

## 第二章 气泡的声学理论

对于气泡声学特性尤其是气泡的群体效应的精确分析处理,需要很多新的数学工具。本章仅仅介绍一些基本原理,主要是为了解释尾流的声学特性,并便于与第六、七、八章给出的气泡幕的光学特性进行比较。真实尾流的结构非常复杂,在对尾流的精确描述中,结合应用到许多数学和物理知识。

本章的前两部分讨论单个气泡的声学特性,在第三部分讨论了实验室条件下许多气泡的群体特性,并用于某些物理参数的估计,包括声学截面、衰减系数等参数的估计。

### 2.1 单个理想气泡的散射

对应于尾流的具体情况,只须考虑半径  $R$  远小于水中声波波长  $\lambda$  的气泡,即

$$R \ll \frac{\lambda}{2\pi} \quad \text{or} \quad \eta = \frac{2\pi R}{\lambda} \ll 1, \quad (2-01)$$

式中  $\eta$  为周长与波长的比值。气泡内以及气泡附近周围的压强振幅可看作常数,用  $A$  来表示这一振幅,则入射声波可表示为

$$P_0 = Ae^{2\pi if} \quad (2-02)$$

虽然对气泡起作用的声波效应非常复杂,但从理论上可以将其划分为两个方面。

首先,入射声波的周期性变化的压强会使气泡内的气体发生受迫振动,这一受迫振动作用于周围的水而进一步使得气泡发射出声波,对于实用目的,这个二次发声的声波是球对称的。将入射声波转化为不同压强分布的波的过程成为散射,散射的概念仅表示声波能量的重新分布,也就是说,其中不涉及声波与其它形式能量之间的转化。事实上,单个气泡的散射常常伴随着作用声波的一部分能量以各种过程转化为热,这些效应总成为声波的吸收。在这一部分中,除了吸收假设单个气泡的散射也可能产生这一现象,因此在该部分的标题上用了“理想气泡”的概念。

如果入射波是一列平面波,声波的平均强度为  $I_0$ ,或者说通过与传播方向垂

拦截的所有能量都转化为散射声，则该气泡的散射率亦即单位时间散射的能量为  $\pi R^2 I_0$ 。

很明显，不管散射能量是大还是小于气泡的几何拦截能量，都依赖于  $\sigma_s / \pi R^2$ 。入射波激发气泡的脉动，这是频率等于入射波频率  $f$  的受迫振动，在共振条件下，将会与气泡的自由振动发生干涉，共振频率可计算得到。众所周知，任何机械系统的受迫振动当频率  $f$  接近该系统的固有频率即共振频率  $f_r$  时，振动会变得非常强。在共振情况下，散射波能量会变得明显大于  $\pi R^2 I_0$ ，因此散射截面  $\sigma_s$  可远大于气泡的几何截面  $\pi R^2$ 。

根据 CUDWR (Columbia University Division of War Research) 的一份报告，为了找出  $\sigma_s$  或  $4\pi |B|^2 / |A|^2$ ，将用两种方法来计算气泡表面的径向速度。一方面，气泡中的气体在振动过程中必须满足流体力学边界条件，即气泡内气体的瞬时压强必须等于外部声压；另一方面，根据热力学的理论，气泡内气体当气泡振动时必须满足压强与体积（或半径）的关系。

如果振动非常快，以致于气泡和周围介质没有热量交换，可以假定脉动是绝热过程。根据热力学第一定律，对于理想气体的绝热过程在脉动过程中， $PV^\gamma$  保持为常数，其中  $P$  是气泡内的气体压强， $V$  是其体积， $\gamma$  是定压热容量与定容热容量之比，对于空气而言为 1.4。分别用  $P_0$ 、 $V_0$ 、 $R_0$  表示水中平均流体压强、平衡状态下气泡的体积和半径，则绝热脉动所满足的条件可通过对关系 ( $PV^\gamma = \text{常数}$ ) 微分得到：

$$\frac{dP}{P_0} = -\gamma \frac{dV}{V_0}, \quad \frac{1}{P_0} \frac{dP}{dt} = -\frac{\gamma}{V_0} \frac{dV}{dt} \quad (2-08)$$

用半径  $R$  来表示气泡的体积，则有

$$V_0 = \frac{4}{3} \pi R_0^3, \quad \frac{dV}{dt} = 4\pi R_0^2 \frac{dR}{dt}, \quad \frac{dR}{dt} = v_R \quad (2-09)$$

如果  $p_i$ 、 $A_i$  表示表示气泡内声压、压强振幅，则气泡内气体的受迫振动可如下描述

$$p_i = A_i e^{2\pi f t}, \quad \frac{dp_i}{dt} = 2\pi f A_i e^{2\pi f t} \quad (2-10)$$

这一内部声压  $p_i$  等于方程 (2-08) 中气泡内气体的压强  $P$ , 因此将方程 (2-09、10) 代入 (2-08) 可得

$$v_R = \frac{dR}{dt} = -\frac{2\pi i f R_0 A_i}{3\gamma P_0} e^{2\pi i f t} \quad (2-11)$$

下一步是从给定的入射声波振幅  $A$  以及流体力学边界条件计算振幅  $A_i$  和  $B$ , 边界条件要求压强  $p$  和粒子速度的垂直表面分量  $v_R$  在界面上保持连续, 而  $v_R$  的连续性等同于  $(1/\rho)dp/dR$  的连续性。

当气泡内的压强由方程 (2-10) 给出, 则外部压强是入射波压强即可由表达式 (2-02) 给出, 散射波的压强由表达式 (2-04) 给出。让  $r=R_0$ , 由表达式 (2-04) 可得气泡表面处散射波压强  $p_s$ , 因为 (2-01) 式的假定, 即气泡的线度远小于波长  $\lambda$ , 方程 (2-04) 指数项中的  $r/\lambda$  远小于 1, 因此  $p_s$  及其微分可近似地表示为

$$p_s = \left( \frac{B}{R_0} - \frac{2\pi i}{\lambda} B \right) e^{2\pi i f t}, \quad \frac{dp_s}{dr} = -\frac{B}{r^2} e^{2\pi i f t} \quad (2-12)$$

气泡表面的连续性条件可表示为  $p_i = p_0 + p_s$ . 如果将 (2)、(10)、(12) 代入这一方程, 并约去公共项  $e^{2\pi i f t}$ , 就可以得到适用于实践中通常遇到的弱振动的气泡表面的方程

$$A + \frac{B}{R_0} - \frac{2\pi i}{\lambda} B - A_i = 0 \quad (2-13)$$

速度的垂直分量在气泡表面也必须连续, 从方程 (2-11) 可知气泡内的流体速度的垂直分量, 这一分量在气泡外的值可由 (2-12) 式导出, 在一个固定方向上流体速度与压强梯度之间的关系为

$$\rho \frac{\partial v_R}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial r} \quad (2-14)$$

方程 (2-12) 中让  $r=R_0$ , 并用散射波压强的微分代替 (14) 中的  $\partial p/\partial r$ , 再对时间  $t$

积分, 则(14)转化为

$$v_R = -\frac{Bi}{2\pi f \rho R_0^2} e^{2\pi f t} \quad (2-15)$$

因为波长远大于气泡尺度, 对于该方程入射波振幅  $A$  没有贡献; 因气泡附近压强梯度保持为不变, 与这一压强梯度相联系的是气泡整体的往返运动, 而不是气泡的扩张和收缩。根据方程(2-11)、(2-15),  $v_r$  的连续性条件可用公式表示出来, 即

$$\frac{B}{2\pi f \rho R_0^2} = \frac{2\pi f R_0 A_i}{3\gamma P_0} \quad (2-16)$$

从方程(2-13)和(2-16)可消去  $A_i$  而得到关于  $A$  和  $B$  的关系式; 如果略去平衡状态下气泡半径  $R_0$  的下标“0”, 有

$$B = \frac{AR}{\frac{3\gamma P_0}{4\pi^2 f^2 \rho R^2} - 1 + \frac{2\pi i R}{\lambda}} \quad (2-17)$$

现在引入一个量  $f_r$ , 其物理意义下面会清楚地看出, 它定义为

$$2\pi f_r = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{3\gamma P_0}{\rho}} \quad (2-18)$$

