-p}{p} = b_0, \\ \lim_{q \rightarrow 0} \bar{b}_c &= \lim_{q \rightarrow 0} \frac{(1-p)(1-pq)}{p(1-q)} e^{\frac{2(1+p^2q)}{(1-p)(1+pq)}} = b_c,\end{aligned}$$

则

$$\lim_{q \rightarrow 0} \bar{D}(p, q) = b_c - b_0 = D(p),$$

这说明当 $q \rightarrow 0$ 时, 正平衡态 E^* 和 \bar{E}^* 的稳定性是一致的.

另一方面, 有

$$\frac{\partial \bar{D}(p, q)}{\partial q} = \frac{1-p}{1-q} \left[\frac{1-p}{p(1-q)} \left(e^{\frac{2(1+p^2q)}{(1-p)(1+pq)}} - 1 \right) - \frac{2(1-pq)}{(1+pq)^2} e^{\frac{2(1+p^2q)}{(1-p)(1+pq)}} \right]. \quad (4.4.20)$$

设函数

$$f(q) = \frac{1-p}{p(1-q)} \left(e^{\frac{2(1+p^2q)}{(1-p)(1+pq)}} - 1 \right) - \frac{2(1-pq)}{(1+pq)^2} e^{\frac{2(1+p^2q)}{(1-p)(1+pq)}}. \quad (4.4.21)$$

则

$$\lim_{q \rightarrow 0} f(q) = \frac{1-3p}{p} e^{\frac{2}{1-p}} - \frac{1-p}{p} \doteq g(p), \quad (4.4.22)$$

且

$$\lim_{q \rightarrow 1} f(q) = +\infty. \quad (4.4.23)$$

容易证明函数 $g(p)$ 满足下面的性质:

(A) 存在 $p^* \in (0, \frac{1}{3})$ 使得当 $p \in (0, p^*)$ 时 $g(p) > 0$, 且对 $p \in (p^*, 1)$ 有 $g(p) < 0$ (如图 4.4.5(a)).

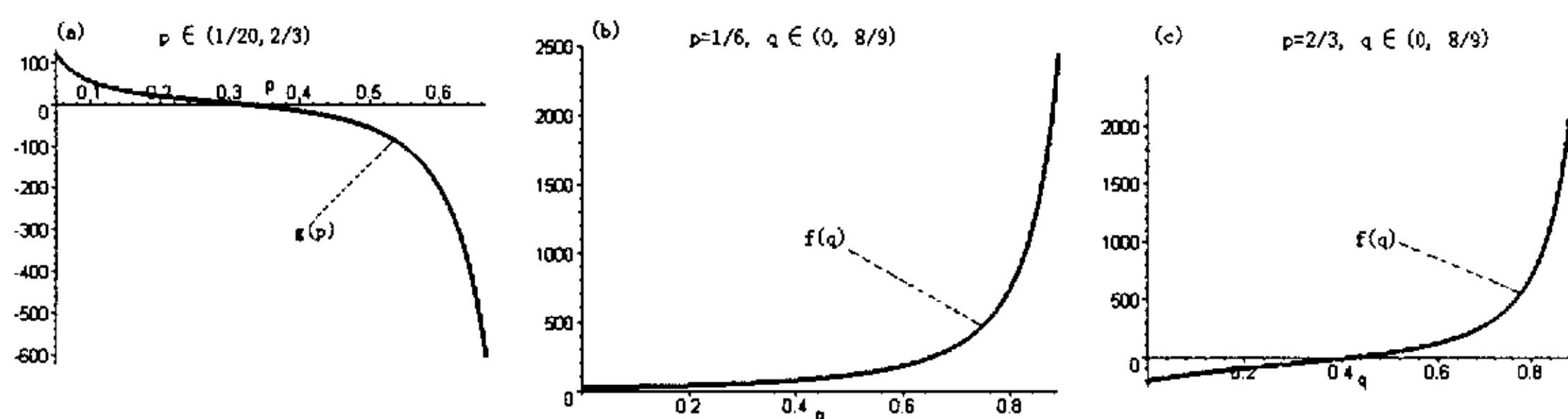


图 4.4.5: 函数 $g(p)$ 和 $f(q)$ 的图形. (a) 函数 $g(p)$ 在区间 $p \in (1/20, 2/3)$ 上的图形; (b) 函数 $f(q)$ 在区间 $p = 1/6, q \in (0, 8/9)$ 上的图形; (c) 函数 $f(q)$ 在区间 $p = 2/3, q \in (0, 8/9)$ 上的图形.

由图 4.4.5(b) 和 (c) 我们知道 $f(q)$ 在区间 $p \in (0, 1)$ 上是严格增加的。根据性质 (A) 和 (4.4.23) 式, 有

- (1) 如果 $p \in (0, p^*)$, 则对所有 $q \in (0, 1)$ 有 $f(q) > 0$ (如图 4.4.5(b));
- (2) 如果 $p \in (p^*, 1)$, 存在 $q^* \in (0, 1)$ 使得当 $q \in (0, q^*)$ 时 $f(q) < 0$; 当 $q \in (q^*, 1)$ 时 $f(q) > 0$ (如图 4.4.5(c))。

综合性质 (A)、(1) 和 (2), 我们有如下关于系统 (4.4.3) 和 (4.4.17) 的稳定性的结论。

结论 1 当 $p \in (0, p^*)$, 则对所有 $q \in (0, 1)$ 有 $\bar{D}(p, q) > D(p)$ (此时我们说系统 (4.4.3) 正平衡态 E^* 的稳定性弱于系统 (4.4.17), 即生殖时滞加强了系统的稳定性)。

结论 2 当 $p \in (p^*, 1)$, 存在 $q^* \in (0, 1)$ 使得对 $q \in (0, q^*)$ 有 $\bar{D}(p, q) < D(p)$ (此时我们说系统 (4.4.3) 正平衡态 E^* 的稳定性强于系统 (4.4.17), 即生殖时滞减弱了系统的稳定性); 对所有 $q \in (q^*, 1)$ 有 $\bar{D}(p, q) > D(p)$ (此时我们说系统 (4.4.3) 正平衡态 E^* 的稳定性弱于系统 (4.4.17), 即生殖时滞加强了系统的稳定性)。

为了说明上面的结果, 我们给一个数值例子: 如图 4.4.6, 参数 $\mu = 0.7$, 即 $p \approx 0.4965 \in (p^*, 1)$, 则 $D(0.4965) = 52.85$ 。分别取 $m_1 = 1.7, 0.2, 0.01$ (即 $q \approx 0.1827, 0.8187, 0.99$), 我们有 $\bar{D}(0.4965, 0.1827) = 49.61 < D(0.4965)$ (如图 4.4.6(a)), $\bar{D}(0.4965, 0.8187) = 95.60 > D(0.4965)$ (如图 4.4.6(b)) 和 $\bar{D}(0.4965, 0.99) = 1371.77 \gg D(0.4965)$ (如图 4.4.6(c))。

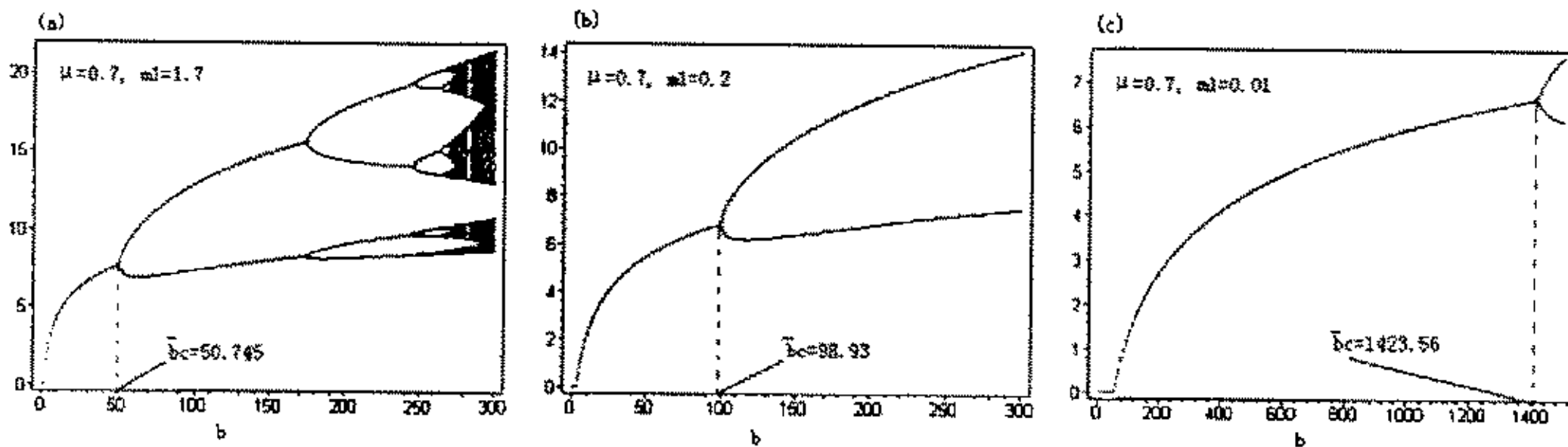


图 4.4.6: 参数 q 或 m_1 对系统稳定性的影响. (a) $\mu = 0.7, m_1 = 1.7, \bar{D}(p, q) = 49.61$; (b) $\mu = 0.7, m_1 = 0.2, \bar{D}(p, q) = 95.60$; (c) $\mu = 0.7, m_1 = 0.01, \bar{D}(p, q) = 1371.77$ 。

4.5 两阶段具密度依赖成熟率和线性生育脉冲混杂模型

这一节的主要目的是研究密度依赖成熟率和线性生育脉冲如何影响混杂系统的动力学行为。为此我们考虑下面的系统

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -dx(t) - ax(t)e^{-W(t)}, \\ \dot{y}(t) = ax(t)e^{-W(t)} - dy(t), \\ x(m^+) = x(m) + by(m), \end{cases} \quad t \neq m \in Z^+ \quad (4.5.1)$$

其中 $W(t) = x(t) + y(t)$, Z^+ 是正整数集合。

4.5.1 系统 (4.5.1) 的频闪映射

相加系统 (4.5.1) 的前两个方程得到

$$x(t) + y(t) = (x_m + y_m)e^{-d(t-m)}, \quad m \leq t < m+1, \quad (4.5.2)$$

其中 x_m 和 y_m 为在时刻 m 成年和幼年的初始值。

把 (4.5.2) 代入系统 (4.5.1) 的第一个方程得到幼年种群在一个脉冲区间 (即 $m \leq t < m+1$) 的解为

$$x(t) = x_m \exp[-d(t-m) + a(Ei(1, x_m + y_m) - Ei(1, (x_m + y_m)e^{-d(t-m)}))]/d. \quad (4.5.3)$$

指数积分函数 $Ei(n, x)$ 当 $Re(x) > 0$ 时定义为

$$Ei(n, x) = \int_1^\infty \frac{\exp(-xt)}{t^n} dt$$

其中 n 是一个非负整数。关于指数积分函数的进一步性质可参看文献 [1] 和定理 1.5.2。

由 (4.5.2) 和 (4.5.3) 有

$$\begin{cases} x(t) = x_m \exp[-d(t-m) + \frac{a}{d}(Ei(1, x_m + y_m) - Ei(1, (x_m + y_m)e^{-d(t-m)}))], \\ y(t) = (x_m + y_m)e^{-d(t-m)} - x_m \exp[-d(t-m) + \frac{a}{d}(Ei(1, x_m + y_m) \\ - Ei(1, (x_m + y_m)e^{-d(t-m)}))], \end{cases} \quad m \leq t < m+1. \quad (4.5.4)$$

方程 (4.5.4) 在脉冲区间成立, 在每一次生育脉冲的时刻, 更多的幼年种群增加, 即在脉冲时刻有:

$$\begin{cases} x_{m+1} = bp(x_m + y_m) + p(1-b)x_m \exp[\frac{a}{d}H(x_m + y_m)], \\ y_{m+1} = p(x_m + y_m) - px_m \exp[\frac{a}{d}H(x_m + y_m)], \end{cases} \quad (4.5.5)$$

其中 $p \triangleq e^{-d}$ 和 $H(x_m + y_m) \triangleq Ei(1, x_m + y_m) - Ei(1, p(x_m + y_m))$ 。系统 (4.5.5) 是一个离散系统, 它刻画了成年种群和幼年种群在两次脉冲时刻种群数量的关

系. 系统 (4.5.5) 的动力学性质及其 (4.5.4) 式确定了系统 (4.5.1) 的动力学性质. 因此, 下面我们选择 b 作为分支参数来研究系统 (4.5.5) 的各种动力学行为.

4.5.2 系统 (4.5.5) 平衡态的稳定性

对于平衡态 $(x, y) = (0, 0)$ 的局部稳定性, 可由下面的线性化系统确定:

$$X_{m+1} = AX_m, \quad (4.5.6)$$

其中 $A = \begin{pmatrix} bp + (1-b)pe^{-a} & bp \\ p - pe^{-a} & p \end{pmatrix}$ 且 $X = (x, y)^T$. $X = 0$ 是稳定的如果矩阵 A 的特征值的模小于 1, 即矩阵 A 满足如下的 Jury 条件 [63].

$$P1 \triangleq 1 - \text{tr}A + \det A > 0, \quad (4.5.7a)$$

$$P2 \triangleq 1 + \text{tr}A + \det A > 0, \quad (4.5.7b)$$

$$P3 \triangleq 1 - \det A > 0. \quad (4.5.7c)$$

容易证明 (4.5.7b) 和 (4.5.7c) 始终成立, 随着 b 增加, 不等式 (4.5.7a) 在一个临界点 b_0 处开始不成立, 即 $b_0 = \frac{(1-p)(1-pe^{-a})}{p(1-e^{-a})}$. 因此该种群为了免遭灭绝的危险, 出生率 b 一定大于 b_0 , 即当 $b < b_0$ 时, 种群灭绝.

下面我们在 $b > b_0$ 的情况下寻找系统 (4.5.5) 的正平衡态 $E_*(x^*, y^*)$. 容易知道 $E_*(x^*, y^*)$ 满足如下的方程:

$$\begin{cases} x = bp(x+y) + p(1-b)xe^{\frac{a}{d}H(x+y)}, \\ y = p(x+y) - pxe^{\frac{a}{d}H(x+y)}. \end{cases} \quad (4.5.8)$$

对于 $E_*(x^*, y^*)$ 的存在性和稳定性, 我们有如下的主要结论:

定理 4.5.1 如果 $b > b_0$, 则系统 (4.5.5) 存在唯一正的平衡态 $E_*(x^*, y^*)$. 进一步存在一个关于参数 (p, a) 的曲面 $b_c(p, a)$ 使得当 $b_0 < b < b_c(p, a)$, 平衡态 $E_*(x^*, y^*)$ 是局部稳定的; 如果 $b > b_c(p, a)$, 则平衡态 $E_*(x^*, y^*)$ 是不稳定的, 且在点 $b = b_c(p, a)$ 的分支为倍周期分支.

证明 由方程 (4.5.8) 的第二个方程我们有

$$y = \frac{p}{1-p}(1 - \exp(aH(x+y)/d))x. \quad (4.5.9)$$

方程 (4.5.9) 两边加上 x 并求解得

$$x = \frac{(1-p)W}{1 - p\exp(aH(W)/d)} \triangleq f(W),$$

其中 $W = x + y$ 。

同样利用 (4.5.8) 第二个方程有

$$pW = y + px \exp(aH(W)/d). \quad (4.5.10)$$

把 (4.5.10) 式代入 (4.5.8) 的第一个方程并利用 (4.5.9) 得到

$$\exp(aH(W)/d) = \frac{bp - 1 + p}{bp - p + p^2}, \quad x = \frac{b - 1 + p}{b} W \triangleq g(W). \quad (4.5.11)$$

如果 $b > b_0$ ，容易证明 $b > \max\{1 - p, \frac{1-p}{p}\}$ ，则有 $0 < \frac{bp-1+p}{bp-p+p^2} < 1$ 。根据定理 1.5.2，对所有的 $W > 0$ 有 $f(W) > 0$ 成立且

$$f'(W) = (1-p) \frac{(1 - p \exp(aH(W)/d)) + \frac{\partial p}{\partial d} \exp(aH(W)/d) W H'(W)}{[1 - p \exp(aH(W)/d)]^2}. \quad (4.5.12)$$

利用函数 $H(W)$ 的性质，对所有 $W > 0$ ，函数 $f'(W) > 0$ 成立且

$$f'(0) = \frac{1-p}{1-pe^{-a}}. \quad (4.5.13)$$

因此，由 (4.5.11)、(4.5.13) 和条件 $b > b_0$ ，我们得到

$$f'(0) - g'(0) = \frac{1-p}{1-pe^{-a}} - \frac{b-1+p}{b} = \frac{(1-p)(1-pe^{-a}) - bp(1-e^{-a})}{b(1-pe^{-a})} < 0. \quad (4.5.14)$$

另一方面，由函数 $f(W)$ 和 $g(W)$ 的表达式有

$$f(W) - g(W) = W \left[\frac{1-p}{1-p \exp(aH(W)/d)} - \frac{b-1+p}{b} \right] \triangleq WD(W),$$

其中 $D(W) = \frac{1-p}{1-p \exp(aH(W)/d)} - \frac{b-1+p}{b}$ 。根据函数 H 的性质 (iii) (定理 1.5.2) 我们有

$$\lim_{W \rightarrow \infty} D(W) = \frac{1-p}{b} > 0, \quad p \in (0, 1],$$

这说明当 W 充分大时，曲面 $f(W)$ 位于曲面 $g(W)$ 的上部。由于函数 f 和 g 是连续的，且图象只相交一次，所以当 $b > b_0$ 时，系统 (4.5.5) 存在唯一的正平衡态 $E_*(x^*, y^*)$ 在 R_+^2 的内部。

对于平衡态 $E_*(x^*, y^*)$ 的稳定性，等价的我们考虑如下的系统：

$$\begin{cases} x_{m+1} = bpW_m + p(1-b)x_m \exp(aH(W_m)/d), \\ W_{m+1} = p(1+b)W_m - pbx_m \exp(aH(W_m)/d). \end{cases} \quad (4.5.15)$$

系统 (4.5.15) 在 $E_*(x^*, W^*)$ 处的 Jacobian 矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} p(1-b) \exp(aH(W^*)/d) & bp + \frac{\partial p(1-b)x^*}{\partial d} H'(W^*) \exp(aH(W^*)/d) \\ -pb \exp(aH(W^*)/d) & p(1+b) - \frac{\partial pbx^*}{\partial d} H'(W^*) \exp(aH(W^*)/d) \end{pmatrix}. \quad (4.5.16)$$

由 (4.5.7) 式我们有

$$\begin{aligned}
 P1 &= 1 - [p(1-b)\exp(aH(W^*)/d) + p(1+b) - \frac{apbx^*}{d}H'(W^*)\exp(aH(W^*)/d)] \\
 &\quad + p^2\exp(aH(W^*)/d) \\
 &= \frac{a(p+pb-1)}{d}W^*H'(W^*), \\
 P2 &= 1 + [p(1-b)\exp(aH(W^*)/d) + p(1+b) - \frac{apbx^*}{d}H'(W^*)\exp(aH(W^*)/d)] \\
 &\quad + p^2\exp(aH(W^*)/d) \\
 &= 1 + p + pb + \frac{(1-b+p)(bp-1+p)}{b-1+p} - \frac{a(p+pb-1)}{d}W^*H'(W^*), \\
 P3 &= 1 - p^2\exp(aH(W^*)/d).
 \end{aligned}$$

根据函数 H 的性质和 (4.5.11) 式, 能够得到不等式 $P1 > 0$ 和 $P3 > 0$ 始终成立. 如果不等式 $P2 > 0$ 不成立, 即

$$W^*H'(W^*) > \frac{2d(b-1+p^2+p^2b)}{a(p+pb-1)(b-1+p)}, \quad (4.5.17)$$

则 A 有一个特征值小于 -1 . 注意到 $b-1+p^2+p^2b > 0$ 等价于

$$b > \frac{1-p+p^2}{p+1+p^2}. \quad (4.5.18)$$

明显的如果 $b > b_0$, 则 (4.5.18) 成立. 因此如果我们选择 b 作为分支参数, 则我们可以利用下面的方程确定分支值 $b_c(p, a)$:

$$W^*H'(W^*) = \frac{2d(b-1+p^2+p^2b)}{a(p+pb-1)(b-1+p)}, \quad (4.5.19)$$

同时也说明在 $b = b_c(p, a)$ 处的分支是一个倍周期分支. \square

4.5.3 分支分析和数值结果

前面我们主要研究了系统 (4.5.5) 的平衡态的存在性和稳定性. 但是当参数 b 超过 $b_c(p, a)$, 系统 (4.5.5) 存在许多有趣的动力学行为.

当 b 增加超过 $b_c(p, a)$, 系统出现一系列分支而最终走向混沌. 如图 4.5.1 我们给出了系统 (4.5.5) 的一个分支图. 在点 $b_c(p, a)$ 经过一个倍周期分支后 (其中在图 4.5.1(a) 中 $b_c(p, a) \approx 29360$, 且 $P1 \approx 2.4932, P2 \approx -0.000076, P3 \approx 0.7534$; 在图 4.5.1(b) 中, $b_c(p, a) \approx 909$ 满足 $P1 \approx 2.2763, P2 \approx -0.005135, P3 \approx 0.862092$), 系统 (4.5.5) 经历了一系列的周期倍增的分支、切分支和混沌吸引子的突变. 在图 4.5.1(a) 中我们也注意到当 b 增加超过 19225.8 时, 系统存在各种

各样的共存态。下面我们分别详细地说明以上各种现象。

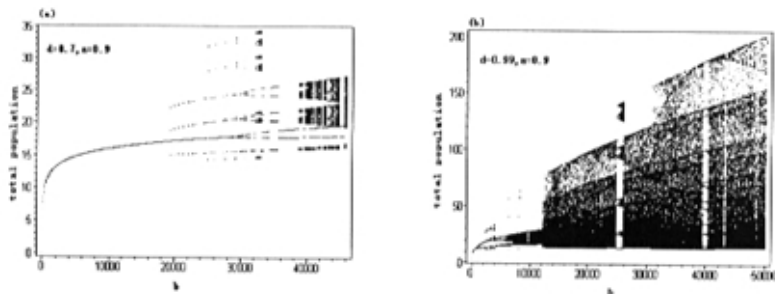


图 4.5.1: 说明参数 b 对系统 (4.5.5) 动力学行为的影响。(a) 系统 (4.5.5) 关于总种群数量的分支参数图, 参数 $d = 0.7, a = 0.9$; (b) 系统 (4.5.5) 关于总种群数量的分支参数图, 参数 $d = 0.99, a = 0.9$ 。

• 吸引子的非唯一性

从分支参数图 4.5.1 我们看出当参数发生微小的变化, 种群的总数量从一个吸引子突然改变成另一个吸引子的现象非常普遍。在图 4.5.1(a) 中, 一个明显的改变发生在点 $b \approx 19225.8$ 。这里一个周期 1 的吸引子突然变成一个周期 3 的吸引子。一个更加详细的数值分析说明这种现象不仅是混沌之间的周期窗口的改变, 而且反映了系统吸引子的非唯一性。明显的, 系统的解最终趋向那一个吸引子严格依赖于成年和幼年种群的初始条件。多个吸引子的存在性在非线形矩阵模型中被发现是非常普遍的 [24,56]。

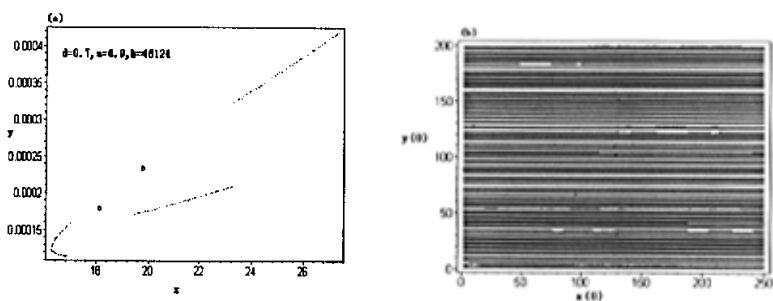


图 4.5.2: (a) 系统 (4.5.5) 的两个可选择的吸引子, 参数 $d = 0.7, a = 0.9, b = 46124$: 周期 2 和混沌吸引子。(b) 系统 (4.5.5) 的盆吸引子, 参数 $d = 0.7, a = 0.9, b = 20423$ 。

对于模型 4.5.5, 取参数 $d = 0.7, a = 0.9$ (如图 4.5.1(a)), 我们观察到下面的共存态: 在 $b = 19225.8$ 时周期 1 和周期 3 共存; 在 $b = 39264$ 时周期 2 和周期 8 共存等等. 取参数 $d = 0.99, a = 0.9$ (如图 4.5.1(b)), 当 $b = 2500$ 时, 周期 2 和周期 3 共存. 这一现象出现的一个重要原因是系统本身存在很强的周期性.

盆吸引域定义为那些轨道渐近趋向吸引子的初始值的集合 [44]. 图 4.5.2(b) 说明了两个选择的盆吸引域 — 黑色区域是周期 2 的盆吸引域, 而白色区域是周期 3 的盆吸引域.

• 混沌吸引子的突变

另一个普通的特征是混沌吸引子能够不连续的改变其大小, 或者在某一个临界值上最终出现或突然消失. 这种混沌吸引子的突变现象最初被 Grebogy 等在文献 [44] 详细的研究. 如图 4.5.1(a), 当参数 b 增加超过 $b = 39260$ 时, 混沌吸引子突然消失而出现混沌吸引子的突变. 另一类型的混沌吸引子突变现象可以在图 4.5.1(b) 中观察到, 即当参数 b 增加超过 $b = 12098$ 时, 混沌吸引子突然改变其大小.

• 超敏感性

最后我们通过观察和数值分析来研究混沌吸引子的超敏感性、瞬时型. 超敏感性通常用来描述系统的解在一个相当长的时间后瞬时收敛到一个稳定吸引子的现象. 这些瞬时的动力学现象发生的时间比外界周期环境波动的时间要大得多 [40,58]. 生态学家关心和考虑的一个重要问题是一个种群在经过几十代或几百代后, 其数量会走向一个什么状态? 而超敏感性就说明了种群在经历了几千年或更长的时间后, 系统仍能持久. 图 4.5.3 给出了一个超敏感性的例子. 在这个例子中, 幼年种群在经历了大约 2350 代后突然稳定到一个周期 24 的周期吸引子.

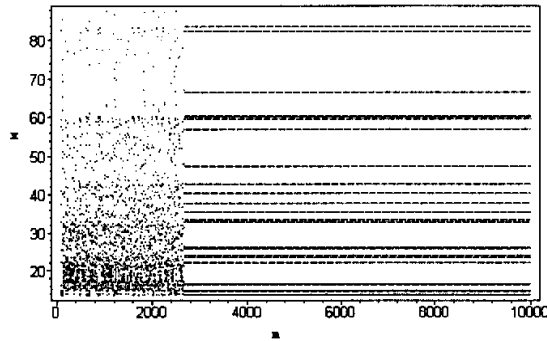


图 4.5.3: 参数为 $d = 0.99, a = 0.9, b = 15750$ 时的超敏感性, 初值为 $x(0) = 20, y(0) = 10$.

4.5.4 系统 (4.5.1) 和系统 (4.5.5) 的关系

利用 4.4.1 相同的方法我们可以研究系统 (4.5.1) 和系统 (4.5.5) 的关系。

当 $b < b_0$ 时, 平衡态 $E_0(0, 0)$ 是稳定的。在这种情况下, 系统 (4.5.1) 的轨线趋于原点 (如图 4.5.1 我们有 $b_0 \approx 1.3633$ 和 $b_0 \approx 2.419$)。

当 $b_0 < b < b_c(p, a)$ 时, 平衡态 E_* 是稳定的。在这种情况下, 系统 (4.5.1) 的解趋于一个周期解 $(x_e(t), y_e(t))$ (如图 4.5.4)。也就是说, 系统 (4.5.1) 的周期解 $(x_e(t), y_e(t))$ 是局部稳定的。在 $b = b_0$ 处存在一个跨临界的分支, 周期解 $(0, 0)$ 和 $(x_e(t), y_e(t))$ 交换稳定性; 在 $b = b_c$ 处存在一个超临界的分支, 周期 1 解和周期 2 解相互交换稳定性。

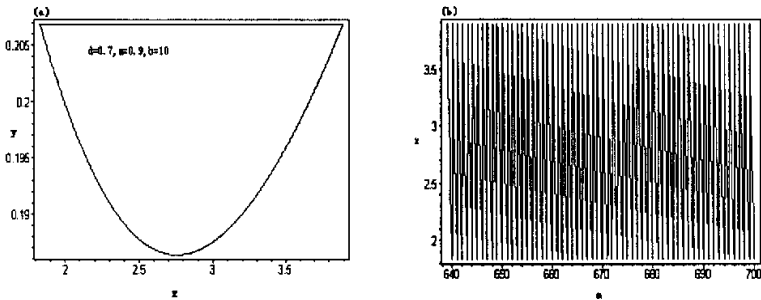


图 4.5.4: 幼年 and 成年种群的正周期解, 其中参数 $d = 0.7, a = 0.9, b = 10$ 。(a) 周期 1 解。(b) 幼年种群周期 1 解的时间序列。

参数 b 对系统 (4.5.1) 的动力学行为的影响可以利用频闪映射的样本采样来说明。由于我们在脉冲点上取样, 所以频闪映射的不动点对应系统 (4.5.1) 的周期为 1 的周期解, 频闪映射的两点环对应系统 (4.5.1) 的周期为 2 的周期解等等。系统出现各种周期性的波动与下面的事实是一致的: 在实验室进行昆虫培养时, 通常利用控制幼年种群的食物来控制昆虫数量的变化 [49,83-84]。实验观察到昆虫数量以其成熟周期的 2-3 倍时间为周期的波动。分支参数图 4.5.1 清楚的说明: 系统 (4.5.1) 出现各种吸引子的共存。例如: 初值分别为 $x(0) = 20, y(0) = 10$ 和 $x(0) = 200, y(0) = 100$ 时的周期 1 和周期 3 的周期解共存 (如图 4.5.5(a)); 初值分别为 $x(0) = 2, y(0) = 1$ 和 $x(0) = 200, y(0) = 100$ 时的周期 2 和周期 8 的周期解共存 (如图 4.5.5(b)); 初值分别为 $x(0) = 2, y(0) = 1$ 和 $x(0) = 20, y(0) = 10$ 时的周期 2 和混沌吸引子共存 (如图 4.5.5(c))。图 4.5.6 给出了一个混沌吸引子突变的例子, 当参数 b 增加经过 39260 时混沌吸引子突然消失而出现一个周期 2 的周期吸引子。