由方程(2-17)、(2-18)和方程(2-01)合并可得出结果

$$B = \frac{RA}{\left(\frac{f_r}{f}\right)^2 - 1 + \eta i} \quad (2-19)$$

为了从方程(2-06)获得气泡的散射截面  $\sigma_s$ ,  $|A|^2$  和  $|B|^2$  必须从下式计算

$$|A|^2 = AA^* \quad , \quad |B|^2 = BB^* \quad (2-20)$$

该表达式中  $A^*$ 、 $B^*$  分别是  $A$  和  $B$  的复共轭, 由(19)式可知,

$$B^* = \frac{RA^*}{\left(\frac{f_r}{f}\right)^2 - 1 + \eta i} \quad (2-21)$$

最后，从方程(2-06、19、20)和(2-21)可得，

$$\sigma_s = \frac{4\pi R^2}{\left(\frac{f_r^2}{f^2} - 1\right)^2 + \eta^2} \quad (2-22)$$

对于半径  $R$  一定的气泡，如果  $f$  等于  $f_r$ ，散射截面  $\sigma_s$  达到其峰值，此时入射波

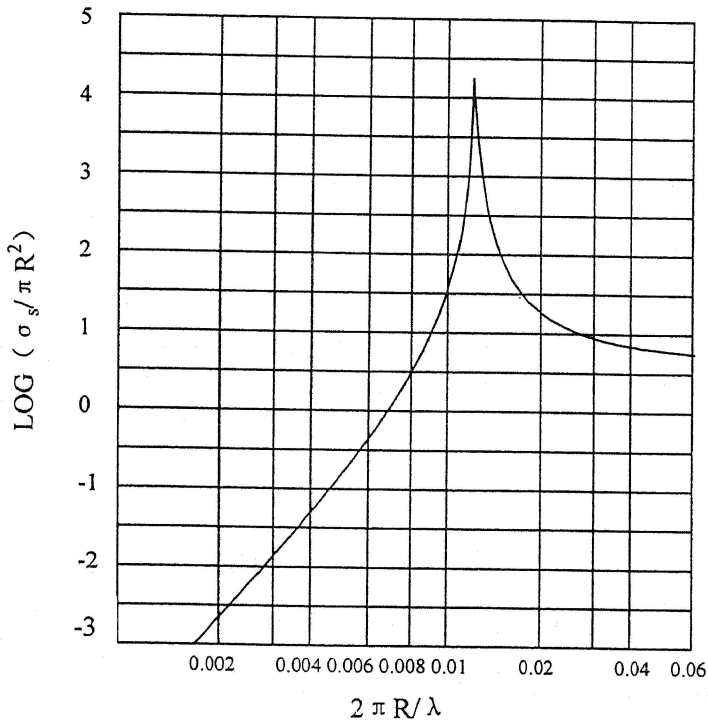


图 2-1  $\sigma_s/\pi R^2$  与  $\eta = 2\pi R/\lambda = 2\pi Rf/c$  的函数关系图

与气泡的脉动形成共振，因此  $f_r$  成为半径为  $R$  的气泡的共振频率。

图 2-1 是  $\sigma_s/\pi R^2$  与  $\eta = 2\pi R/\lambda = 2\pi Rf/c$  的函数关系图，明显的特点是该图

呈一尖峰，这一峰值与共振值  $\eta_r$  相联系，根据(2-18)式

$$\eta = \frac{2\pi R f_r}{c} = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{3\gamma P_0}{\rho}} = 1.36 \times 10^{-2} \quad (2-23)$$

如果  $P_0$  等于一个大气压， $c$  等于 60F 下海水中的声速，则共振条件下  $\sigma_s$  远大于其几何截面，由上可得

$$\frac{\sigma_{sr}}{\pi R^2} = \left( \frac{2}{\eta_r} \right)^2 = 2.16 \times 10^4 \quad (2-24)$$

其中  $\sigma_{sr}$  是共振时的散射截面，方程(2-24)也可以表示为下列形式，

$$\sigma_{sr} = \frac{\lambda^2}{\pi} \quad (2-25)$$

对于实际的真实气泡，方程(2-24)和(2-25)需要做出修正，然而共振现象对于引起散射气泡的巨大作用是无可置疑的。而且，从(2-18)式得到的共振频率在很宽的气泡尺度范围都是正确的，这一方程已被 1000~6000c 范围的低频和 20~35kc 范围的高超声频率情况下的观测所证实，每一种情况下气泡置于声波场中，声波频率由气泡最剧烈振动对应的频率决定。气泡半径可以用显微镜测量，也可以通过测定气泡内气体的体积来进行测量，在这些实验中测得的、不同温度下、水中空气气泡、氢气泡、氧气泡的共振频率在实验误差范围内（约 5%）同方程(2-18)是一致的，因此方程（2-18）可以可信地用来预言水中气泡的共振频率。从这一方程计算的数值列于表 2-1。

对于非常小的、半径小于  $10^{-3}$  cm 气泡，表面张力起重要作用，且气泡内气体的扩张和收缩变为等温过程而不再是绝热过程，这么小的气泡还没有有用的观测资料，但理论分析表明，方程(2-22)仍然是有效的，只需将  $f_r$  定义为

$$2\pi f_r = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{3gP_0}{\rho}} \quad (2-26)$$

其中

$$g = 1 + \frac{4T}{3RP_0} \quad (2-27)$$

$T$  是表面张力系数，其它量与方程(2-18)中的含义相同。方程式(2-26)、(2-27)在气泡半径大于  $10^{-3}$  cm 时不再实用。

表 2-1 水中气泡的共振半径

Table 2-1. Resonant radius for air bubbles in water

Frequency in kc		1	5	20	30
Wavelength in centimeters		150	30	7.5	3
Pressure					
Atmospheres	Depth of water in feet				
1	Surface	0.33	0.065	0.016	0.006
2	35	0.47	0.093	0.023	0.009
5	140	0.73	0.15	0.037	0.015
10	300	1.04	0.21	0.052	0.021

在预言共振的重要性方面，方程(2-22)正确地给出了频率远小于共振频率时的散射系数。因为  $\eta$  小于 1，(2-22)式中的  $\eta^2$  项当  $f_r/f$  远大于 1 时可以忽略不计，因此，低频声波的散射截面可以近似地写为

$$\sigma_s = 4\pi R^2 \left( \frac{f}{f_r} \right)^4 = 4\pi R^2 \left( \frac{\lambda_r}{\lambda} \right)^4 \quad (2-28)$$

这个方程就是熟知的对于长波辐射的瑞利(Rayleigh)散射定律。在光学内容里，瑞利定律解释了天空的蓝色。因为大气气体氧、氮的共振频率远大于可见光的频率，所以阳光的短波（蓝光）成分的散射比长波（红光）成分更强，进入人们眼睛的短波成分能量较大。(2-28)式也可用于高频声波，在气泡半径  $R$  非常小的时候，高频声波通常用语回波阵列。然而如果  $R$  小于  $10^{-3}$  cm， $f_r$  应由(2-26)式给出，而不是由(2-18)式给出。

## 2.2 实际气泡的散射和吸收

在前面的讨论中，没有考虑由于气泡的脉动所引起的声能量衰减，这一效应的存在直接来源于热力学第二定律。该定律指出，为了维持气泡在抵抗气泡-水

系统的内部摩擦力下的受迫振动，必然要从声波场中吸收热量并以热量的形式传递给周围的水介质。换句话说，将气泡的脉动看作是严格的绝热过程是热力学所不允许的，因此有必要对上述关于理想气泡的分析进行补充和完善。

方程(13)表达了气泡表面压强的连续性条件，如果考虑到对于真实气泡其行为会受到摩擦力的影响，在方程中加进相应的修正项，应可得出实用性结论。而且，由于气泡和水之间的热量交换，需要对(2-16)式做出相应的修正，(2-16)式给出的是气泡表面速度的连续性条件。对于理想气泡的分析处理包含着假设，即脉动在热力学上是可逆的，也就是说，在气泡的收缩过程中对气泡所做的功等于气泡膨胀过程中对外所做的功。事实上，气泡和水之间存在着热量交换，而脉动非常快，不能在周期的每一瞬时保持固定的温度，因此实际过程是连续的状态变化，这种变化介于绝热和等温情况之间，在热力学中称为多方过程。

不难看出在这种情况下压强与体积的脉动不能够同位相。当气泡收缩时，温度稳定上升，一旦温度的上升变的较为显著，热传导将使气泡甚至还没有扩张便趋向于冷却，当体积达到最小值时，伴随着热量从气泡向水的传递，温度将会降低。所以，温度的最大值出现在气泡体积收缩至其最小值之前的某个时刻；同样因为气体压强正比于温度（理想气体状态方程），压强最大值不会在体积为最小值时出现，而是在体积达到最小值之前的某时刻。因此一方面，压强和温度之间存在一相位移（或者叫位相差）；另一方面，压强与体积或径向速度也存在位相差。对于频率在 100kc 或小于该频率下的共振气泡，考虑到上述效应，在(2-11)的右边加进一项复数因子  $1 - \beta i$ ，其中  $\beta$  是远小于 1 的正常数。

对于真实气泡，(2-13、16)两个连续性方程应由下面的方程取代：

$$p_0 + p_s - p_i = -C_1 \frac{dR}{dt} \quad (2-29)$$

或者

$$A + B/R_0 - 2\pi i k B - A_i = \frac{C_1 B_i}{2\pi f \rho R_0^2}$$

和

$$\frac{B}{2\pi f \rho R_0^2} = \frac{2\pi R_0 A_i}{3\gamma P_0} (1 - \beta i) \quad (2-30)$$

方程式(2-29)中  $C_1$  是度量摩擦效应的一个常数, 假定其正比于气泡的径向速度  $dR/dt$ ,  $C_1 dR/dt$  表示加在气泡上的净压强, 当气泡收缩时 ( $dR/dt < 0$ ) 应为正值, 所以出现在(2-29)式右边的这一项带一负号。

类似于上述的推导过程, 得到代替公式 (2-19) 的关系式:

$$B = \frac{RA}{\left(\frac{f_r^2}{f^2} \cdot \frac{1}{1+\beta^2} - 1\right) + i\left(\frac{f_r^2}{f^2} \cdot \frac{\beta}{1+\beta^2} + \eta + \frac{C_1}{c\rho\eta}\right)} \quad (2-31)$$

如果忽略  $\beta^2$ , 并定义函数

$$\delta = \frac{f_r^2}{f^2} \beta + \eta + \frac{C_1}{c\rho\eta} \quad (2-32)$$

则方程 (2-31) 变为

$$B = \frac{RA}{\left(\frac{f_r^2}{f^2} - 1\right) + i\delta(f, R_0)} \quad (2-33)$$

将这一表达式代入方程 (2-06), 则可得到一个真实气泡散射截面的表达式:

$$\sigma_s = \frac{4\pi R^2}{\left(\frac{f_r^2}{f^2}\right)^2 + \delta^2} \quad (2-34)$$

应该注意到方程 (2-34) 与从理想气泡到处的方程 (2-22) 是一致的, 不同点是将分母中的  $\eta^2$  换成了  $\delta^2$ , 该变化仅仅会影响近共振处散射波的幅度, 因此 (2-22) 式可以正确地给出共振频率以及远离共振频率的散射截面。

因为入射能量会由于声波的散射和吸收而衰减, 所以散射截面的概念并不能提供关于真实气泡的所有信息。如果将散射和吸收能量的总和称为熄灭能量, 则熄灭截面可定义为

$$\sigma_e = \frac{F_e}{I_0} \quad (2-35)$$

其中  $F_e$  是气泡在单位时间间隔内总熄灭能量,  $I_0$  为入射声波的能量。  $F_e$  的数值等于单位时间内入射声波对气泡所做的功, 这一熄灭能量与吸收和散射的能量是一致的, 因此  $F_e$  等于

$$F_e = p_0 \overline{\frac{dV}{dt}} \quad (2-36)$$

其中的上划线表示对时间求平均值,  $p_0$  是入射声波的声压,  $V$  是气泡的体积。

使用实数来估算 (2-36) 式是最简单的, 根据方程 (2-02),

$$p_0 = Ae^{2\pi ft}$$

因为初相位可任意选择, 让  $A$  为实数, 声压和声速由上面导出公式中的实部来表示, 则有

$$p_0 = |A| \cos(2\pi ft) \quad (2-37)$$

从 (2-09) 和 (2-15) 可以导出

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi R_0^2 v_R = -\frac{2iB}{f\rho} e^{2\pi ft}$$

这里也仅仅需要表达式的实部。为了找出其实部, 将  $B$  分成实部  $B^R$  和其虚部  $iB^I$ , 将表示式  $e^{2\pi ft}$  也相应地写成实部和虚部得到

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= -\frac{2i}{f\rho} (B^R + iB^I) [\cos(2\pi ft) + i\sin(2\pi ft)] \\ &= -\frac{2}{f\rho} \{ [B^I \cos(2\pi ft) + B^R \sin(2\pi ft)] + i[B^I (\sin(2\pi ft) - B^R \cos(2\pi ft))] \} \quad (2-38) \end{aligned}$$

如果将 (2-37) 式和 (2-38) 式中的实数部分代入 (2-36) 式, 可得出下面的表达式

$$F_e = -\frac{2A}{f\rho} \overline{\cos(2\pi ft) [B^I \cos(2\pi ft) + B^R \sin(2\pi ft)]} \quad (2-39)$$

式中的上划线表示在多个周期内取平均值。因

$$\overline{\cos^2(2\pi ft)} = \frac{1}{2}, \quad \overline{\cos(2\pi ft) \sin(2\pi ft)} = 0,$$

方程 (2-39) 最终成为下面的表达式

$$F_e = -\frac{2AB^I}{f\rho} \quad (2-40)$$

根据方程 (2-33), 有下式:

$$B^I = \frac{-RA\delta}{\left(\frac{f_r^2}{f^2} - 1\right)^2 + \delta^2} \quad (2-41)$$

因此, 方程 (2-40) 具有形式

$$F_e = \frac{RA^2\delta}{\left(\frac{f_r^2}{f^2} - 1\right)^2 + \delta^2} \cdot \frac{1}{f\rho} \quad (2-42)$$

结合该表达式以及 (2-03) 和 (2-32) 式, 最终获得熄灭截面公式:

$$\sigma_e = \frac{4\pi R^2 \left(\frac{\delta}{\eta}\right)}{\left(\frac{f_r^2}{f^2} - 1\right)^2 + \delta^2} \quad (2-43)$$

熄灭能量显然是散射和吸收的能量之和, 因此真实气泡的吸收截面  $\sigma_s$  可以由下式定义

$$\sigma_e = \sigma_s + \sigma_a \quad (2-44)$$

从方程 (2-34) 和 (2-43) 即可得到其表达式

$$\sigma_a = \frac{4\pi R^2 \left( \frac{\delta}{\eta} - 1 \right)}{\left( \frac{f_r^2}{f^2} - 1 \right)^2 + \delta^2} \quad (2-45)$$

用上面的表达式还可以得到一个简单的关系式

$$\frac{\sigma_s}{\sigma_e} = \frac{\eta}{\delta} \quad (2-46)$$

现在来看由(2-32)式定义的函数 $\delta$ ，如果 $\beta$ 和 $C_1$ 对于理想气泡的情况等于零， $\delta$ 减小到 $\eta$ ，而且可以看出(2-22)式实际是(2-34)的一个极限形式。 $\beta$ 和 $C_1$ 的数值可以通过分析已知的关于气泡对声波吸收有贡献的若干物理过程而