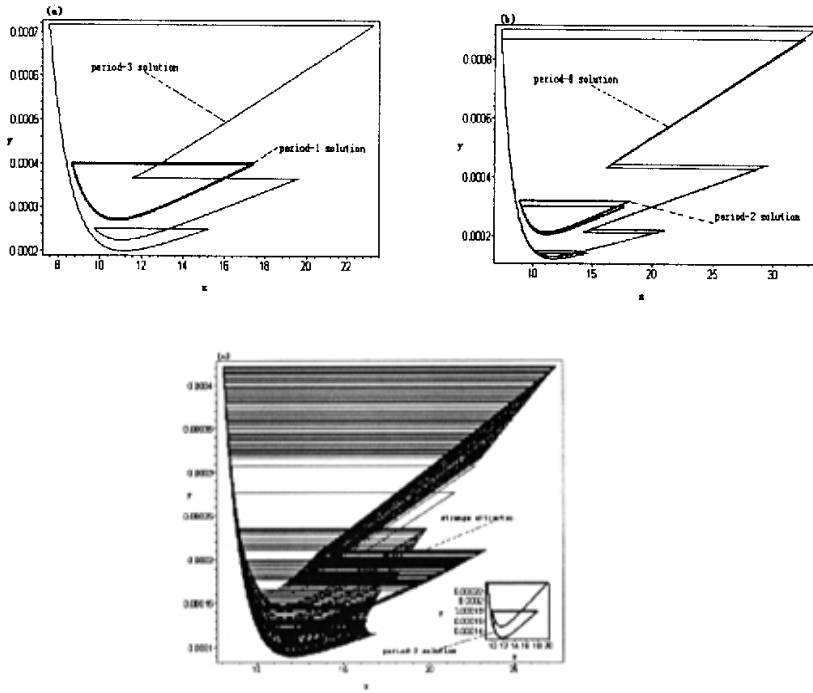


图 4.5.5：系统 (4.5.1) 多个吸引子共存的现象，其中参数为 $d = 0.7, a = 0.9$ 。(a) 周期 1 解和周期 3 解共存，其中 $b = 22000$ ，(b) 周期 2 解和周期 8 解共存，其中 $b = 29116$ 。(c) 周期 2 解和混沌吸引子共存，其中 $b = 46124$ 。

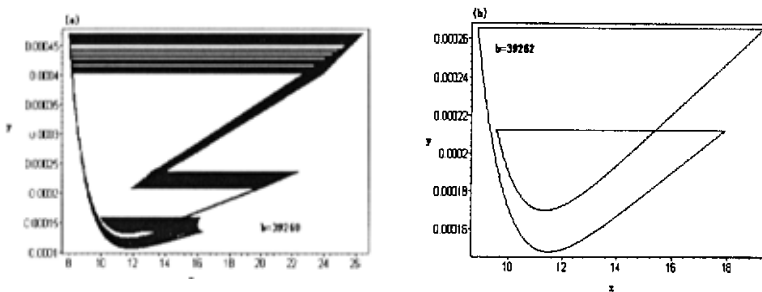


图 4.5.6：混沌吸引子的突变，其中参数为 $d = 0.7, a = 0.9$ 。

4.6 生物结论和进一步研究的问题

本章第一部分考虑了一个具密度依赖生育脉冲的阶段结构混杂模型. 首先我们利用频闪映射的性质研究了离散系统的各种动力学行为: 获得了周期 1 解的解析表达式及其稳定性条件; 给出了超临界分支的一个完整的证明以及系统的各种复杂行为.

通过比较系统 (4.4.1)((4.4.15)) 和相应的没有脉冲效应的连续阶段结构模型的动力学行为, 我们得到: 连续阶段结构模型的动力学行为由系统的平衡态或极限环确定 [31,72,81]. 一般来说, 具有两个分别相应与种群灭绝和共存的平衡态, 如果共存平衡态存在不稳定, 则系统可能还具有一个稳定的极限环 [16,17,68]. 这些平衡态和极限环是连续阶段结构模型可行的吸引子. 而系统 (4.4.1) 和 (4.4.15) 的动力学行为由周期解和混沌吸引子所确定. 所以我们可以说周期的生育脉冲能够使得系统: (a) 平衡态消失, (b) 产生周期倍增, 和 (c) 出现混沌.

一个有意义的结果是我们得到了生殖时滞对系统的动力学行为同时具有稳定和不稳定性的影响. 实际上如果种群的死亡率 $\mu \in (-\ln(p^*), 1)$ (其中 $p^* \in (0, 1/3)$), 则生殖时滞加强了周期 1 解的稳定性, 同时当死亡率相对较高时, 幼年种群的成熟率不影响周期 1 解的稳定性. 如果 $\mu \in (0, -\ln(p^*))$, 我们找到成熟率的一个临界值 $m_1^* = -\ln(q^*)$ ($q^* \in (0, 1)$), 使得当 $m_1 \in (-\ln(q^*), 1)$ 时生殖时滞减弱了周期 1 解的稳定性, 而当 $m_1 \in (0, -\ln(q^*))$ 时加强了周期 1 解的稳定性. 这说明了当死亡率相对较小时, 生殖时滞对周期 1 解的稳定性的影响依赖于成熟率.

第二部分研究了一个具生育脉冲和密度依赖成熟率的阶段结构混杂模型. 我们得到了对相同的参数种群数目可以存在多个不同的最终状态, 并且种群自身时代的波动能够增加和减少种群数量的平均数. 特别的, 我们的结果说明了系统可以存在各种各样的周期波动和多个吸引子共存的现象. 从第 4.5.2 节我们可以看出, 为了使新出生的个体成功的成活到成年阶段, 成年种群在每一次的出生率都必须足够的大, 这一有趣的现象在第 4.5.2 节得到证实. 由定理 4.5.1 知, 为了使一个种群逃避灭绝的危险, 参数 b 必需大于 b_0 . 从生物的观点来看, 我们可以定义一个内禀净再生数 R_0 , 其中

$$R_0 = \frac{bp(1 - e^{-a})}{(1 - p)(1 - pe^{-a})} = \frac{be^{-d}}{1 - e^{-d}} \frac{1 - e^{-a}}{1 - e^{-(d+a)}}$$

容易知道不等式 $b > b_0$ 等价于 $R_0 > 1$. 因子 $\frac{be^{-d}}{1 - e^{-d}}$ 是一个成活的成年个体在其生命周期内出生的新生个体的平均数, 其中 e^{-d} 是每一个成年个体在成年期内存活的概率. 因子 $\frac{1 - e^{-a}}{1 - e^{-(d+a)}}$ 是幼年个体在幼年阶段存活且成功的进入成年阶段的概率. 则 R_0 是一个成年个体在其生命周期内出生的新生个体且能成功存活到成年阶段的平均数. 因此, $R_0 > 1$ 隐含了系统是持久的而不是绝灭的.

进一步, 通过比较图 4.5.1(a) 和 (b) 我们能得到一些有趣的结论。特别的有下面两个方面: 一是对同样的死亡率, 高的出生率能导致系统的不稳定性且使系统出现各种周期震荡; 另一个是当出生率增加时, 高的死亡率能使系统发生更快和更强的震动。

最后我们注意到当系统参数或初值发生微小改变时, 系统的动力学行为会发生很大的改变, 周期窗口、盆吸引子的存在性就说明了这一点。这种动力学行为的敏感性隐含了阶段结构的混杂系统可能存在更加复杂的现象。特别的, 改变一个种群的死亡率能使系统快速的发生稳定性的改变 (如图 4.5.1), 甚至当参数和初值不变时, 随着时间的推移系统的轨道也会发生很大的变化 (例如超敏感性)。这说明我们考虑的时间如果太短, 不可能得到系统的全部动力学结果。

近来, 连续阶段结构和离散阶段结构模型受到了很大的重视, 并得到了很好的研究 [39,50,72,73,82] 然而, 就我们所知, 关于具生育脉冲阶段结构混杂模型还没有相应的研究结果。我们也注意到增加生殖时滞、延长寿命、更加复杂的密度依赖函数和空间结构对我们提出模型的动力学行为都有很重要的影响, 这些都是我们今后要研究的内容。

第五章 季节性收获对阶段结构渔业模型的影响

5.1 生物背景

渔业资源是渔业生产的基础。高度重视水生生物资源的生存环境、生态平衡、生物多样性的保护,使渔业资源得到繁衍、增殖和合理开发利用,是实施渔业可持续发展战略的根本保证。渔业环境,主要指水生生物的生态环境质量,也包括临水的陆域环境和大气环境。凡与渔业生物资源包括饵料生物资源的生存繁衍相关的环境因子,都应引起渔业环境保护的高度重视。现代工业的发展,一方面为人类拓展了生存空间,另一方面,也因为废渣、废水、废气的随意排放,构成了对渔业环境的威胁。酷渔滥捕,过度捕捞,破坏了水域生态平衡,同样影响渔业生物资源的繁衍,危害渔业资源的保护和增殖。

海洋生物资源是一种生生不息的可再生资源,但并非取之不尽,用之不竭。海洋生物资源尽管非常丰富,但是随着沿海开发利用活动的不断增加,生态环境问题日益突出,海洋生物多样性受到严重威胁,海洋生物资源因过度开发而受到严重破坏,必须对海洋生物资源的可持续发展引起足够重视。随着海洋捕捞长期失控,甚至是大量捕杀产卵群体和幼体,破坏了种群补充和资源再生,导致渔业资源严重衰退,特别是许多优质生物种类受到严重破坏和消失,无法继续利用。

为了保护渔业资源,要严格控制过度捕捞,保护近海、浅海渔业资源,积极开发外海、深海渔业资源,稳步发展远洋渔业。我国海洋捕捞渔业的发展采取保近捕远的战略,在捕捞对象和安排上采取保底捕表的策略;对沿岸、近海实行禁渔区、禁渔期(如目前每年七、八月份在东海、黄海海域实行的休渔制度),限制捕捞幼鱼和危害资源的渔具,控制盲目发展渔船;加强水域环境的保护,重点加强对河口地区的水域环境保护,禁止长期大幅度排放污染物质,禁止在沿海地区建立大型污染性工业;加强对投放人工鱼礁、人工放流苗种等人工增殖资源措施的管理和保护生态环境。

长江渔业科研部门监测调查证明:春禁符合长江鱼类的生物习性,主要经济鱼类的繁殖季节,集中在每年的2至6月份,交配繁殖的鱼类并有相对集群的特点。实施春季禁渔管理,就有可能使大部分鱼类亲鱼和幼鱼加以保护,以便迅速补充群体数量,缓解主要经济鱼类资源的衰退趋势。

多年来,四川、重庆、江西、湖南等省市对辖地内的江河湖泊,尝试过春禁和冬禁养护管理。事实表明,实施过禁渔的江河湖泊,渔业资源和捕捞产量相对比较稳定,禁渔措施执行得好的水域,捕捞生产明显好于不禁渔的水域。长江实施春季禁渔后,可保护各种鱼类产卵亲体2000多万尾,增产1万多吨,有利于渔业可持续发展。

这一章的主要目的就是通过建立数学模型从理论上说明在渔业资源管理中

实施禁渔期有利于渔业资源的发展。根据渔业资源的不同生活习性,在不同的时刻开始收获渔业资源我们得到了不同的稳定存储量和不同的年度持续产量。这也说明我们在对可再生资源的管理中,必须考虑到季节性对资源的影响。然而已有的研究结果在很大程度上忽略了季节性对阶段结构模型的影响 [34,41,98]。特别的,我们将回答如下的几个问题:

- 季节收获如何影响渔业种群的持久性和成年种群的存储量?
- 季节收获如何影响最大年度持续产量?
- 生育脉冲如何影响种群的动力学行为及其复杂性?

为此,我们建立了一个具生育脉冲的两阶段结构(幼年和成年)模型,在第5.3节详细的研究了季节收获和生育脉冲对系统的影响。其中包括:季节性对系统持久性的影响(定义承受额外死亡率的能力)、成年种群存储量(其数量在生育脉冲发生后的瞬间测定)和最大年度持续产量的影响。进一步,我们讨论了系统行为对收获时间及密度依赖的生育函数的敏感性,得到了成年存储量、总收获时间和收获努力量三者之间的关系。

在5.3.5节,我们研究了系统的各种复杂动力学行为,如前所述,我们研究了密度依赖生育函数(Ricker或Beverton-Holt型),以及收获时间和收获努力量对系统动力学行为的影响。最后我们从生物观点解释了我们得到的结论及其进一步研究的方向。

5.2 具阶段结构和生育脉冲的单种群模型

如果没有阶段结构,我们假设种群数量按以下规律发展:

$$\dot{N} = B(N)N - dN \quad (5.2.1)$$

其中 $d > 0$ 是死亡率, $B(N)$ 是种群的内禀增长率并满足下面的假设,对 $N \in (0, \infty)$:

- (A₁) $B(N) > 0$;
- (A₂) $B(N)$ 是连续可微的且 $B'(N) < 0$;
- (A₃) $B(0^+) > d > B(\infty)$ 。

注意到(A₂)和(A₃)隐含对 $N \in (B(\infty), B(0^+))$, 函数 $B^{-1}(N)$ 存在(其中 B^{-1} 表示函数 B 的逆函数), 条件(A₃)说明存在环境容纳量 K 使得当 $N < K$ 时有 $B(N) > d$, 当 $N > K$ 时有 $B(N) < d$ 。在以上假设条件下,系统(5.2.1)的非平凡解当 $t \rightarrow \infty$ 时都趋于唯一的正平衡态 $N^* = K = B^{-1}(d)$ 。内禀增长率 $B(N)$ 的具体例子我们可以从第四章找到,为了方便,我们重新给出满足条件(A₁)-(A₃)的两类基本函数:

$$(B_1) \quad B_1(N) = be^{-N}, \text{ 参数满足 } b > d;$$

(B₂) $B_2(N) = \frac{b}{c+N^n}$, 参数满足 $b, c, n > 0$ 和 $\frac{b}{c} > d$.

函数 B_1 , 当 $n = 1$ 时的函数 B_2 通常用于渔业模型, 分别是 Ricker- 函数和 Beverton-Holt 函数.

• 具阶段结构的连续单种群模型

近年来, 阶段结构模型受到了很大的重视 [3,4,110]. 利用不同的微分和差分方程模型, 许多作者研究了食饵 [39,67]、捕食者种群 [108] 或两者都存在阶段结构 [51,52] 的捕食-被捕食系统或寄生-拟寄生系统. 从已知的参考文献来看, 有两类幼年-成年种群模型: 时滞常微分方程模型 (时滞是幼年到成年的成熟期)[14,52] 和房室常微分方程模型. Hastings 在文献 [52] 中研究了具时滞的阶段结构模型和没有时滞的阶段结构模型的关系, 说明了两类模型的稳定性差别主要依赖系统成熟率的不同选取.

如果假设模型 (5.2.1) 中的单种群具有阶段结构, 且种群 N 分成幼年 $x(t)$ 和成年 $y(t)$ 两类, 则 $N(t) = x(t) + y(t)$, 且只有成年种群具有出生能力, 则模型为:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = B(N(t))y(t) - dx(t) - ax(t), \\ \dot{y}(t) = ax(t) - dy(t). \end{cases} \quad (5.2.2)$$

其中幼年到成年的成熟率为 $a(a > 0)$, 它确定幼年种群的平均生命周期.