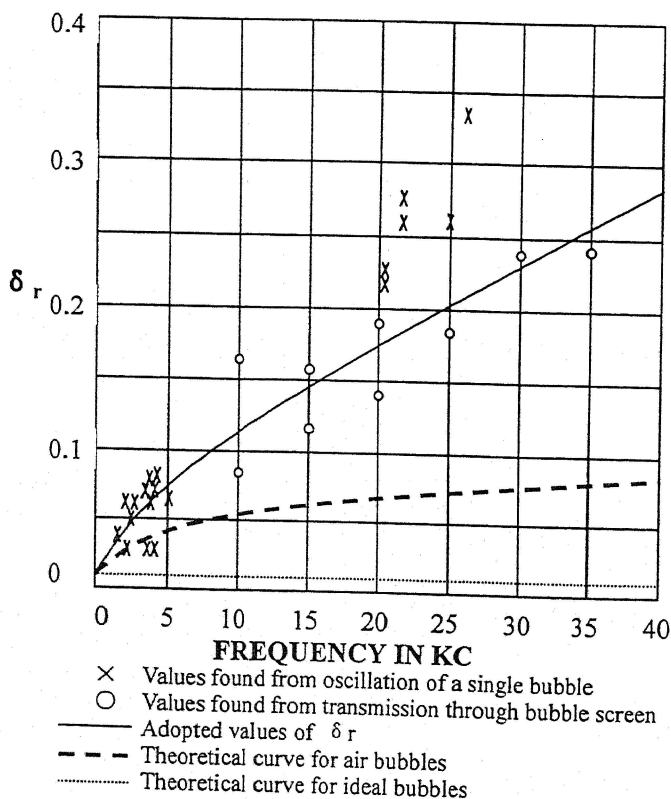


图 2-2 共振条件下衰减系数与频率的关系

得出，这些物理过程包括热传导、粘滞现象、表面张力以及其它过程，也有一

些通过从观测资料决定  $\delta$  的实验方法。图 2-2 显示出共振条件下衰减系数与频率的关系，从图 2-2 的观察中容易看出，理论分析所预言的  $\delta$  值远小于观测数据。这种差异指出，在对吸收问题的理论分析中有些有关的物理过程没有被考虑到。因此， $\beta$  和  $C_1$  的理论值将不再在文中使用，而  $\delta$  的实验值将被用来解释尾流的声学特性。

$\delta$  的物理意义可以很好地从  $\sigma_s/4\pi R^2$ 、 $f/f_r$  的关系图中看出。由此可以绘出类似于图 2-1 的共振曲线，根据 (2-34) 式，该曲线的峰值为，

$$\frac{\sigma_{sr}}{4\pi R^2} = \frac{1}{\delta_r^2} \quad (2-47)$$

其中  $\delta_r$  是图 2-2 所示的共振条件下  $\delta$  的值。如果用  $\sigma_s(f)$  表示任何共振频率下的散射截面，从方程 (2-40) 和 (2-47) 可的下式

$$\frac{\sigma_s(f)}{\sigma_{sr}} = \frac{\delta_r^2}{\left(\frac{f_r^2}{f^2} - 1\right)^2 + \delta^2(f, R)} \quad (2-48)$$

在共振曲线峰值附近的很窄频率带内，(2-48) 式分母上的  $\delta(f, R)$  一项可用其共振值  $\delta_r$  代替，而且  $f_r/f$  十分接近于 1。因此，利用表示式  $q = f_r/f - 1$ ，可得下式

$$\left(\frac{f_r^2}{f^2} - 1\right)^2 = q^2(q+2) = 4q^2 \quad (2-49)$$

方程式 (48) 可近似地写成下式：

$$\frac{\sigma_s(f)}{\sigma_{sr}} = \frac{1}{1 + \frac{4q^2}{\delta_r^2}} \quad (2-50)$$

也就是说，对于  $q$  相对共振频率的任何小的偏离， $\sigma_s$  将从其峰值迅速减小一个

较大的值  $1/\delta_r$  或较小的值  $\delta_r$  本身。共振峰越尖锐，气泡脉动的衰减越小，因此， $\delta_r$  通常称为衰减系数。

### 2.2.1 衰减系数的测量

最简单、最直接确定衰减系数的方法是测量气泡在声波场中共振峰的尖锐度，气泡在纯净水中有关的测量文献已有报道。一种情况是，当声波的频率缓慢变化时，观测了单个气泡的振动幅度，因  $\sigma_s$  正比于振幅的平方，所以绘出这些观测的数据图便可直接得到  $\delta_r$ 。用这种方法获得了氢气泡、氧气泡的  $\delta_r$  值，但没有发现这两种气体气泡的区别。

另一种情况是，对通过相同大小气泡组成的气泡幕的投射损失进行了观测。为了产生该气泡幕，使用了六个小微孔管，将其一线排放在实验池的底部，在水面下深度为 10ft 处产生气泡流，这些气泡通常要受到冠状气泡的影响，这些冠状气泡能够在约一秒内旋转着靠向一边从而使一股强气泡流到达表面。因为较大的气泡首先到达表面，而较小的气泡稍后依次到达水面，任何时刻近水面处气泡的半径近乎相等。通过该气泡幕一定频率声波的透射损失按分贝计算正比于单个气泡的  $\sigma_s$ ；从透射损失与半径的关系图可以决定  $\delta_r$  值，用这种方法得到的观测曲线绘于图 2-2。在分析这些数据时，考虑了  $\delta$  随半径的变化，所以距共振一定距离的点和靠近共振的点都可以使用。

用这两种方法得到的  $\delta_r$  值由图 2-2 给出，虚线表示对于水中气泡  $\delta_r$  的理论值，其中让  $C_1$  等于零。明显可以看出，频率较高时观测值远大于理论值，此差别在上面的讨论中已经提到了。从单个气泡得到的  $\delta_r$  值在图中以“×”表示，要比从声波通过气泡幕的透射损失所决定的值要大一些，后者在图 2-2 中用“o”表示。在稍前的测量中，气泡是不自由的，而是附着在固定于铂金线上的蜡球上，铂金线在气泡的收缩和膨胀过程中会往返振动。这种条件下衰减系数可能在自由气泡对应值的基础上有所增加，所以这些值不可信赖。图 2-2 中显示的符合得最好的实线，是在高频下、对自由上升的气泡幕的观测值为基础得到的。为了与观测值对比，一个大气压、共振条件下理想气泡的衰减系数的计算值在图中以点线给出，计算值是用方程 (2-23) 得到的。

### 2.3 含有很多气泡的液体中声波的传播

上面得到的单个气泡的结果仅仅是解决一般问题、即声波在包含有大量气泡的介质中的传播问题的第一步，因为影响每个气泡的外部压强是入射声波的声压和来自其它所有气泡声波的声压的总和，所以这个问题是比较复杂的。虽然解决问题的数学工具很复杂，但预期的一般性结果可简单地描述出来。

### 2.3.1 一般理论

首先，气泡的存在将会影响声波在其中传播的介质的性质，如果气泡的空间距离小于波长，气泡将会改变介质的压缩性，从而显著地影响声波的传播速度。而且，声速还将有一个小的虚部，这来源于声波的吸收和散射，从而会引起声波通过充满气体的水中时声波强度随传播距离的指数衰减加剧。因此，通过包含气泡的水时，声波可以被反射、折射和衰减。当声波在均匀介质中传播时也会产生这些现象，声波在均匀介质中的传播速度是介质状态的函数。

其次，这样一种考虑还必须加以补充，必须考虑散射效应。从不同气泡产生的声波将产生散射效应，散射波将会向各个方向传播，这散射的声波可以认为是来源于这样一个事实，在点散射体的随机聚集过程中，单位体积内从一点到另一点散射次数随时都在变化，从统计的观点来看，表现出波动特性。在统计力学中就是按照这一条线索给出了空气对于光的散射理论。更简单地说，散射波的强度可以认为是正比于从所有各个气泡来的压强的平方平均值。在气泡的运动过程中，其散射的子波的相对相位很不相同，发生干涉相长或干涉相消可能性相等。根据这样的想法，平均平方压强就可以简单地认为是每个散射子波压强平方之和。

在船舶尾流中，一个体积元内的气泡数目通常不够引起声波的反射和折射，由各个气泡引起的入射声波的逐渐衰减以及各方向上声能量散射是两个最主要的效应。

当然前面的讨论不很精确，将要介绍的结果在解决一般问题时已经得到广泛的验证，在其分析过程中作了一些假设，其中最为重要的是假定气泡直径远小于入射波的波长，而且气泡间的平均距离远大于气泡线度。从物理的角度来看，所得到的结果是复杂的数学表达式，在此仅仅介绍其思路和解决问题的方法。这个理论的主要特点是使用了分布均值(configurational averages)的概念，在任何位置处某一空间体元内都可能有不同的气泡，某一给定时刻对于气泡的每一种

分布声压将会有一确定值。如果对所有不同气泡的所有可能位置对应的声压求平均，就得到了声压  $p$  的分布均值，结果用  $\langle p \rangle$  来表示，它通常不等于  $p$  的时间平均值，因  $p$  值的正负波动而使其时间平均值为零。与此类似， $\langle p^2 \rangle$  可定义为  $p^2$  的空间平均值。

$\langle p \rangle$  遵守均匀介质中的波方程，其中复波速是位置的函数，该分布均值通常表现为折射声波的声压，因此  $\langle p \rangle$  将使投射波加强，通过散射区之后该投射波与入射波之间存在确定的相位关系。对于特定的空间分布， $p$  的值与  $\langle p \rangle$  不同，这种区别可以通过  $p - \langle p \rangle$  平方平均值的测量而确定，也就等于  $\overline{(p - \langle p \rangle)^2} = \overline{p^2 - 2p \langle p \rangle + \langle p \rangle^2} = \langle p^2 \rangle - 2 \langle p \rangle \cdot \langle p \rangle + \langle p \rangle^2 = \langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2$ ，分析表明其不同简单地等于从每一气泡发出的声波声压的平方和，因此这些附加项仅仅表示散射声包括多次散射声。正因存在这些因素，任意点的强度（正比于  $p^2$ ）是二平均项之和，第一项  $\langle p \rangle^2$  表示声速在其中随位置的变化而变化的均匀介质中传播的相干波，第二项  $\langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2$  表示从每个气泡散射的散射波总和。任意时刻  $p^2$  的值、或很少几个周期内的平均值，通常与这两项之和是有区别的，但当气泡的分布发生变化时， $p^2$  的时间平均值将接近于其分布平均值。在大多数实际情况下，几秒钟的时间已足以使  $p^2$  的时间平均值将接近于其分布平均值，如果在几秒钟内对时间取平均值，本节开始所叙述的简化处理可以认为是正确的。

当气泡之间的平均距离变得非常小，或者换句话说，单位体积内的平均气泡数目非常大，这样的简化处理就不够了。在这种情况下，除了表示折射波和散射波的两项以外， $\langle p^2 \rangle$  还必须包含另外一项，这一项虽然难以理解但始终对散射声有贡献，并且是由于散射的子波之间的干涉引起的。虽然不容易确定这一项有多重要，但可以肯定在共振状态下、假定在每一波长范围内的衰减小于几个分贝，则该项可被忽略，如果共振气泡所引起的介质中声速的变化相对较小，那么也必须满足上述条件（每一波长范围内的衰减小于几个分贝）。因为在实际观测中尾流都能够满足这一条件，所以在下面关于声波的衰减、散射、和反射等过程方程的推导过程中，该项可以忽略不计。

### 2.3.2 透射

现在应用上节给出的分析方法来推导穿过含气泡区的透射损失。首先假定该

区域内所有气泡都具有相同的大小，每立方厘米内的气泡数为  $n$ ，区域内每一点的  $n$  值可能都不相等。如果  $I$  表示入射声波的强度，则每一个气泡引起的声能量熄灭速率根据方程 (2-35) 等于  $\sigma_e I$ ；用  $I(0)$ 、 $I(r)$  分别表示波束进入区域时的强度以及波束通过区域内  $r$  距离时的强度， $r$  沿着声波传播方向。当波经过一个元距离  $dr$  时， $I(r)$  的增量为

$$dI = -n(r)\sigma_e I(r)dr \quad (2-51)$$

将 (51) 式对声波通过的距离积分，则在任何距离  $r_1$  处，

$$I(r_1) = I(0) \exp[-\sigma_e \int_0^{r_1} n(r)dr] = I(0) \exp[-\sigma_e N(r_1)] \quad (2-52)$$

其中  $N(r_1)$  是长度为  $r_1$ 、单位截面积柱体内的气泡总数，如果让  $r_1$  等于区域的总厚度  $w$ ，方程 (2-52) 将给出气泡幕产生的总熄灭，或者称之为水下声研究工作中通常用的衰减。用分贝来表示，则方程 (2-52) 可写为

$$10 \log \frac{I(0)}{I(w)} = 10 \times 0.434 \times \bar{n} \sigma_e w = K_e w \quad (2-53)$$

公式中  $\bar{n}$  是气泡幕中气泡的平均气泡密度，由下式定义

$$\bar{n} = \frac{1}{w} \int_0^w n(r)dr = \frac{1}{w} N(w) \quad (2-54)$$

方程式 (2-53) 中的  $K_e$  通常称为衰减系数，按照惯例以每码的分贝数给出。因为  $\bar{n}$  和  $\sigma_e$  通常使用单位  $\text{cm}^{-3}$  和  $\text{cm}^2$ ，而 1 码等于 91.4cm，所以  $K_e$  取单位 db/yard 时就成为

$$K_e = 396.8 \bar{n} \sigma_e \quad (2-55)$$

通过对尾流或实验室产生的气泡幕进行声学测量，衰减系数相当容易确定，前面已经知道了共振气泡的  $\sigma_e$ ，在假设只存在共振气泡的条件下气泡密度  $\bar{n}$  用 (2-55) 式通过  $K_e$ 、 $\sigma_e$  进行计算。然而，就像在尾流中一样，在气泡量很大的情况下，气泡尺度分布很广，因此估算这种不均匀气泡幕的衰减系数是非常重

要的。

用  $n(R)dR$  表示每立方厘米半径在  $R \sim R+dR$  范围的气泡数, 定义  $S_e$  为每立方厘米的总熄灭截面。从方程 (2-34) 和 (2-43) 可以知道, 对 1 立方厘米内的所有气泡的截面进行累加或积分可得,

$$S_e = \int \frac{4\pi R^2 n(R) \frac{\delta}{\eta}}{\left(\frac{f_r^2}{f^2} - 1\right)^2 + \delta^2} dR \quad (2-56)$$

近共振半径的气泡对  $S_e$  的贡献将会很大, 如果当半径近共振时  $n(R)$  的变化不大, 对 (2-56) 式共振峰的积分便很容易得到。

假设远离共振的气泡的吸收可以忽略, 则上面的结论可给出  $S_e$  的正确值, 即使近共振的气泡密度与其它半径气泡的密度相当共振气泡仍将是  $S_e$  的主要贡献, 因为共振气泡的  $\sigma_e$  值毫无疑问远大于其它尺度气泡的  $\sigma_e$  值。然而, 根据前面提到的气泡的逐渐收缩现象, 会出现大量的小气泡而影响总的熄灭截面。远离共振尺度的气泡的  $\sigma_e$  值正比于  $\delta$ , 而对于非共振气泡这个衰减系数是未知的, 所以无法对非共振气泡的重要性给出明确结论。在实际应用过程中, 习惯上假定近共振气泡是尾流衰减的主要原因, 这样的假定显示出与实验结果相一致, 而且对于气泡在尾流中的作用的超声研究中或许也是正确的。

那么为了计算近共振气泡所引起的  $S_e$  值, 方程式 (2-56) 中的  $n(R)$ 、 $\eta(R, f)$ 、和  $\delta(R, f)$  或许可从积分号中提出来并且取半径  $R$  为共振半径  $R_r$ , 这样方程变为

$$S_e = 4\pi R_r^2 n(R_r) \frac{\delta_r}{\eta_r} \int_0^\infty \frac{dR}{\left(\frac{f_r^2}{f^2} - 1\right)^2 + \delta_r^2} \quad (57)$$

被频率为  $f$  的声波照射的气泡的共振半径为  $R_r$ , 根据方程 (2-23) 有

$$(2\pi f_r)^2 = \frac{3\gamma P_0}{\rho R_r^2} \quad (2-58)$$

从方程 (2-23) 和方程 (2-58) 可得下式

$$\frac{f_r}{f} = \frac{R_r}{R} \quad (2-59)$$

而根据方程 (2-49),

$$q = \frac{f_r}{f} - 1 = \frac{R_r}{R} - 1, \quad dq = \frac{-R_r'}{R^2} dR \quad (2-60)$$

将方程 (2-60) 代入 (2-57), 通过对变量  $q$  积分, 即可得出  $S_e$  的表达式。仅在峰值 ( $q$  接近等于 1) 附近的值才对积分有明显贡献, 考虑到 (2-49)、(2-50), 由方程 (2-57)、(2-60) 得出下式

$$S_e = 4\pi R_r^2 n(R_r) \frac{\delta_r}{\eta_r} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dq}{4q^2 + \delta_r^2} \quad (2-61)$$