容易知道系统 (5.2.2) 存在平凡平衡态 $E_0(0, 0)$. 如果

$$B^{-}\left(\frac{d(d+a)}{a}\right) > 0, \quad (5.2.3)$$

则存在一个正的内部平衡态 $E^*(x^*, y^*) = \left(\frac{d}{a+d}B^{-}\left(\frac{d(d+a)}{a}\right), \frac{a}{a+d}B^{-}\left(\frac{d(d+a)}{a}\right)\right)$.

对于平衡态 E_0 和 E^* 的局部稳定性, 我们有下面的结论:

定理 5.2.1 假设 (A_1) 和 (A_2) 成立, 则 E_0 是局部渐近稳定的如果不等式 (5.2.3) 反向, 是不稳定的如果不等式 (5.2.3) 成立; E^* 是局部渐近稳定的如果 (5.2.3) 成立.

如果 $B(\infty) < d$, 则容易知道系统 (5.2.2) 是耗散的, 即存在正常数 $M > 0$ 使得集合

$$\Omega = \{(x, y) | 0 \leq x \leq M, 0 \leq y \leq M\}$$

是系统 (5.2.2) 的正不变集. 利用 Poincaré-Bendixson 定理, 我们得到如下的全局稳定性的结果:

定理 5.2.2 假设 (A_1) , (A_2) 和 $B(\infty) < d$ 成立. 如果不等式 (5.2.3) 反向, 则集合 Ω 是 E_0 的渐近稳定区域; 如果不等式 (5.2.3) 成立, 则集合 Ω 是 E^* 的渐近稳定区域.

证明 如果 $B^{-}(\frac{d(d+a)}{a}) < 0$, 由于周期解必需包含至少一个平衡态, 所以在区域 Ω 中不可能存在任何周期解. 利用 Poincaré-Bendixson 定理, 从 Ω 内部出发的轨线一定趋向一个平衡态. 因此, 如果 $B^{-}(\frac{d(d+a)}{a}) < 0$, 集合 Ω 是 E_0 的渐近稳定区域.

如果 $B^{-}(\frac{d(d+a)}{a}) > 0$, 则 E^* 存在且是局部稳定的. 对方程 (5.2.2) 我们应用 Dulac 判别得到

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = B'(N)y - (2d + a) < 0$$

在区域 Ω 的内部成立, 则在 Ω 内部不存在极限环. 由 Poincaré-Bendixson 定理, 从 Ω 内部出发的轨线一定趋向平衡态 E^* . \square

注意到不等式 (5.2.3) 对函数 $B(N)$ 的特殊形式可以改写为不等式 $R_0 > 1$, 其中 R_0 表示该种群的内禀净再生数. 例如: 如果 $B(N) = be^{-N}$, 不等式 (5.2.3) 等价于 $R_0 = \frac{ba}{d(d+a)} > 1$. $R_0 = \frac{ba}{d(d+a)}$ 是一个个体在其生命周期内出生新生个体的平均数 [31,32]. 因此, 如果 $R_0 > 1$, 则平衡态 E^* 是全局稳定的. 表 5.2.1 给出了两类特殊函数 (Ricker 函数和 Beverton-Holt 函数) 的平衡态及其稳定性.

表 5.2.1: 两类特殊函数 (Ricker 函数和 Beverton-Holt 函数) 的平衡态及其稳定性

函数	平衡态	$B^{-}(\frac{d(d+a)}{a})$	R_0
Ricker	$x^* = -\frac{d}{d+a} \ln \frac{1}{R_0}$ $y^* = -\frac{a}{d+a} \ln \frac{1}{R_0}$	$-\ln \frac{1}{R_0}$	$\frac{ba}{d(d+a)}$
Beverton-Holt	$x^* = \frac{d}{a+d} \sqrt[q]{q(R_0 - 1)}$ $y^* = \frac{a}{a+d} \sqrt[q]{q(R_0 - 1)}$	$\sqrt[q]{q(R_0 - 1)}$	$\frac{ap}{qd(d+a)}$

• 具阶段结构和生育脉冲的单种群模型

对模型 (5.2.2) 我们进一步假设成年种群只在一年中的开始时刻具有出生能力, 也就是幼年种群的密度在当时间 t 为一个整数时, 增加数量 $B(N)y$. 因此我们得到如下具生育脉冲的阶段结构模型:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -dx(t) - ax(t), \\ \dot{y}(t) = ax(t) - dy(t), \\ x(m^+) = x(m) + B(N(m))y(m), \quad m \in Z^+, \end{cases}, m \leq t < m + 1, \quad (5.2.4)$$

其中幼年的成熟率为 $a(a > 0)$, 它确定幼年种群的平均生命周期, $Z^+ = \{0, 1, 2, \dots\}$.

系统 (5.2.4) 是一个脉冲微分方程。这一类方程近年来得到了很好的研究, 在很多应用科学上都有很好的应用。在 Bainov 和他的合作者的专著中给出了许多具体的例子 [8,9]。离散差分方程给具有季节性出生或出生发生在一个相对短的时间段上的种群模型提供了一个很好的描述 [24]。因此, 下面我们考虑两类特殊的函数, 即我们考虑函数 $B(N)$ 具有 Ricker 函数或 Beverton-Holt 函数时的特殊情形, 利用第四章中相同的方法, 我们得到由频闪映射所确定的差分方程:

对于 Ricker 函数, 根据第四章, 我们有如下的频闪映射:

$$\begin{cases} x_{m+1} = x_m e^{-(a+d)} + b[y_m + x_m(1 - e^{-a})]e^{-[d+e^{-d}(x_m+y_m)]}, \\ y_{m+1} = e^{-d}(1 - e^{-a})x_m + e^{-d}y_m. \end{cases} \quad (5.2.5)$$

对于 Beverton-Holt 函数, 根据第四章, 我们有如下的频闪映射:

$$\begin{cases} x_{m+1} = x_m e^{-(a+d)} + \frac{be^{-d}[y_m+x_m(1-e^{-a})]}{c+e^{-nd}(x_m+y_m)^n}, \\ y_{m+1} = e^{-d}(1 - e^{-a})x_m + e^{-d}y_m. \end{cases} \quad (5.2.6)$$

Tang 和 Chen 在文献 [101] 中详细的研究了系统 (5.2.5) 和 (5.2.6) 的各种动力学性质。得到了许多有趣的结果, 这些结果说明了生育脉冲在对系统动力学行为的影响上为系统提供了一个自然的周期使得系统出现周期倍增的现象, 甚至混沌。这一章的一个主要目标就是研究季节性收获对系统 (5.2.4) 平衡态数量的大小及其动力学行为的影响。

5.3 季节收获对系统动力学行为的影响

为了研究收获时间对系统 (5.2.4) 的影响, 不失一般性, 我们假设每一年成年鱼群在一个时间区间 (T_1, T_2) ($0 \leq T_1 < T_2 \leq 1$) 上被收获。也就是说, 每一年我们在 T_1 时刻开始收获, 在 T_2 时刻结束。为此我们考虑下面的季节收获模型:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -dx(t) - ax(t), & m \leq t < m+1, \\ \dot{y}(t) = \begin{cases} ax(t) - dy(t), & m \leq t < m+T_1, \\ ax(t) - (d+E)y(t), & m+T_1 \leq t < m+T_2, \\ ax(t) - dy(t), & m+T_2 \leq t < m+1, \end{cases} \\ x(m^+) = x(m) + B(N(m))y(m), & m \in Z^+, \end{cases} \quad (5.3.1)$$

其中 E 是收获努力量。明显的, $l = T_2 - T_1$ 是每一年的收获总时间, 即 $T_2 = T_1 + l$ 。

5.3.1 生育率为 Ricker 函数和 Beverton-Holt 函数时系统的频闪映射

在脉冲区间之间我们积分系统 (5.3.1) 的第一个方程得到

$$x(t) = x_m e^{-(d+a)(t-m)}, \quad m \leq t < m+1. \quad (5.3.2)$$

把 (5.3.2) 代入 (5.3.1) 的第二个方程, 在区间 $[m, m+T_1)$ 求解成年种群的解, 即

$$y(t) = (x_m + y_m) e^{-d(t-m)} - x_m e^{-(d+a)(t-m)}, \quad m \leq t < m+T_1. \quad (5.3.3)$$

则有

$$y(m+T_1) = (x_m + y_m) e^{-dT_1} - x_m e^{-(d+a)T_1}. \quad (5.3.4)$$

利用 (5.3.4) 作为初值在区间 $[m+T_1, m+T_2)$ 求解成年种群的解, 即

$$y(t) = \frac{ax_m e^{-(d+E)t}}{E-a} [e^{(d+a)m-(a-E)t} - e^{(d+E)m-(a-E)T_1}] + e^{-(d+E)(t-m-T_1)} [(x_m + y_m) e^{-dT_1} - x_m e^{-(d+a)T_1}], \quad m+T_1 \leq t < m+T_2, \quad (5.3.5)$$

且

$$y(m+T_2) = \frac{ax_m e^{-(d+E)(m+T_2)}}{E-a} [e^{(d+a)m-(a-E)(m+T_2)} - e^{(d+E)m-(a-E)T_1}] + e^{-(d+E)(T_2-T_1)} [(x_m + y_m) e^{-dT_1} - x_m e^{-(d+a)T_1}]. \quad (5.3.6)$$

最后利用 (5.3.6) 作为初值在区间 $[m+T_2, m+1)$ 求解成年种群的解, 即

$$y(t) = -x_m e^{-(d+a)(t-m)} + e^{-d(t-m-T_2)} [x_m e^{-(d+a)T_2} + x_m e^{-(d+E)T_2+ET_1} + y_m e^{-(d+E)T_2+ET_1} - x_m e^{-(d+E)T_2-(a-E)T_1} + \frac{ax_m}{E-a} (e^{-(d+a)T_2} - e^{-(d+E)T_2-(a-E)T_1})], \quad m+T_2 \leq t < m+1. \quad (5.3.7)$$

记

$$p \triangleq \frac{E}{E-a} [e^{-aT_2-d} - e^{-E(T_2-T_1)-aT_1-d}], \\ q \triangleq e^{-E(T_2-T_1)-d}, \quad k \triangleq e^{-(d+a)}.$$

对 Ricker 函数, 方程 (5.3.2) 和 (5.3.7) 在脉冲区间上成立. 在每一次脉冲发生的时刻点上, 更多的幼年种群被增加, 得到

$$\begin{cases} x_{m+1} = kx_m + be^{-(p+q)x_m - qy_m} [(p+q-k)x_m + qy_m], \\ y_{m+1} = (p+q-k)x_m + qy_m. \end{cases} \quad (5.3.8)$$

相似的对 Beverton-Holt 函数, 我们有

$$\begin{cases} x_{m+1} = kx_m + \frac{b[(p+q-k)x_m + qy_m]}{c + ((p+q)x_m + qy_m)^n}, \\ y_{m+1} = (p+q-k)x_m + qy_m. \end{cases} \quad (5.3.9)$$

5.3.2 系统 (5.3.8) 和 (5.3.9) 非负平衡态的稳定性

在讨论系统 (5.3.8) 和 (5.3.9) 非负平衡态的稳定性之前, 我们需要常数 p, q 和 k 如下的性质:

引理 5.3.1 常数 p, q, k 满足 $0 < k < 1, 0 < q < 1, p > 0$ 和 $p + q - k > 0$.

证明 容易知道不等式 $0 < k < 1$ 和 $0 < q < 1$ 自然成立. 根据常数 p 的定义, 我们有

$$\begin{aligned} p &= \frac{E}{E-a} [e^{-aT_2-d} - e^{-E(T_2-T_1)-aT_1-d}] \\ &= Ee^{-d-aT_2} \left[\frac{1 - e^{-(E-a)(T_2-T_1)}}{E-a} \right]. \end{aligned} \quad (5.3.10)$$

由于 $T_2 - T_1 > 0$, 如果 $E \neq a$, 则 $1 - e^{-(E-a)(T_2-T_1)}$ 和 $E - a$ 有相同的负号. 所以 $p > 0$ 成立. 如果 $E = a$, 则

$$p = \lim_{E \rightarrow a} \frac{E}{E-a} [e^{-aT_2-d} - e^{-E(T_2-T_1)-aT_1-d}] = a(T_2 - T_1)e^{-aT_2-d} > 0, \quad (5.3.11)$$

这说明 $p > 0$ 也是成立的.

由于

$$\begin{aligned} p + q - k &= \frac{E}{E-a} [e^{-aT_2-d} - e^{-E(T_2-T_1)-aT_1-d}] + e^{-E(T_2-T_1)-d} - e^{-(d+a)} \\ &= (e^{-aT_2-d} - e^{-(d+a)}) + (e^{-E(T_2-T_1)-d} - e^{-E(T_2-T_1)-aT_1-d}) \\ &\quad + \frac{ae^{-d}}{E-a} (e^{-aT_2} - e^{-E(T_2-T_1)-aT_1}), \end{aligned} \quad (5.3.12)$$

利用上面相同的方法, 我们可以得到 $\frac{ae^{-d}}{E-a} (e^{-aT_2} - e^{-E(T_2-T_1)-aT_1}) > 0$ 成立, 进而
不等式 $p + q - k > 0$ 成立. \square

对于 $(x, y) = (0, 0)$ 的稳定性, 我们可以利用其线性化方程来确定, 即

$$X_{m+1} = AX_m, \quad (5.3.13)$$

这里 A 是系统 (5.3.8) 或 (5.3.9) 在平衡态 $(x, y) = (0, 0)$ 处的线性化矩阵, 且 $X = (x, y)^T$. 当矩阵 A 的特征值的模小于 1 时 $X = 0$ 是局部稳定的, 即我们要求矩阵 A 满足如下的 Jury 条件 [63]:

$$1 - \text{tr}A + \det A > 0, \quad (5.3.14a)$$

$$1 + \text{tr}A + \det A > 0, \quad (5.3.14b)$$

$$1 - \det A > 0. \quad (5.3.14c)$$

对于系统 (5.3.8) 或 (5.3.9) 所确定的矩阵 A , 容易证明不等式 (5.3.14b) 和 (5.3.14c) 在平衡态 $(x, y) = (0, 0)$ 处是自然成立的. 当参数 b 增加 (这里我们选

择参数 b 作为分支参数), 不等式 (5.3.14a) 在一个临界点 b_0 处不成立. 根据模型参数和简短的计算, 对系统 (5.3.8) 不等式 (5.3.14a) 变为

$$b < \frac{(1-k)(1-q)}{p+q-k} \triangleq b_0^R, \quad (5.3.15)$$

由引理 5.3.1 我们知道 $b_0^R > 0$. 相似的, 对系统 (5.3.9) 不等式 (5.3.14a) 变为

$$b < \frac{c(1-q)(1-k)}{p+q-k} \triangleq b_0^B > 0, \quad (5.3.16)$$

因此一个种群要免遭灭绝的危险其出生率 b 一定要大于 $b_0^R(b_0^B)$.

对于差分方程 (5.3.8) 和 (5.3.9), 我们同样可以定义内禀净再生数 R_0 (一个个体在生命周期内出生新生个体的平均数). 对方程 (5.3.8),

$$R_0 = \frac{b(p+q-k)}{(1-k)(1-q)} \triangleq R_0^R.$$

对方程 (5.3.9),

$$R_0 = \frac{b(p+q-k)}{c(1-k)(1-q)} \triangleq R_0^B.$$

不等式 (5.3.15)((5.3.16)) 能够改写为 $R_0^R < 1$ ($R_0^B < 1$). 也就是说, 一个个体在死亡之前出生的平均个体数小于 1, 那么该种群就将趋于灭亡.