该积分的上下限已被扩展到无穷大, 之所以这样近似是因为, 不是非常接近峰值部分的贡献很小, 可不予考虑。对方程 (2-61) 中的积分估算可知

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dq}{4q^2 + \delta_r^2} = \frac{\pi}{2\delta_r} \quad (2-62)$$

从 (2-60)、(2-61) 由可得出下式

$$S_e = \frac{2\pi^2 R_r^2 n(R_r)}{\eta_r} \quad (2-63)$$

现在用  $u(R)dR$  表示 1 立方厘米的含气泡水中半径在  $R \sim R+dR$  范围的气泡内空气的总体积, 则有

$$u(R) = \frac{4}{3} \pi R^3 n(R) \quad (2-64)$$

$$S_e = \frac{3\pi u(R_r)}{2\eta_r} \quad (2-65)$$

根据方程 (2-23), 在一个大气压、60F 的海水中  $\eta_r$  的值为  $1.36 \times 10^{-2}$ , 因此

$$S_e = 346.5u(R_r) \quad (2-66)$$

在计算通过含有各种不同大小气泡区域的衰减时，可直接应用本节开始到处的关系式，只需将方程(2-53)中的  $n\sigma_e$  用(66)式中的  $S_e$  代替即可。这样可以得到衰减系数为

$$\begin{aligned} K_e &= 396.8 \times 346.5 u(R_r) \\ K_e &= 1.4 \times 10^5 u(R_r) \end{aligned} \quad (2-67)$$

这个结论是方程(55)对于气泡大小广泛分布情况下的一般应用。

### 2.3.3 散射

声波通过含有气泡的区域时，其基本散射方程非常简单，从一个区域散射的声强平均来说简单地等于每一个气泡散射的声波强度之和。对于单个气泡而言，距离为  $r$  处的强度由下式给出

$$I_s = \frac{\sigma_s}{4\pi r^2} I_0 \quad (2-68)$$

在公式中  $I_0$  表示气泡所在处入射声波的强度。这一方程可由方程(2-3)、(2-5)和(2-6)得到，更简单地它可直接写出来，因  $\sigma_s I_0$  被定义为单个气泡的散射率，而能量是均匀地分布在所有方向上，在距离  $r$  处，该能量均匀地分布在  $4\pi r^2$  的面积上。如果用  $n$  表示每立方厘米内的气泡数，在体积元  $dV$  内的气泡数为  $ndV$ 。

方程(2-68)在应用过程中应做出响应的修正，因为在经过距离  $r$  时散射的声波将会被衰减。如果经过的距离较远，应考虑到各方面的衰减因素，如水的吸收、温度结构的散射等。在短距离内，这些效应大部分可忽略不计，而传播损失由(2-52)式给出，则经过距离  $dV$  为  $r_1$  的散射声表示为

$$dI_s = \frac{n\sigma_s dV}{4\pi r_1^2} I \exp[-\sigma_e \int n(r) dr] \quad (2-69)$$

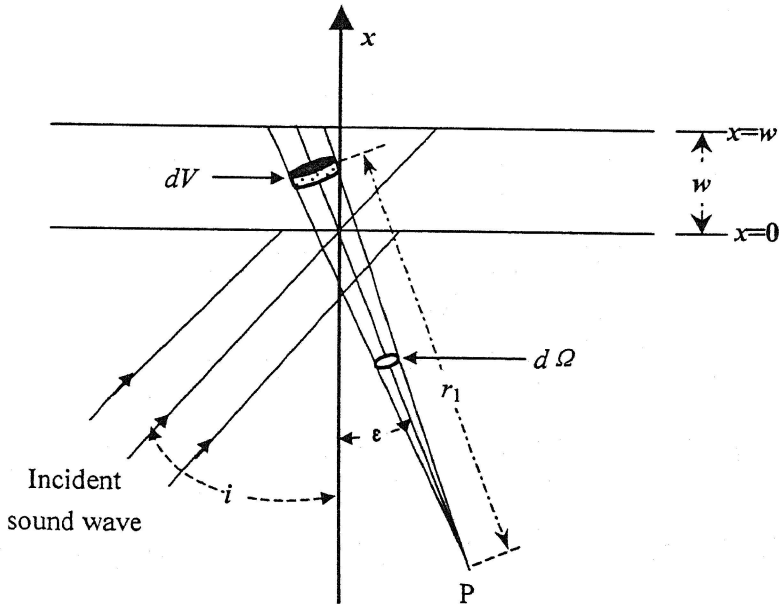
其中  $I$  为  $dV$  处的强度。如果从不同方向的声波都照射到该区域，在使用(2-69)式时必须将  $I$  对所有的方向取平均。

要从(2-69)式计算散射声的强度远比用(2-51)式计算声波的整体衰减复杂的多。方程(2-51)可以沿着单一的声线进行积分，直接得到(2-52)式；解

决 (2-69) 式时的基本困难是体积元  $dV$  内的声强度  $I$ ，它包含着依次从其它体元来的散射声。考虑到多重散射，问题就变得相当复杂，导致一般的积分方程无法精确地求解。这种解决问题的方法在天体物理的有关文献中有深入研究，在涉及光学问题的有关方法中可望接军多重散射的问题。

所幸的是，气泡对声波的吸收远大于散射，从方程 (2-46) 和图 2 可以清楚地看到，频率超过 15kc 时共振气泡的截面之比  $\sigma_s/\sigma_e$  小于 1~10。正是因为这个原因，从共振气泡散射的多次散射声通常传播较远的距离而非常弱，在下面的讨论中将忽略多次散射的影响。对于简单的情况，当频率超过 15kc 时由这一近似产生的误差小于 0.5 分贝，即使在 15kc 时，误差一般小于 1 分贝。对于非共振气泡，多重散射是不能够忽略的，除非  $\sigma_e$  远大于  $\sigma_s$ 。

即使利用这一近似，从 (2-69) 式计算  $I_s$  也不简单。 $I$  在此便成为包含气泡区域的入射声强度，在经过该区域时要被衰减。然而，要计算任一点的  $I_s$ ，从气泡幕各个部分来的声波都要考虑到，并且综合考虑所有方向上的贡献来估算整体散射声。在实际条件下，水听器的方向性也要加以考虑，以获得探测仪器接收到的电信号。



Scattering from a bubble screen.

图 2-3 计算声散射的几何图

为了深入了解散射问题的本质,应尽可能地排除那些外在的复杂因素。将方程(2-69)应用于气泡幕的散射情况,也就是应用于由两个距离为  $w$  的平行平面所限定的含有气泡的水层的散射情况。这样就不用对所有的方向积分,而是简单地计算到达某一点  $P$  的、在一个小的立体角  $d\Omega$  内各方向的散射声,图 2-3 给出了这种情况的几何图。

用  $I(0)$  来表示入射到气泡幕的声波强度,假定如入射声波是平面波,其传播方向与气泡幕法线的夹角为  $i$ 。在气泡幕层内强度按指数规律衰减,因  $dr = \sec i dx$ , 方程(2-52)给出气泡幕层内  $x$  处入射声波的强度

$$I(x) = I(0) \exp\left[-\sigma_e \sec i \cdot \int n(x) dx\right]$$

如图 2-3 所示,所考虑的散射声波与气泡幕层法线的夹角  $\varepsilon$ , 因此沿散射声方向方程(2-69)中  $dr = \sec \varepsilon dx$ , 那么从距离为  $r_1$  处、体积元  $dV$  内散射的声波为

$$dI_s = \frac{n(x)\sigma_s dV}{4\pi r_1^2} I(0) \exp\left[-\sigma_e(\sec i + \sec \varepsilon) \int n(x) dx\right] \quad (2-70)$$

对于立体角内的体元  $dV$ , 有下面的关系

$$dV = r_1^2 d\Omega dr$$

考虑到  $dr_1 = \sec \varepsilon dx$ , 方程(2-70)变为

$$dI_s = \frac{n(x)\sigma_s \sec \varepsilon d\Omega dx}{4\pi} I(0) \exp\left[-\sigma_e(\sec i + \sec \varepsilon) \int n(x) dx\right] \quad (2-71)$$

这个方程可对  $x$  从 0 到  $w$  积分, 得

$$dI_s = \frac{\sigma_s d\Omega}{\sigma_e 4\pi} \frac{\cos i}{\cos i + \cos \varepsilon} \left\{ 1 - \exp\left[-\sigma_e(\sec i + \sec \varepsilon) \int n(x) dx\right] \right\} \quad (2-72)$$

在方程(2-72)中可看出,  $dI_s$  与从气泡幕到测量点  $P$  的距离无关, 如果考虑到随着距离的增加, 相同立体角  $d\Omega$  包含的截面更大, 就可解决这一明显的矛盾。

方程(2-72)有两个重要的极限情况。当通过气泡幕的传播损失大的时候, 括号内第二项小到忽略不计, 这时

$$dI_s = \frac{\sigma_s d\Omega}{\sigma_e 4\pi} \cdot \frac{\cos i}{\cos i + \cos \varepsilon} \quad (2-73)$$

还可以注意到, 当  $\varepsilon$  等于  $i$  时 (象背散射声的情况),  $\cos \varepsilon = \cos i$ , 如果还利用 (46) 式给出的  $\sigma_s / \sigma_e$ , 由方程 (2-73) 可得

$$dI_s = \frac{\eta}{\delta} \cdot \frac{d\Omega}{8\pi} \quad (2-74)$$

另一方面, 当通过尾流的传播损失小的时候, 可以利用近似关系  $e^{-\alpha} = 1 - \alpha$ , 从而有

$$dI_s = \sigma_s \frac{d\Omega}{4\pi} \sec \varepsilon \int_w n(x) dx \quad (2-75)$$

再利用前面引入的平均密度  $\bar{n}$ , 上式又可写为

$$dI_s = \sigma_s \frac{d\Omega}{4\pi} \bar{n} w \sec \varepsilon \quad (2-76)$$

由此看出, 当通过尾流的传播损失小的时候,  $dI_s$  正比于  $\sigma_s$  和  $\bar{n}$ ; 但是当传播损失大的时候, 散射声趋近于某一常数值, 这一值由 (2-73) 式给出, 对于  $\bar{n}$  和  $w$  的变化并不敏感。

当有不同尺度的气泡出现时, 用每立方厘米内的全熄灭截面  $S_e$  和全散射截面  $S_s$  代替  $n\sigma_e$  和  $n\sigma_s$ , 则仍可用 (2-69) 式来进行相应的计算。  $S_e$  在上一节已做过讨论, 而方程 (2-65) 给出了  $S_s$  与共振时气泡密度  $u(R_r)$  的关系。一个类似的分析就是仅考虑近共振尺寸的气泡, 则可得到每立方厘米的全散射截面:

$$S_s = \frac{3\pi u(R_r)}{2\delta_r} \quad (2-77)$$

即使有非共振气泡的吸收存在, 这种仅考虑近共振尺寸气泡的思路应该说是合理的。因为单个气泡的散射截面  $\sigma_s$  并不依赖于共振气泡的衰减系数  $\delta$ , 所以精确地推算各种尺寸气泡的贡献是有可能的。对于尺寸小于共振尺寸的单个气泡而言, 因  $\sigma_s$  随波长的 4 次方衰减, 这样大小的气泡对  $\sigma_s$  的贡献不大, 除非

其数量非常多。大于共振尺寸的气泡的散射截面大约是其几何截面的 4 倍，但其数量不可能像小气泡那么多，因此方程 (2-77) 在很宽的环境范围适用。

因在共振条件下比率  $S_s/S_e$  等于  $\sigma_s/\sigma_e$ ，所以当通过气泡幕的传播损失大时方程 (2-74) 仍然成立，因此这种情况下的散射声与气泡都是共振尺寸的情况一样，然而当传播损失小的时候，则必须使用方程 (2-76)，并以  $S_s$  代替其中的  $\bar{n}\sigma_s$ 。

### 2.3.4 反射和折射

气泡的存在会改变声波的传播速度，如果气泡密度足够大，这种效应在实践中就变得重要起来，并引起声波的反射或折射。在船舶尾流中气泡密度通常不足以使声速发生很大变化，因此这里不详细讨论该效应，仅大概介绍其分析方法，并给出结论。

声速被定义为

$$c^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho} \quad (2-78)$$

其中  $p$  和  $\rho$  分别表示包含气泡的混合物的压强和密度。如果仅仅考虑体积为  $V$  的一部分，方程式 (2-78) 可以写成如下形式

$$c^2 = -\frac{V \frac{\partial p}{\partial t}}{\rho \frac{\partial V}{\partial t}} \quad (2-79)$$

其中利用了关系  $\rho dV + Vd\rho = 0$ ，而  $\partial p / \partial t$ 、 $\partial V / \partial t$  两个量可以用前面两节的有关方程进行估算，从而得到下面的基本方程

$$\frac{c_0^2}{c^2} = 1 - \frac{\lambda^2}{\pi} \int \frac{n(R)RdR}{\left(\frac{f_r^2}{f^2} - 1\right) + i\delta} \quad (2-80)$$

式中  $c_0$  是没有气泡时的声速， $n(R)$  表示半径在  $R \sim R+dR$  之间每立方厘米内的气泡数。积分式 (2-80) 遍及所有的气泡尺寸。假设所有气泡半径都远小于波长，气泡之间的平均距离远大于其半径，如果这两个假设都不能够被满足，则上述

理论便不能够成立。方程 (2-80) 的详细推导有文献给出。

应该注意的是只有当液体-气泡混合物的密度与液体的密度大体上相同时，方程 (2-80) 才是正确的。对于远离共振的频率而言，(2-80) 的虚部可被忽略，当频率低于共振频率时，将可得到下面的方程

$$\frac{c_0^2}{c^2} = 1 + \frac{3u}{\eta_r^2} \quad (2-81)$$

其中  $u$  是 1 立方厘米内气泡内的气体总体积，因此可由下式定义

$$u = \int \frac{4\pi}{3} R^3 n(R) dR \quad (2-82)$$

方程 (2-81) 中是共振情况下气泡的周长与波长之比，定义如方程 (2-01) 所示。方程 (2-81) 仅当气泡较大、从而可不考虑表面张力的情况下实用，如果气泡的扩张和收缩是等温过程而不是绝热过程，方程 (2-81) 的最后一项必须乘以气泡内气体的热导率。有意思的是，考虑到这些限制条件，方程 (2-81) 与气泡的半径无关。即使  $u$  在一个大气压下小到  $10^{-4}$ （气体与水的比例是  $10^{-4}:1$ ）， $c/c_0$  等于 0.62。

当气泡大于共振尺寸时，声速将会因气泡的存在而增大，此时与方程 (2-81) 相对应的关系便成为

$$\frac{c_0^2}{c^2} = 1 - \frac{3}{\eta_r^2} \int \frac{R_r^2}{R^2} u(R) dR \quad (2-83)$$

其中  $u(R)dR$  是单位体积（1 立方厘米）内半径在  $R \sim R+dR$  范围的气泡数。在方程 (2-83) 中，当  $u(R)$  足够大时， $c_0^2/c^2$  会变为负值，在这种近似下声速变为纯虚数，衰减变得非常大。在这种情况下，方程 (2-80) 中的虚部——这一虚部在 (2-83) 中被忽略——决定着波速和波长。对于气泡半径都是二倍共振半径时， $u$  的临界值为  $2 \times 10^{-4}$ ，此时  $c$  为一定值，且相当于气泡的间距粗略地等于气泡半径的三倍。

当有共振气泡存在时，声速的虚部便很重要，如果积分进在共振区左右进行，而且在这一区域  $u(R)$  随半径的变化不很快，则方程式 (2-80) 中实部的积分值较小且可以被忽略，这样就得到

$$\frac{c_0^2}{c^2} = 1 - \frac{3\pi i R_r u(R_r)}{2\eta_r^2} \quad (2-84)$$

声速的这一虚部将使声强随距离  $x$  呈指数规律衰减, 即声强按表达式  $\exp(-2\pi jfx/c)$  衰减。如果方程式 (2-84) 中右边的第二项较小, 像大部分实际情形一样, 得到的衰减结果同上面 (2-53) 和 (2-67) 所得的结果完全相同。