系统 (5.3.8) 和 (5.3.9) 的内部平衡态分别满足

$$\begin{cases} x^* = kx^* + be^{-(p+q)x^* - qy^*} [(p+q-k)x^* + qy^*], \\ y^* = (p+q-k)x^* + qy^*, \end{cases} \quad (5.3.17)$$

和

$$\begin{cases} x^* = kx^* + \frac{b[(p+q-k)x^* + qy^*]}{c + ((p+q)x^* + qy^*)^n}, \\ y^* = (p+q-k)x^* + qy^*. \end{cases} \quad (5.3.18)$$

容易验证如果 $R_0 > 1$, 系统 (5.3.8) 和 (5.3.9) 存在一个内部平衡态 E^* . 我们在表 5.3.1 中分别给出了平衡态的具体表达式.

注意到当 $b = b_0$ (即 $R_0 = 1$) 时, 正平衡态 E^* 退化为 $(0, 0)$. 因此当 b 增加通过 b_0 时, E^* 经过平衡态 $(0, 0)$ 并与之交换稳定性, 所以此时发生了一个跨临界分支. 随着 b 的进一步增加, E^* 保持稳定直到到达下一个临界值 $b = b_c$. 参数 b_c 的表达式在表 5.3.2 中给出.

正平衡态 E^* 当 b 增加时稳定性将会失去. 在密度依赖出生的模型 (5.3.8) 或 (5.3.9) 中, 不等式 (5.3.14b) 在临界值 $b = b_c$ 处不成立, 即在临界值 $b > b_c$ 处一个周期倍增的分支发生, 平衡态 E^* 的稳定性失去而出现一个稳定的两点环 (如图 5.3.4).

表 5.3.1: 系统 (5.3.8) 和 (5.3.9) 的非平凡平衡态. 对于非平凡正平衡态的存在性, R_0 必需大于 1

函数类型	平衡态	$R_0 \doteq R_0^R$ (or R_0^B)
Ricker	$x^* = -\frac{1-q}{p+q-qk} \ln\left(\frac{1}{R_0}\right)$ $y^* = -\frac{p+q-k}{p+q-qk} \ln\left(\frac{1}{R_0}\right)$	$R_0^R = \frac{b(p+q-k)}{(1-k)(1-q)}$
Beverton-Holt	$x^* = \frac{1-q}{p+q-qk} \sqrt[p+q-qk]{c(R_0-1)}$ $y^* = \frac{p+q-k}{p+q-qk} \sqrt[p+q-qk]{c(R_0-1)}$	$R_0^B = \frac{b(p+q-k)}{c(1-q)(1-k)}$

表 5.3.2: 分支参数 b 的临界值 b_c 及其分支类型.
当 b 小于 b_c 时正平衡态是稳定的.

函数类型	b_c	稳定区间	分支类型
Ricker	$b_c = b_c^R$	$b_0^R < b < b_c^R$	Flip bifurcation
Beverton-Holt	$b_c = b_c^B$	$b_0^B < b < b_c^B$	Flip bifurcation

其中

$$b_c^R = \frac{(1-k)(1-q)}{p+q-k} e^{\frac{2(1+kq)(p+q-qk)}{(1-q)(1-k)(p+q+kq)}},$$

$$b_c^B = \frac{c(1-q)(1-k)}{p+q-k} \frac{n(p+q+kq)(1-k)(1-q)}{n(p+q+kq)(1-k)(1-q) - 2(1+kq)(p+q-qk)}.$$

5.3.3 季节性收获对渔业种群持久性和渔场成年种群存储量的影响

系统 (5.3.8) 和 (5.3.9) 正平衡态的大小严格依赖收获时间 (如图 5.3.1-3), 既使我们采用同样的收获努力量 E , 太迟的收获可能过度捕捞而使得种群趋于灭绝. 给定年度收获总时间 l , 如果与成年种群繁殖期结束后越近的时间进行收获, 这样成年种群的稳定存储量与没有收获时的稳定存储量相比降低得相对较小. 从图 5.3.1(这里所有的参数和稳定性在表 5.3.3 中给出) 中我们可以看出, 对 Ricker 函数如果在成年种群繁殖期结束后立即进行收获 (即 $T_1 = 0, T_2 = 0.5$), 则稳定的成年种群数量降低了 74%; 如果在成年种群繁殖期结束后的四分之一年度开始进行收获 (其中 $T_1 = 0.25, T_2 = 0.75$), 则稳定的成年种群数量降低了 92.1%; 如果在成年种群繁殖期结束后的二分之一年度后开始进行收获 (其中 $T_1 = 0.5, T_2 = 1$), 则稳定的成年种群数量降为零, 此时种群因过度捕捞而灭绝. 从表 5.3.3 我们也可以看出成年种群的存储量依赖于密度依赖的生育函数. 进一步, 成年种群的存储量是关于收获时间 T_1 的递减的函数 (如图 5.3.3). 这些结果从数学理论上说明了为什么春禁符合长江鱼类的生长繁殖, 长江渔业科研部门监测调查证明长江主要经济鱼类的繁殖季节集中在每年的 2 至 6 月份, 交配繁殖的鱼类并有相对集群的特点. 实施春季禁渔管理, 就有可能使大部分鱼类亲鱼

和幼鱼加以保护,以便迅速补充群体数量,缓解主要经济鱼类资源的衰退趋势,从而使渔业资源和捕捞产量相对比较稳定。

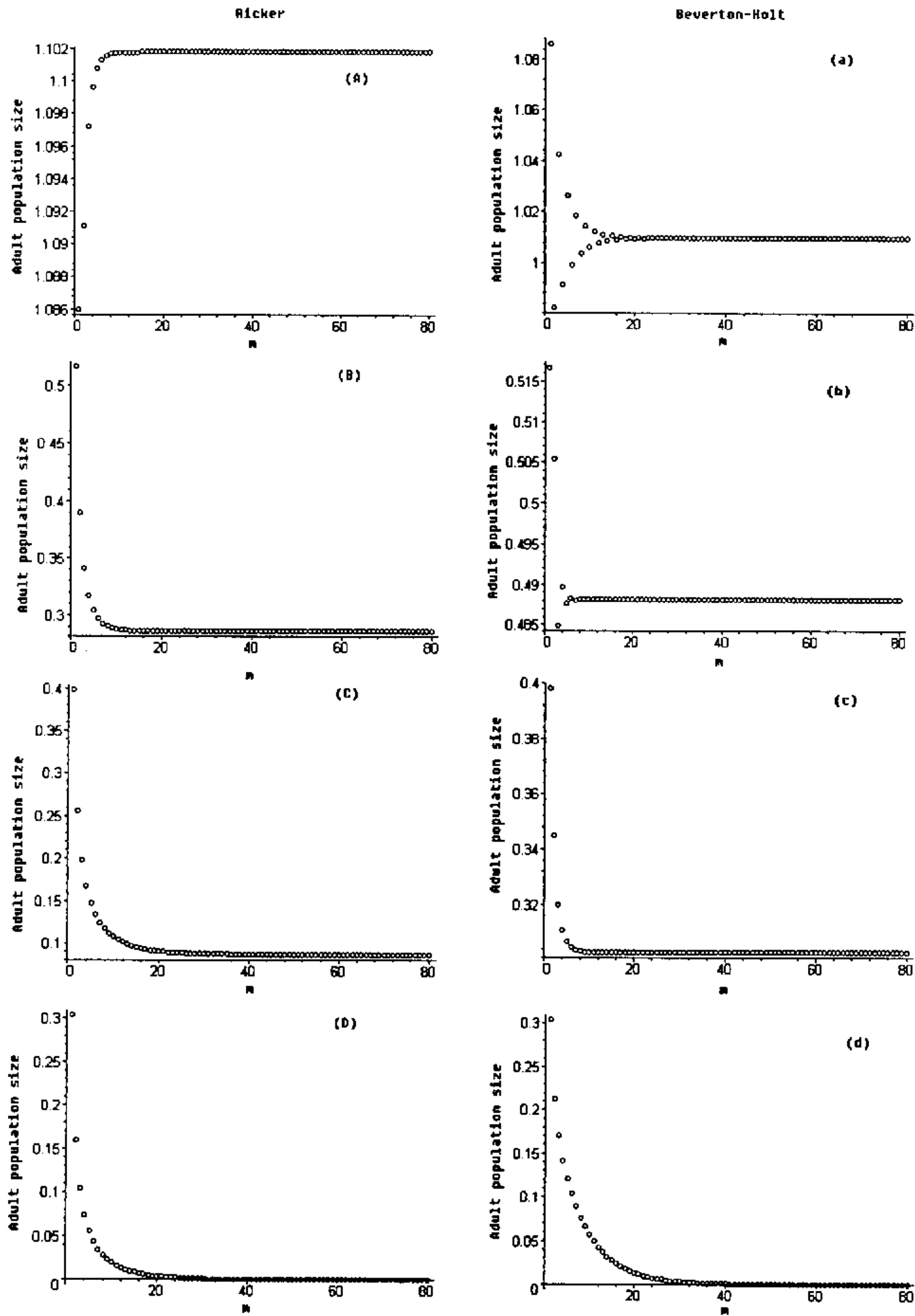


图 5.3.1: 季节性收获分别对具有 Ricker 和 Beverton 出生函数时稳定种群数量大小的影响, 参数列在表 5.3.3 中。

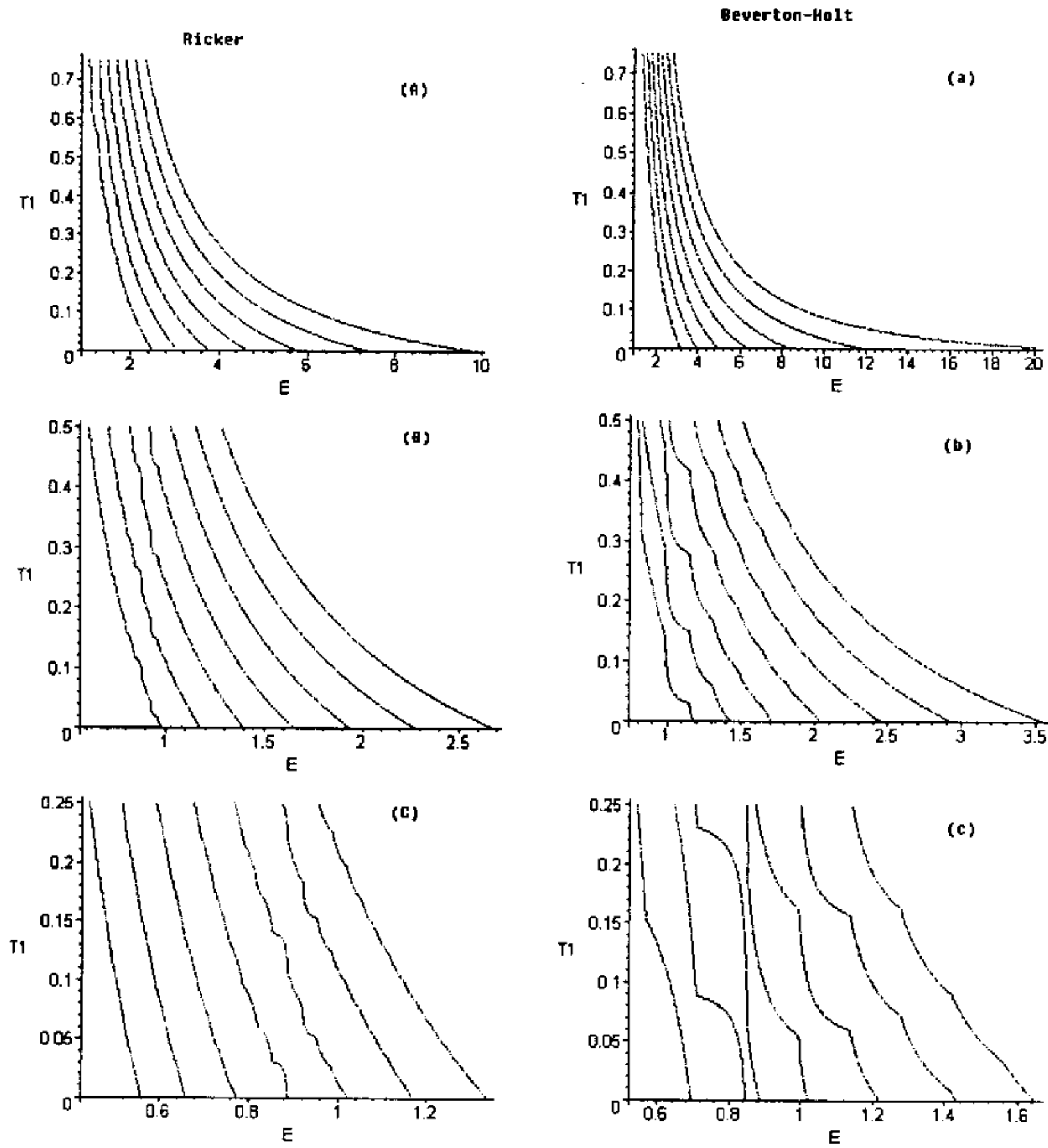


图 5.3.2：系统 (5.3.8) 和 (5.3.9) 在平衡态处种群数量的大小 (在生育脉冲发生后的时刻统计)，参数为 $d = 0.7, a = 0.9, b = 3, c = 1, n = 3$ 。收获努力量为 x-轴，收获时间为 y-轴，曲线从左到右分别给出成年种群数量的 95,90,85,80,75,70 和 65%，开始时刻成年种群数量为 1.5。在任一曲线的右边，收获是不持久的。收获总时间分别为：(A-a)，总收获时间 $l = 0.25, T_2 = T_1 + l$ ；(B-b)，总收获时间 $l = 0.5, T_2 = T_1 + l$ ；(C-c)，总收获时间 $l = 0.75, T_2 = T_1 + l$ 。

从生物的观点来看，如果我们的目标是利用生存的补偿作用，我们必需考虑收获时间，也即考虑收获个体对种群竞争的影响。从图 5.3.2 我们可以看出如果与成年种群繁殖期结束后越近的时间进行收获，成年种群能够承受更大的额外的死亡率 (即更大的收获努力量)，同时只有收获总时间相对较短时收获才是持久

的。

如果在成年种群繁殖期结束后越近的时间进行收获，种群能够承受更大的额外的死亡率，这似乎是很奇怪的，即使收获的个体对存活个体的死亡率没有任何改变的情况下也是一样的。然而，当我们考虑一个个体在时间 $t < 1$ 直到生殖季节 1 时的生存期望值时情况就变得很清楚了。如果没有补偿（常数死亡率 d ），个体的生存期望值等于 $e^{-d(1-t)}$ ，其中 $1-t$ 是个体在一个生育脉冲区间剩余的时间。收获该个体而使它的生存期望值变为零，此时一个生存期望值为 $e^{-d(1-t)}$ 的个体从种群中移除掉。这个生存期望值随季节的推移而增加，而存活的个体在其死亡的过程中获得了补偿 [6,35,55,92,93,96,97]。

表 5.3.3：收获时间对成年渔业存储量和正平衡态稳定性的影响。

参数 $d = 0.7, a = 0.9, b = 6, c = 1, n = 4$ 。

函数类型	T_1	T_2	E	$x^* + y^*$	y^*	降低的百分比	b_c	R_0	稳定性
Ricker	0	1	0	2.903	1.102	0	51.77	4.4	稳定的
	0	0.5	3	1.541	0.286	74%	46.12	1.715	稳定的
	0.25	0.75	3	0.621	0.086	92.1%	62	1.21	稳定的
	0.5	1	3	0	0	100%	87.84	0.815	不存在
Beverton-Holt	0	1	0	2.733	1.01	0	15.01	4.4	稳定的
	0	0.5	3	2.626	0.488	51.68%	9.84	1.71	稳定的
	0.25	0.75	3	2.175	0.303	70%	13.44	1.215	稳定的
	0.5	1	3	0	0	100%	19.39	0.815	不存在

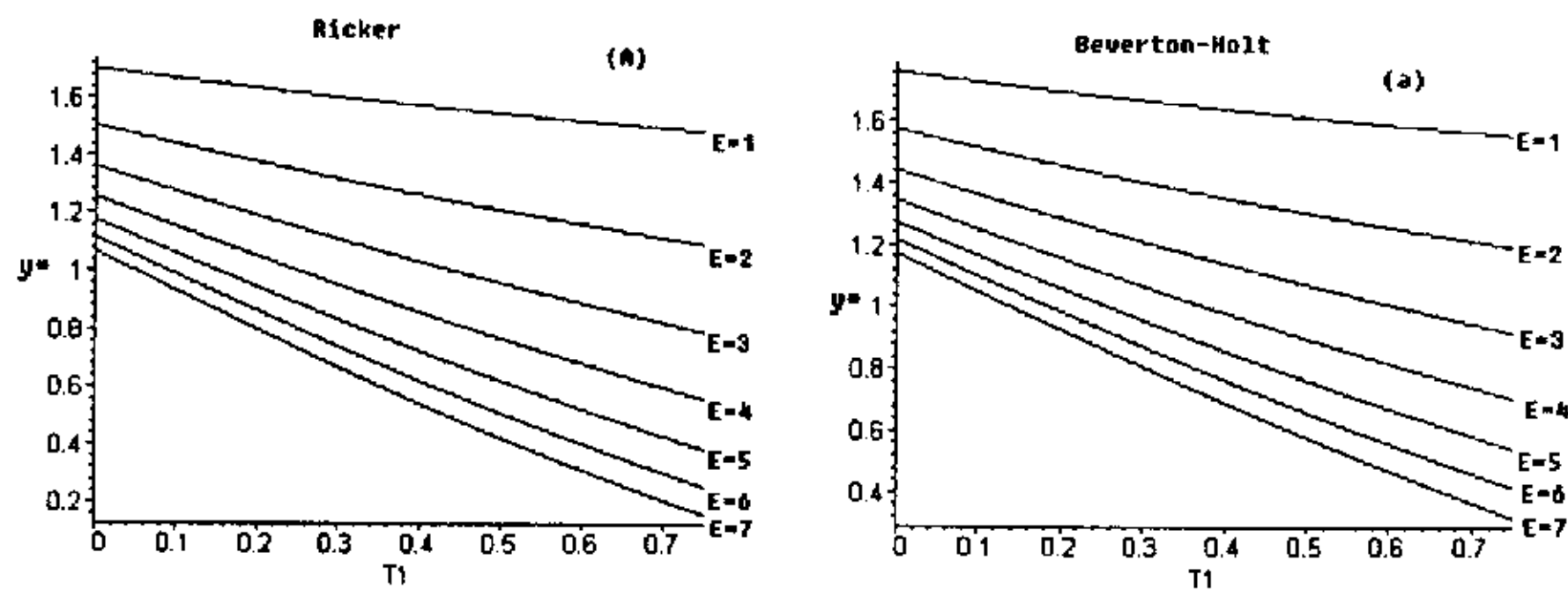


图 5.3.3：系统 (5.3.8) 和 (5.3.9) 在平衡态处种群数量的大小（在生育脉冲发生后的时刻统计），说明成年渔业存储量与季节收获的关系。参数 (a) $l = 0.25, d = 0.7, a = 0.9, b = 20$ ，(b) $l = 0.25, d = 0.7, a = 0.9, b = 30, c = 1, n = 3$ 。

5.3.4 季节收获对最大年度持续产量的影响

再生资源优化管理的一个重要目标就是保持资源的可持续发展,这一研究已得到了很好的结果.文献 [23,25,27,102] 考虑了经济和生态方面再生资源的优化管理.

如果我们选择年度最大持续产量作为管理目标,季节收获如何影响年度持续产量?下面我们分别考虑生育函数具有 Richer 和 Beverton-Holt 函数时,季节收获对系统 (5.3.1) 最大年度持续产量的影响.

在区间 $b_0 < b < b_c$ 中的参数 b , 正平衡态 E^* (参看表 5.3.3) 是渐近稳定的. 在这种情况下系统 (5.3.1) 具 Richer 和 Beverton-Holt 生育函数的轨道渐近趋于周期解 $(x_e(t), y_e(t))$. 即周期解 $(x_e(t), y_e(t))$ 是局部渐近稳定的, 其中

$$\left\{ \begin{array}{l} x_e(t) = x^* e^{-(d+a)(t-m)}, \quad m \leq t < m+1, \\ y_e(t) = \begin{cases} (x^* + y^*) e^{-d(t-m)} - x^* e^{-(d+a)(t-m)}, & m \leq t < m+T_1, \\ \frac{ax^* e^{-(d+E)t}}{E-a} [e^{((d+a)m-(a-E)t} - e^{((d+E)m-(a-E)T_1)}] + e^{-(d+E)(t-m-T_1)} \\ [(x^* + y^*) e^{-dT_1} - x^* e^{-(d+a)T_1}], & m+T_1 \leq t < m+T_2, \\ -x^* e^{-(d+a)(t-m)} + e^{-d(t-m-T_2)} [x^* e^{-(d+a)T_2} + \\ x^* e^{-(d+E)T_2+ET_1} + y^* e^{-(d+E)T_2+ET_1} - x^* e^{-(d+E)T_2-(a-E)T_1} + \\ \frac{ax^*}{E-a} (e^{-(d+a)T_2} - e^{-(d+E)T_2-(a-E)T_1})], & m+T_2 \leq t < m+1. \end{cases} \end{array} \right.$$

因此年度持续产量为 (不失一般性可取 $m=0$)

$$\begin{aligned} Y(E) &= \int_{T_1}^{T_2} \left\{ E \frac{ax^* e^{-(d+E)t}}{E-a} [e^{-(a-E)t} - e^{-(a-E)T_1}] \right. \\ &\quad \left. + e^{-(d+E)(t-T_1)} [(x^* + y^*) e^{-dT_1} - x^* e^{-(d+a)T_1}] \right\} dt \\ &= \frac{Eax^*}{E-a} \left\{ -\frac{1}{d+a} [e^{-(d+a)T_2} - e^{-(d+a)T_1}] + \right. \\ &\quad \left. \frac{e^{-(a-E)T_1}}{d+E} [e^{-(d+E)T_2} - e^{-(d+E)T_1}] \right\} + \\ &\quad \frac{Ee^{((d+E)T_1)}}{d+E} [(x^* + y^*) e^{-dT_1} - x^* e^{-(d+a)T_1}] \\ &\quad [e^{-(d+E)T_1} - e^{-(d+E)T_2}] \\ &= \frac{Eax^* e^{-(d+a)T_1}}{(d+a)(E-a)} [1 - e^{-(d+a)(T_2-T_1)}] + \\ &\quad \frac{Ex^* e^{-(a+d)T_1}}{d+E} [e^{-(d+E)(T_2-T_1)} - 1] \left[\frac{E}{E-a} - \frac{1+p-k}{1-q} e^{aT_1} \right]. \end{aligned}$$

我们的目标是寻找一个收获努力量 \bar{E} 使得 $Y(E)$ 在 $E = \bar{E}$ 处达到最大, 并讨论最大年度持续产量 $Y(\bar{E})$ 如何随参数 T_1 和 T_2 的改变而改变. 通过数值分析, 我们知道对给定的 T_1, T_2 , 存在唯一的 E 使得 $Y(E)$ 达到最大 (表 5.3.4).

表 5.3.4：收获时间对年度持续产量的影响。

$$d = 0.7, a = 0.9, c = 1, n = 4.$$

函数类型	T_1	T_2	b	\bar{E}	$Y(\bar{E})$	R_0	b_c	y^*	稳定性 ($x_e(t), y_e(t)$)
Ricker	0	1	50	2.38	2.1057	6.226	96.87	0.6033	稳定的
	0	0.75	50	6.1	2.344	5.907	103.5	0.5655	稳定的
	0.25	1	50	2.62	1.988	6.099	97.96	0.5883	稳定的
Beverton	0	1	20	2.85	1.287	2.062	117.02	0.2939	稳定的
	0	0.75	20	9.1	1.4415	1.971	124.27	0.2784	稳定的
-Holt	0.25	1	20	3.04	1.2177	2.061	115.69	0.2938	稳定的

从表 5.3.4 我们可以看出最大年度持续产量严格的依赖收获时间。如果总的年度收获时间一样，在成年种群繁殖期结束后立即进行收获，我们能得到最大的最大年度持续产量（其中 $T_1 = 0, T_2 = 0.75$ ）。然而，如果在成年种群繁殖期结束后的四分之一后的季节进行收获（其中 $T_1 = 0.25, T_2 = 1$ ），我们获得的最大年度持续产量是最小的。这些数值结果从数学理论上进一步说明了为什么春禁符合长江鱼类的生长繁殖，由于长江渔业科研部门监测调查证明长江主要经济鱼类的繁殖季节集中在每年的 2 至 6 月份，这样如果实施春禁就能使渔业资源和捕捞产量相对比较稳定。

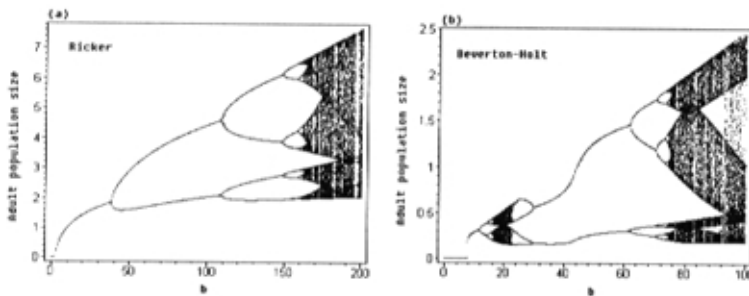


图 5.3.4：系统 (5.3.8) 和 (5.3.9) 关于参数 b 的成年种群的分支参数图，参数分别为 $T_1 = 0, T_2 = 0.25, d = 0.7, a = 0.9, E = 2.5$ 和 $T_1 = 0, T_2 = 0.75, d = 0.7, c = 1, a = 0.9, n = 7, E = 5$ 。说明了参数 b 对系统动力学行为的影响。

5.3.5 分支分析

在这之前我们主要研究了系统 (5.3.8) 和 (5.3.9) 平衡态的存在性和稳定性，特别的研究了收获时间对这些平衡态稳定性的影响。但是如果参数 b (或其它的

参数如 E, T_1, T_2 增加超过某些临界值时, 系统 (5.3.8) 和 (5.3.9) 将存在各种各样的复杂现象。

当 b 增加超过 b_c , 每一个模型都存在一系列的分支, 且最终通过一个倍周期分支走向混沌。在图 5.3.4 我们分别给出了系统 (5.3.8) 和 (5.3.9) 的一个关于参数 b 成年种群的典型分支参数图。

在第一次倍周期分支发生后, 这两个模型存在一系列的倍周期分支, 这里当参数 b 增加时, 一个周期为 2^k 的环失去稳定性, 同时一个周期为 2^{k+1} 的稳定环出现, 最终走向混沌。倍周期分支是分支的一种特殊形式, 它的特点是周期点由一分为二、二分为四、四分为八等等。倍周期分叉对混沌学研究之所以重要, 就是因为这样无限分下去将导致混沌的出现, 它成为目前通向混沌最典型的途径之一。它的一个最重要的里程碑是 May 及其合作者 [78-80] 对逻辑映射和 Ricker 映射的研究, Collet 和 Eckmann[28] 从数学上给出了比较完整的研究。如果我们选择 T_1 作为分支参数, 从图 5.3.6 我们能看到相似的结果。

具 Beverton-Holt 出生函数的系统 (5.3.9) 存在另一种同向混沌的途径。当 b 增加时, 周期解通过一个倍周期分叉到混沌窗口, 接着通过一个周期减半的分支到另一个周期窗口 (如图 5.3.4(b))。如果我们选择 E 作为分支参数, 从图 5.3.5 我们能看到相似的结果。

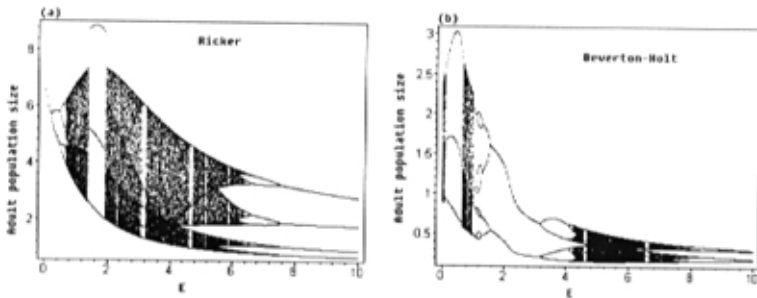


图 5.3.5: 系统 (5.3.8) 和 (5.3.9) 关于参数 E 的成年种群的分支参数图, 参数分别为 $T_1 = 0, T_2 = 0.75, d = 0.2, a = 0.9, b = 400$ 和 $T_1 = 0, T_2 = 0.75, n = 7, d = 0.7, c = 1, b = 20$ 。说明了参数 E 对系统动力学行为的影响。

在图 5.3.5 中我们观察到系统存在许多叉形分支和切分支以及吸引子突变的现象 (混沌吸引子突变的现象在前面我们给出了介绍, 这种当参数发生微小的改变而吸引子突然消失, 或改变其大小的现象在文献 [44] 中得到了详细的研究)。例如, 对系统 (5.3.8) 当收获努力量 E 从 $E = 1.33$ 增加时 (如图 5.3.5(a)) 和对系统 (5.3.9) 当收获努力量 $E = 0.08$ 时 (如图 5.3.5(b)), 我们都观察到混沌吸引子

突然的消失的现象.

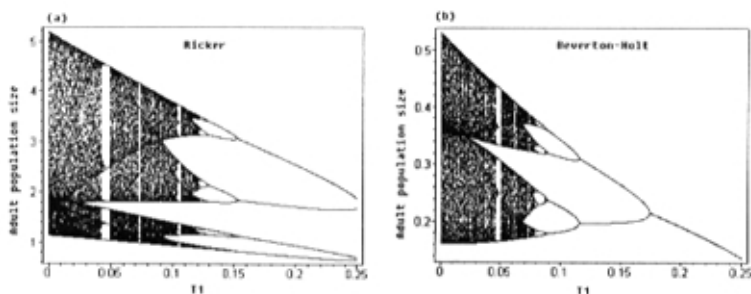


图 5.3.6: 系统 (5.3.8) 和 (5.3.9) 关于参数 T_1 的成年种群的分支参数图, 参数分别为 $l = 0.75, d = 0.2, a = 0.9, E = 4, b = 400$ 和 $l = 0.75, d = 0.7, c = 1, a = 0.9, n = 7, E = 5, b = 20$. 说明了参数 T_1 对系统动力学行为的影响.

进一步, 通过仔细的观察我们发现图 5.3.5 周期窗口的层叠向两个方向. 因此, 当参数 E 增加时, 周期轨道可以被建立也可以消失. 这说明了系统 (5.3.8) 和 (5.3.9) 存在反单调性 (周期轨道的建立和消失的反单调性现象在文献 [33] 中得到了研究).

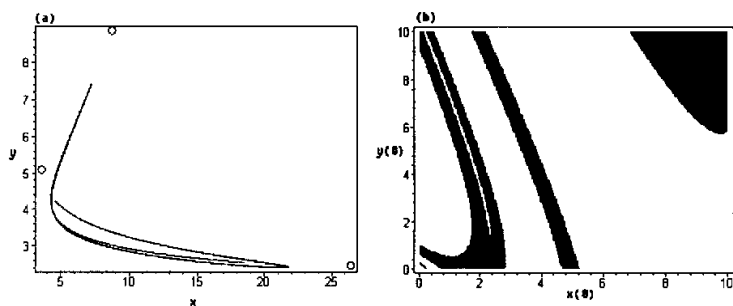


图 5.3.7: (a) 两个选择的吸引子, 周期 3 和混沌. (b) 系统 (5.3.8) 的两个可选择吸引子的盆吸引子 — 黑色和白色区域分别是周期 3 和混沌吸引子的盆吸引子, 参数为 $T_1 = 0, T_2 = 0.75, d = 0.2, a = 0.9, b = 400, E = 1.5$.

从分支参数图 5.3.5(a) 我们看出当参数发生微小的变化, 成年种群的总数量从一个吸引子突然改变成另一个吸引子的现象非常普遍. 在图 5.3.5(a) 中, 一个明显的改变发生在点 $E \approx 1.33$. 这里一个混沌吸引子突然变成一个周期 3 的吸

引子。一个更加详细的数值分析说明这种现象不仅是混沌之间的周期窗口的改变,而且反映了系统吸引子的非唯一性。明显的,系统的解最终趋向那一个吸引子严格依赖于成年和幼年种群的初始条件。多个吸引子共存的现象在第四章我们已有较详细的研究。

盆吸引域定义为那些轨道渐近趋向吸引子的初始值的集合 [44]。图 5.3.7(b) 说明了两个选择的盆吸引域——黑色区域是周期 3 的盆吸引域,而白色区域是混沌解的盆吸引域。

注记 5.3.1 利用第四章和文献 [101] 相同的方法我们可以讨论系统 (5.3.1) 和系统 (5.3.8)(或系统 (5.3.9)) 的关系。

5.4 生物结论及模型的进一步发展

对于交配繁殖鱼类集群的特点,存在两个主要的问题就是:一是集群的特点容易被捕获;二是不管捕捞增加或不增加,移动的鱼群影响其繁殖能力和繁殖的成功率。即使以上两方面对其自身没有影响,禁渔期对具生育脉冲的渔业种群来说也是一个重要的影响因素。

再生资源的成功管理是基于可持续发展之上的,即对资源的开发应不影响其持续发展。我们通过建立数学模型研究了收获时间、收获努力量以及稳定正平衡态三者之间的关系。得到了收获时间在对渔业模型动力学行为的影响上是一个不可忽略的重要因素,即收获时间对渔业种群的持续发展以及渔业种群对收获的反应程度(例如渔业资源的存储量和最大年度持续产量)都有很强的影响。

我们得到的一个重要结论就是在渔类的繁殖期,相对长时间的禁渔期是调节和保护渔业最有效的方法之一。如果禁渔期太短,许多普通的鱼类例如鲑鱼没有足够的时间集群、繁殖和从集群区域扩散。一个 3-4 个月的禁渔期(即 $l = 0.25 - 0.3$) 有利于渔业资源和捕捞产量相对比较稳定。我们的理论结果与长江渔业管理部门观测到的数据是一致的。

对沿岸、近海实行禁渔区、禁渔期能够有效的控制人类的活动和保护渔业资源。为了更好有效的保护资源,季节性收获的同时也应该在渔业相对集中的区域划定禁渔区。因此,系统 (5.3.1) 可以进一步加以改进而同时考虑禁渔期和禁渔区对渔业资源管理的影响,即种群分成如下四个空间变元:幼年在保护区,记为 (x^r) ;幼年在非保护区,记为 (x^n) ;成年在保护区,记为 (y^r) ;成年在非保护区,记为 (y^n) 。我们假设成年和幼年所生存的空间是分开的,这有利于实施包括生境在内的特别保护,种群在这两个空间是通过成熟(从幼年到成年)和出生(从成年到幼年)进行交换的。因此,不存在一个阶段内在保护和非保护区之间的交换。一个保护区是对一个阶段种群可利用总生境的比例,为了简单,我们假设幼年和成年获得的总的面积是相等的(设为标准值 1)。所以幼年和成年在保护

区和非保护区的动力学模型是:

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x}^r(t) = -dx^r(t) - ax^r(t), \\ \dot{x}^n(t) = -dx^n(t) - ax^n(t), \\ \dot{y}^r(t) = p_r ax^r(t) + p_n ax^n(t) - dy^r(t), \end{array} \right\} m \leq t < m+1,$$

$$\dot{y}^n(t) = \begin{cases} (1-p_r)ax^r(t) + (1-p_n)ax^n(t) - dy^n(t), & m \leq t < m+T_1, \\ (1-p_r)ax^r(t) + (1-p_n)ax^n(t) - (d+E)y^n(t), & m+T_1 \leq t < m+T_2, \\ (1-p_r)ax^r(t) + (1-p_n)ax^n(t) - dy^n(t), & m+T_2 \leq t < m+1, \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} x^r(m^+) = x^r(m) + q[B_1(N_r(m))y^r(m) + B_2(N_n(m))y^n(m)], \\ x^n(m^+) = x^n(m) + (1-q)[B_1(N_r(m))y^r(m) + B_2(N_n(m))y^n(m)], \end{array} \right\} m \in Z^+,$$

其中 q 是在幼年保护区内幼年生境的比例, p_r 是幼年在幼年保护区内成活且移动到成年保护区的比例, p_n 是在成年保护区内成年生境的比例。幼年在非保护区成熟且到成年保护区和非保护区是它们的相对应面积的一个比例 (p_n 和 $1-p_n$)。禁渔区和禁渔期如何影响渔业种群的动力学行为? 这些都是我们今后要研究的重点。

尽管我们的研究限制在渔业资源管理及其渔业模型的动力学行为上, 我们希望所得到的一般性结论能够反映人类活动对现实生态系统的影响 (人工投放天敌、生境管理和喷洒杀虫剂等)。

参考文献

- [1] Abramowitz, M. & Stegun, I., Handbook of mathematical functions with formals, graphs, and mathematical tables. Dover publications Inc., New York, 1965.
- [2] Agur, Z., Cojocar, L., Anderson, R. & Danon, Y., Pulse mass measles vaccination across age cohorts. Proc. Natl. Acad. Sci., USA(1993)90: 11698-11702.
- [3] Aiello, W.G. & Freedman, H.I., A time delay model of single-species growth with stage structure. Math. Biosci., (1990)101: 139-153.
- [4] Aiello, W.G., Freedman, H.I. & Wu, J., Analysis of a model representing stage structured population growth with state-dependent time delay. SIAM J. Appl. Math., (1990)52: 855-869.
- [5] Amine, Z. & Ortega, R., A periodic prey-predator system. J. Math. Anal. Appl., (1994)185: 477-489.
- [6] Anderson, D.R. & Burnham, K.P., Population ecology of the mallard VI, the effect of exploitation on survival. US Fish Wildl. Serv. Resour. Publ., (1976)128: 1-66.
- [7] Andronov, A.A., Leontovich, E.A., Gordan, L.L. & Maier, A.G., Qualitative theory of second-order dynamic systems. Translated from Russian by D.Louvish, John Wiley & Sons, New York 1973.
- [8] Bainov, D. & Simeonov, P., Impulsive differential equations: periodic solutions and applications, Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, (1993)66.
- [9] Bainov, D.D. & Simeonov, P.S. . System with impulsive effect: stability, theory and applications. John Wiley & Sons, New York, 1989
- [10] Bajo, I. & Liz, E., Periodic boundary value problem for first order differential equations with impulsive at variable times. J.Math.Anal.Appl., (1996)204: 65-73.
- [11] Ballinger, G. & Liu, X., Permanence of population Growth models with impulsive effects. Mathl. Comput. Modelling,(1997)26: 59-72.
- [12] Barclay, H.J., Models for pest control using predator release, habitat management and pesticide release in combination. J. Appl. Ecol., (1976)19: 337-348.
- [13] Barlett, B. R., Agric. Chem., (1956)11: 22-44.(cited in Lewis et al. 1997)

-
- [14] Bence, J.R., & Nisbet, R.M., Space limited recruitment in open systems: The importance of time delays. (1989)70: 1434-1441.
- [15] Bergh, O. & Getz, W.M., Stability of discrete age-structured and aggregated delay-difference population models. *J. Math. Biol.*, (1988)26: 551-581.
- [16] Bernard, O. & Gouzé, J.L., Transient behavior of biological loop models, with application to the droop model. *Math. Biosci.*, (1995)127: 19-43.
- [17] Bernard, O. & Souissi, S., Qualitative behavior of stage-structure populations: application to structure validation. *J.Math.Biol.*, (1998)37: 291-308.
- [18] Brauer, F., Boundedness of solutions of predator-prey systems. *Theor. Popul. Biol.*, (1979)15: 268-273.
- [19] Brauer, F. & Soudack, A.C., Coexistence Properties of some predator-prey systems under constant rate harvesting and stocking. *J. Math. Biol.*, (1981)12: 101-114.
- [20] Brauer, F. & Soudack, A.C., Constant-rate stocking of predator-prey systems. *J. Math. Biol.*, (1981)11: 1-14.
- [21] Brauer, F. & Soudack, A.C., Stability regions and Transition phenomena for harvested predator-prey systems. *J. Math. Biol.*, (1979)7: 319-337.
- [22] Brauer, F. & Soudack, A.C., Stability regions in predator-prey systems with constant-rate prey harvesting. *J,Math.Biol.*, (1979)8: 55-71.
- [23] Botsford, L.W., Further analysis of Clark's delayed recruitment model. *Bull. Math. Biol.*, (1992)54: 275-293.
- [24] Caswell, H., Matrix population models, Construction, analysis and interpretation. Sunderland, MA: Sinauer Associates, 1989.
- [25] Chaudhuri, K., A bionomic model of harvesting a multispecies fishery. *Ecol. Modelling*, (1986)32: 267-279.
- [26] Chellaboina, V.S., Bhat, S.P. & Haddad, W.M., An invariance principle for nonlinear hybrid and impulsive dynamical systems. *Nonlinear Anal. TMA*, in press.
- [27] Clack, C.W., Mathematical bioeconomics: The optimal management of renewable resources. John Wiley & Sons, New York , 1976.
- [28] Collet, P. & Eckmann, J.A., Iterated maps of the interval as dynamical systems. Boston: Birkhauser, 1976.

-
- [29] Corless, R.M., Gonnet, G.H., Hare, D.E.G., Jeffrey, D.J. & Knuth. D.E., On The Lambert W Function. *Advances in Computational Mathematics*, (1996)5: 329-359.
- [30] Croft, B.A., *Arthropod biological control agents and pesticides*, John Wiley & Sons, New York, 1990.
- [31] Cushing, J.M., An introduction to structured population dynamics. *CBMS-NSF regional conference series in applied mathematics*. (1998)71: 1-10.
- [32] Cushing, J.M., Equilibria and oscillations in age-structured population growth models. In: J.B.Shukla, T.G.Hallam and V.Capasso(eds.) *Mathematical modelling of environmental and ecological system*. New York, Elsevier,(1987): 153-175.
- [33] Dawson, S.P, Grebogi, C. & Yorke, J.A., Antimonotonicity: inevitable reversals of period-doubling cascades. *Physics Letters A*, (1992)162: 249-254.
- [34] Doubleday, W.G., Harvesting in matrix population models. *Biometrics* (1975)31: 189-200.
- [35] Ellison, L.N., Shooting and compensatory mortality in tetarconid. *Ornis Scand.* (1991)22: 229-240.
- [36] Epstein, I.R., Oscillations and chaos in chemical systems. *Physica D* (1983)7: 47-56.
- [37] Funasaki, E. & Kot, M., Invasion and chaos in a periodically pulsed mass-action chemostat. *Theor. Popul. Bio.*, (1993)44: 203-224.
- [38] Gaines, R.E. & Mawhin, J.L., *Coincidence degree and nonlinear differential equations*, Springer, Berlin (1977).
- [39] Gazis, D.C., Montroll, E.W. & Ryniker, J.E., Age-specific, deterministic model of predator-prey populations: application to isle royale. *IBM J. Res. Dev.*, (1973)17: 47-59.
- [40] Gavrilefts, S. & Hastings, A., Intermittency and transient chaos from simple frequency-dependent selection. *Proc. R. Soc. Lond.*, (1995)B261: 233-238.
- [41] Getz, W.M., The ultimate sustainable yield problem in non-linear age-structured populations. *Math. Biosci.*, (1980)48: 279-292.
- [42] Grandal, M.G.& Rabinowitz, P.H., Bifurcation from simple eigenvalues. *J. Funt. Anal.*, (1971)8: 321-340.

- [43] Grandal, M.G. & Rabinowitz, P.H., Bifurcation, perturbation of simple eigenvalues, and linearized stability. *Arch.Rat. Mech. Anal.*, (1973)52: 161-180.
- [44] Grebogi, C., Ott, E. & Yorke, J.A., Crises, sudden changes in chaotic attractors and chaotic transients. *Physica D* (1983)7: 181-200.
- [45] Guckenheimer, J. & Holmes, P., *Nonlinear oscillations, dynamical systems and bifurcations of vector fields*. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1990.
- [46] Guckenheimer, J. & Holmes, P., *Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields*. *Applied Mathematical Sciences*, 42. 1983.
- [47] Guckenheimer, J., Oster, G. & Ipaktchi, A., The dynamics of density dependent population models. *J. Math. Biol.*, (1977)4: 101-147.
- [48] Gurney, W.S.C., Nisbert, R.M. & Blythe, S.P., The systematic formulation of model of predator prey populations. In: J.A.J.Metz, O.Dekmann(eds.) *Lecture notes Biomath.*, Berlin Heidelberg, New York, Springer, (1986)68.
- [49] Gurney, W.S.C., Nisbet, R.M. & Lawton, J.L., The systematic formulation of tractable single-species population models incorporating age-structure. *J. Anim. Ecol.*, (1983)52: 479-495.
- [50] Gurtin, M.E. & MacCamy, R.C., Nonlinear age-dependent population dynamics. *Arch.Rat. Mech. Anal.*, (1974)54: 281-295.
- [51] Hastings, A., Age-dependent predation is not a simple process, I, continuous time models. *Theor.Popul. Biol.*, (1983)23: 347-362.
- [52] Hastings, A., Delay in recruitment at different trophic levels: Effects on stability. *J.Math.Biol.*, (1984)21: 35-44.
- [53] Hastings, A. & Higgins, K., Persistence of transients in spatially structured ecological models. *Science*, (1994)263: 1133-1137.
- [54] Hastings, S.P., Tyson, J.J. & Webster, D., Existence of periodic solutions for negative feedback cellular control systems. *J. Diff. Equ.*, (1977)25: 39-64.
- [55] Hauser, M.J.B., Olsen, L.F., Bronnikova, T.V. & Schaffer, W.M., Routes to chaos in the peroxidase-oxidase reaction: period-doubling and period-adding. *J.Phys. ChemB.*, (1997)101: 5075-5083.

-
- [56] Hellgren, E.C., Synatzske, D.R., Oldenburg, P.W. & Guthery, F.S., Demography of a collared peccary population in south Texas. *J.Wildl. Manage.*, (1995)59: 153-163.
- [57] Henson, S. M. et.al., Multiple attractors, Saddles, and population dynamics in periodic habitats. *Bull. Math. Biol.*, (1999)61: 1121-1149.
- [58] Higgins, K., Hastings, A. & Botsford, L., Density dependence and age structure: nonlinear dynamics and population behavior. *American Naturalist*, (1997)149: 247-269.
- [59] Hirstova, S.G. & Bainov, D.D., Existence of periodic solutions of nonlinear systems of differential equations with impulsive effect. *J. Math. Anal. Appl.*, (1985)125: 192-202.
- [60] Integrated Pest Management for Walnuts, University of California Statewide Integrated Pest Management Project, Division of Agriculture and Natural Resources, Second Edition, M.L. Flint, ed., University of California, Oakland, CA, publication 3270, pp 3641, 1987.
- [61] Holling, C.S., The functional response of predators to prey density and its role in mimicry and population regulation. *Mem.Ent. Canada*, (1965)45: 3-60.
- [62] Hung, Y.F., Yen, T.C. & Chern, J.L., Observation of period-adding in an optogalvanic circuit. *Phys.Let.*, (1995)A199: 70-74.
- [63] Jury, E.I., *Inners and stability of dynamic systems*. New york:Wiley, 1974.
- [64] Kaneko, K., On the period-adding phenomena at the frequency locking in a one-dimensional mapping. *Prog. Theor. Phys.*, (1982)69: 403-414.
- [65] Kaneko, K., Similarity structure and scaling property of the period-adding phenomena. *Prog. Theor. Phys.*, (1983)69: 403-414.
- [66] Kaul, S., On impulsive semidynamical systems. *J. Math. Anal. Appl.*, (1990)150: 120-128.
- [67] Kishi, M.J., Kimura, S., Nakata, H. & Yamashita, Y., A biomass-based model for the sand lance in Seto Znland Sea. *Japan. Ecol. Model.*, (1991)54: 247-263.
- [68] Kostora, T., Li, J.& Friedman, M., Two models for competition between age classes. *Math. Biosci.*, (1999)157: 65-89.

- [69] Lakmeche, A. & Arino, O., Bifurcation of non trivial periodic solutions of impulsive differential equations arising chemotherapeutic treatment. *Dynamics of continuous, Discrete and impulsive systems*, (2000)7: 165-287.
- [70] Lakshmikantham, V., Bainov, D.D. & Simeonov, P.S., *Theory of impulsive differential equations*. World Scientific, Singapore, 1989.
- [71] Leslie, P.H., Some further notes on the use of matrices in certain population mathematics, *Biometrika*, 35(1948): 213-245.
- [72] Levin, S.A., "Age-structure and stability in multiple-age spawning populations," In:T.L.Vincent and J,M,Skowrinski(eds.) *Lecture notes Biomath.*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg and New York, (1981)40: 21-45.
- [73] Levin, S.A. & Goodyear, C.P., Analysis of an age-structured fishery model. *J.Math.Biol.*, (1980)9: 245-274.
- [74] Lewis, W. J., Lenteren, J. C., van Phatak & Tumlinson, J. H., A total system approach to sustainable pest management. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* , (1997)94(23) : 12243-12248.
- [75] Lindstrom, T., Dependencies between competition and predation and their consequences for initial value sensitivity. *SIAM J. Appl. Math.*, (1999)59: 1468-1486.
- [76] López-Gómez, J., Ortega, R. & Tineo, A., The periodic predator-prey Lotka-Volterra model. *Advances in Differential Equations*, (1996)1: 403-423.
- [77] Matveev, A.S. & Savkin, A.V., *Qualitative theory of hybrid dynamical systems*. Birkhäuser, 2000.
- [78] May, R.M., Thresholds and breakpoints in ecosystems with a multiplicity of states. *Nature*, (1977)269: 471-477.
- [79] May, R.M., Biological populations with nonoverlapping generations: stable points, stable cycles, and chaos. *Science* (1974)186: 645-647.
- [80] May, R.M. & Oster, G.F., Bifurcations and dynamic complexity in simple ecological models. *Amer. Natur.*, (1976)110: 573-599.
- [81] Metz, J.A.J. & Diekmann, O., *The dynamics of physiologically structured populations*. *Lecture notes Biomath.*, Berlin Heidelberg, New York, Springer, (1986)68.
- [82] Neubert, M.G. & Caswell, H., Density-dependent vital rates and their population dynamic consequences. *J. Math. Biol.*, (2000)41: 103-121.

- [83] Nicholson, N.J., An outline of the dynamics of animal populations. *Aust. J. Zool.*, (1954)2: 9-65.
- [84] Nicholson, A.J., The self adjustment of populations to change. *Cold Spring Harbor Symp. Quant. Biol.*, (1957)22: 153-173.
- [85] Panetta, J.C., A mathematical model of periodically pulsed chemotherapy: tumor recurrence and metastasis in a competition environment. *Bulletin of Math.Biol.*, (1996)58: 425-447.
- [86] Pedigo, L.P.& Higley, L.G., A new perspective of the economic injury level concept and environmental quality. *American Entomologist*, (1992)38: 12-20.
- [87] Pedigo, L.P., *Entomology and Pest Management*. Second Edition. Prentice-Hall Pub., Englewood Cliffs, NJ. (1996): 679.
- [88] Petraitis, P.S.& Latham, R.E., The importance of scale in testing the origins of alternative community states. *Ecology*, (1999)80: 429-442.
- [89] Qi, J.G. & Fu, X.L., Existence of limit cycles of impulsive differential equations with impulses as variable times. *Nonlinear Anal. TMA*, (2001)44: 345-353.
- [90] Ricker, W.E., Stock and recruitment. *Journal of the Fisheries Research Board of Canada*, (1954)11: 559-623.
- [91] Robits, M.G. & Kao, R.R., The dynamics of an infectious disease in a population with birth pulses. *Math. Biosci.*, (1998)149: 23-36.
- [92] Roseberry, J.L., Bobwhite population responses to exploitation: real and simulated. *J. Wildl. manage.*, (1979)43: 285-305.
- [93] Sedinger, J.S. & Pexstad, E.A., Do restrictive harvest regulations result in higher survival rates in mallards? A comment. *J. Wildl. Manage.*, (1994)58: 571-577.
- [94] Shulgin, B., Stone, L. & Agur, Z., Pulse vaccination strategy in the SIR epidemic model. *Bulletin of Math. Biol.*, (1998)60: 1-26.
- [95] Simeonov, P. & Bainov, D., Orbital stability of periodic solutions of autonomous systems with impulsive effect. *INT. J. Systems SCI.*, (1988)19: 2561-2585.
- [96] Small, R.J., Holzwart, J.C. & Rusch, D.H., Predation and hunting mortality of ruffed grouse in central Wisconsin. *J. Wildl. Manage.*, (1991)55: 512-520.
- [97] Smith, G.W. & Reynolds, R.E., Hunting and mallard survival, 1979-88. *J. Wildl. Manage.*, (1992)56: 306-316.

- [98] Smith, G.W. & Reynolds, R.E., Hunting and mallard survival, a reply. *J. Wildl. Manage.*, (1994)58: 578-581.
- [99] Stern, V.M. , Economic Thresholds. *Annual review of Entomology*, (1973): 259-280.
- [100]Tang, S.Y. & Chen, L.S., Density-dependent birth rate, birth pulses and their population dynamic consequences. *J. Math. Biol.*, (2002)64: 169-184.
- [101]Tang, S.Y., Xiao, Y.N. & Chen, L.S., Optimal impulsive harvesting policy in periodic population model. In press.
- [102]Stern, V.M., Smith, R.F., van den Bosch, R. & Hagen, K.S., The integrated control concept. *Hilgardia*, (1959)29: 81-93.
- [103]Tomita, K., Chaotic response of nonlinear oscillators. *Phys. Rep.*, (1982)86: 113-167.
- [104]Uribe, G., On the relationship between continuous and discrete models for size-structured population dynamics. Ph.D, dissertation, Interdisciplinary program in applied mathematics, University of Arizona, Tucson, 1993.
- [105]Van Lenteren, J.C. & Woets, J., Biological and integrated pest control in greenhouses. *Ann. Rev. Ent.*, (1988)33: 239-250.
- [106]Van Lenteren, J.C., Integrated pest management in protected crops, in: D.Dent(Ed.), *Integrated pest management*. Chapman & Hall, London, 1995: 311-320.
- [107]Van Lenteren, J.C., Measures of success in biological control of arthropods by augmentation of natural enemies, in: S.Wratten, G.Gurr(Eds.), *Measures of Success in Biological Control*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, (2000):77-89.
- [108]Van Den Bosch, F. & Gabriel, W., Cannibalism in age-structured populations. *Theor. Popul. Biol.*, (1997)59: 551-573.
- [109]Volterra, V., Variations and fluctuations of a number of individuals in animal species living together. Translation In: R.N. Chapman: *Animal Ecology*, New York: McGraw Hill, (1931): 409-448.
- [110]Weeb, G.F., *Theory of age dependent population dynamics*. Marcel Dekker, New York, 1985

攻读博士学位期间的研究成果

以时间为序

1. Sanyi Tang, Deli Wang, New oscillation criteria for first order neutral difference equations.(in Chinese) *Ann. of Diff. Eqs.* 2000,16:74-82.
2. Sanyi Tang, Yanni Xiao, Robust interval stability and partial stability on kolmogorov system with time delay. *J. of Math.* 2000,20(2):180-184.
3. Sanyi Tang, Lansun Chen, A discrete predator-prey system with age-structure for predator and natural barriers for prey, *Mathematical Modelling and Numerical Analysis.* 2001,35(4):675-690. (SCI)
4. Yanni Xiao, Sanyi Tang, Lansun Chen, A Type K-monotone operator arising from type K-monotone system. *Chin. Ann. Math.* (in Chinese) 2001,(5):645-656.
5. Weidong Wang, Sanyi Tang, On the asymptotic behavior of a disturbed population models. *J. Biomathematics.* (2001), 16(4):385-391.
6. Sanyi Tang, Lansun Chen, Extinction and Persistence in Discrete Noncooperative Systems with Age Structure and Diffusion. *Math. Computers Modelling* 2001,33(7): 895-905. (SCI expanded)
7. Sanyi Tang, Yanni Xiao, Permanence in Kolmogorov-type Systems of Delay Difference Equations. *J.Difference Equ.Appl.* 2001,7(2):167-181. (SCI expanded)
8. Sanyi Tang, Lansun Chen, Analysis for a ratio-dependent predator-prey model with delay.*J. Math. Anal. Appl.* 2002,266:402-419. (SCI)
9. Sanyi Tang, Lansun Chen, Chaos in functional response host-parasitoid ecosystem models.*Chaos, Solutions and Fractals* 2002,13(4):875-884. (SCI)
10. Sanyi Tang, Lansun Chen, Density-dependent birth rate , birth pulses and their population dynamic consequences. *J Math.Biol.* 2002,44(2):185-199. (SCI)
11. Sanyi Tang, Lansun Chen, The Periodic Predator-prey Lotka-Volterra Model with Impulsive Effect. *Journal of Mechanics in Medicine and Biology.* (2002)2, Nos. 3 & 4: 267-296.

12. Yanni Xiao, Daizhan Cheng, Sanyi Tang, Dynamic complexities in predator-prey ecosystem models with age-structure for predator. *Chaos, Solitons & Fractals*. 2002,(14):1403-1411. (SCI)
13. Yanni Xiao, Sanyi Tang, Lansun Chen, A linearized oscillation result for odd-order neutral difference equation. *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics* 2002,(33):277-286. (SCI)
14. Yanni Xiao, Lansun Chen, Sanyi Tang, Permanence and periodic solution in an integrodifferential system with discrete diffusion, *J. Sys. Sci. Complexity*. 2003,16(1):114-121.
15. Sanyi Tang, Lansun Chen, Multiple Attractors in Stage-structured Population Models with Birth Pulses. *Bulletin of Math. Biol.* 2003:1-17. (SCI)
16. Sanyi Tang, Lansun Chen, Hybrid matrix models and their population dynamic consequences. *Mathematical Modelling and Numerical Analysis*. (accepted)(SCI)
17. Sanyi Tang, Lansun Chen, Global Attractivity in a "Food-Limited" Population Model with Impulsive Effects. *J. Math. Anal. Appl.* (accepted). (SCI)
18. Sanyi Tang, Lansun Chen, Quasiperiodic solutions and chaos in a periodically forced predator prey model with age structure for predator. *International .Bifurcation and chaos*. (accepted). (SCI)
19. Sanyi Tang, Lansun Chen, The effect of seasonal harvesting on stage structured fish population models. *J.Math. Biol.* (Revised). (SCI)
20. Sanyi Tang, Lansun Chen, Optimal impulsive harvesting policy in periodic population model. *Mathematical Biosciences*. (submitted)
21. Sanyi Tang, Lansun Chen, Integrated pest management models and their dynamical behavior. *Bulletin of Math. Biol.* (submitted)
22. Sanyi Tang, Lansun Chen, Modelling and analysis of integrated pest management strategy. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*. (submitted)
23. Sanyi Tang, Lansun Chen, Stage-dependent impulsive systems concerning IPM strategy and their dynamic consequences. *SIAM J. Appl. Math.* (submitted)
24. Sanyi Tang, Frank Van den Borch, SIR epidemic models with stage-dependent pulse vaccination and treatment. *J. Math. Med. Biol.* (submitted)

致 谢

本文是在导师陈兰荪研究员的精心指导下完成的。陈先生在学业、生活诸方面始终给予我无微不至的关怀和帮助。他那种严谨求实, 锲而不舍, 精益求精的治学态度将对我今后的科研和工作产生极大的影响。没有先生的支持和帮助, 我将很难获得这样一个宝贵的学习和研究机会。在此谨表衷心的感谢。

作者十分感谢人教处的邵欣老师、尹永华老师、王方玉老师、网络部金雅芬老师、郑潮洲老师。他(她)们为我的生活和学习创造了良好的环境。

作者借此机会感谢各位师兄、师姐、师弟和师妹们: 张兴安, 崔景安, 宋新宇, 肖燕妮, 陆忠华, 刘胜强, 刘贤宁, 刘兵, 惠静, 张树文, 张玉娟, 董玲珍, 王丽敏, 曾广钊, 裴永珍, 王凤筵和俞银燕等老师和同学, 他(她)们都给作者提出过有益的建议, 并给予许多方面的帮助。

三年的博士期间, 得到了很多国内外专家和同行的指点与帮助, 特别是: 王稳地教授, 陆征一教授, Dr S.P. Bhat, Prof L. Stone, Prof T. Lindstrom, Prof O. Diekmann, Prof R.M. Nisbet 和 Prof A. Hastings。他(她)们为我提供了大量的有价值的参考文献和许多有益的建议, 使得本文第二章、第四章和第五章的生物背景和生物结论有了很大的改进。Dr Bhat 提供的参考文献 [26] 使得我们能够证明第二章中阶 1 周期解的全局吸引性。在此一并表示感谢。

最后, 我还要特别感谢我的爱人肖燕妮博士, 她不仅在生活上给予我极大的理解, 而且在学习上给予我很多支持和帮助。

唐三一

唐三一

2003 年 3 月于中科院数学与系统科学研究院