在一个包含气泡的区域, 假设其中有各种可能的尺寸分布, 并有明确的边界, 那么从无气泡的水中入射到该区域的声波将会在界面上被反射。反射波与入射波的振幅之比由下式给出

$$\frac{A''}{A_0} = \frac{c_1 - c_0(\cos \varepsilon / \cos l)}{c_1 + c_0(\cos \varepsilon / \cos l)} \quad (2-85)$$

其中  $c_0$ 、 $c_1$  分别是无气泡介质中的声速、通过界面的即含气泡介质中的声速, 能量反射系数  $\gamma_e$  简单地等于  $A''/A_0$  的平方。角度  $l$  和  $\varepsilon$  分别是入射和折射角, 从 Snell 公式可得到二者的关系

$$\frac{\cos^2 \varepsilon}{\cos^2 l} = 1 + \left(1 - \frac{c_1^2}{c_0^2}\right) \tan^2 l$$

在大部分实际情况下, 接近等于, 因此基本等于, 将 (81) 式写成下列形式

$$\frac{c_0^2}{c^2} = 1 + b$$

只要  $b$  远小于 1, 则能量反射系数为

$$\gamma_e = \frac{b^2}{16} \quad (2-86)$$

这个方程当  $b$  为复数时也可以运用 (假如使用  $b$  的绝对值的话), 当  $b$  接近于 1 或大于 1 的时候, 表达式会变得相当复杂。

### 2.3.5 气泡声学效应的观测结果

对于水中气泡分布已知的情况, 声波在其中的传输特性已在实验室进行了研究, 所使用的声波频率在 10~35 kc, 实验时气泡幕的长度约为 17 in, 其厚度随气泡半径的不同而不同; 如对于半径为 0.034 cm 的气泡, 该半径对应的共振频率为 10kc, 气泡幕的厚度为 3 in; 而半径为 0.020cm 的气泡, 其共振频率为 17

kc, 对应的厚度近 5in.。在均匀的水流中, 每秒送入的气体约为 1 立方厘米, 也就是说, 整体密度  $u$  的数量级相当于每份水中有  $10^{-4}$  的气体。当打开气泡源 1 秒的时间以产生气泡脉冲, 声探测器处气泡的密度远小于这一值, 大约在  $10^{-6}$  和  $10^{-7}$  的数量级。

在产生气泡脉冲的同时, 声学测量同步开始。传输损失是通过读取水听器的

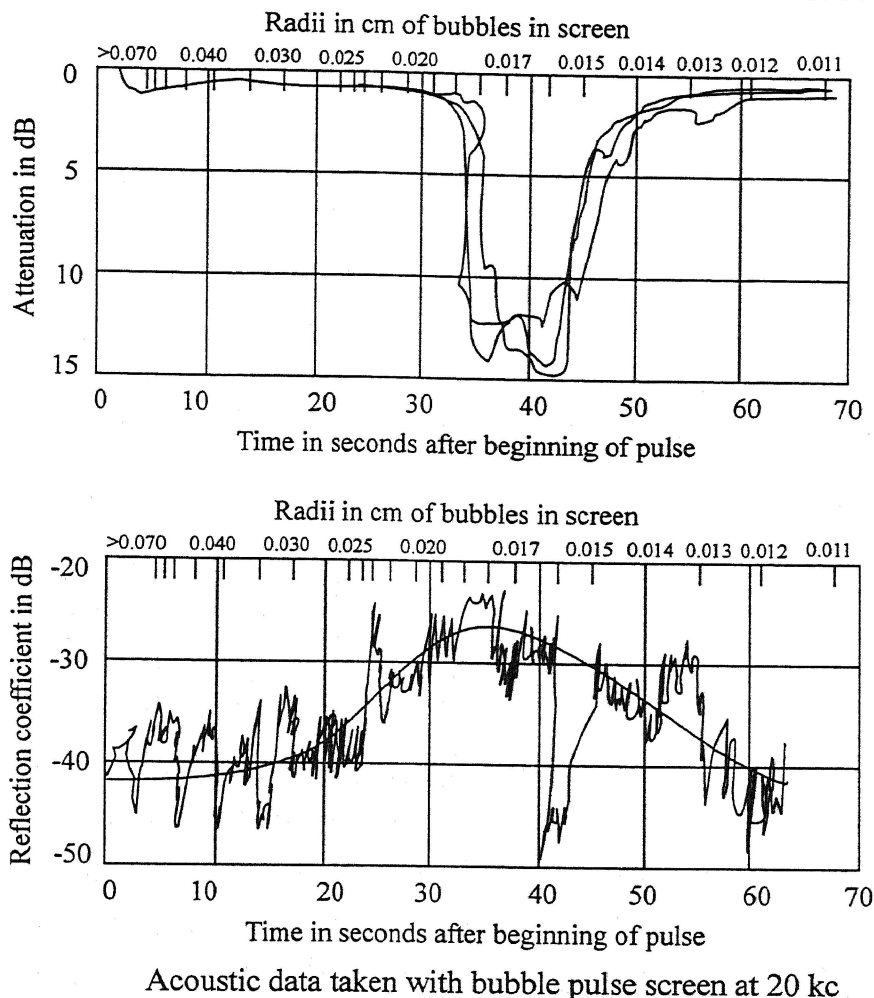
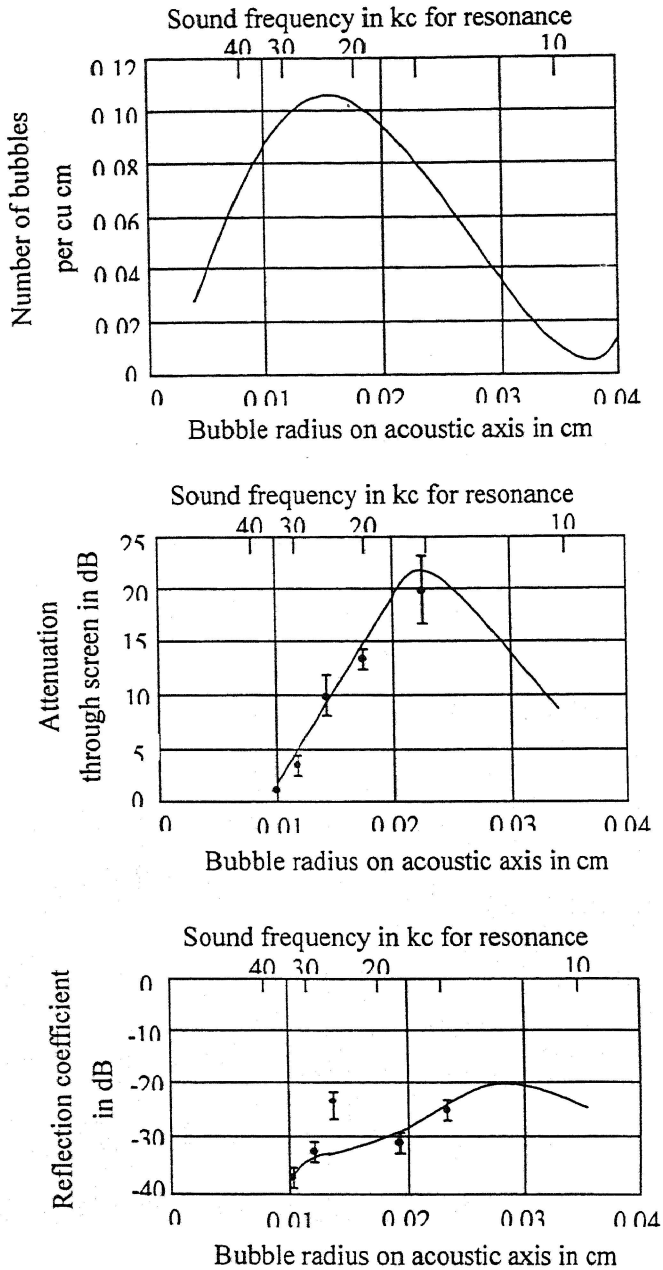


图 2-4 透射和反射随时间变化的函数关系

读数来测量的, 而反射声是通过置于发生器同侧的水听器来测量的, 水听器与发射器之间由几层挡板隔开。

当共振气泡通过声测仪器的探测平面时, 透射声能量急剧地下降, 反射、散

射声出现一个很宽的极大峰，尽管传输损失很明显，该极大值仍与 (2-73) 式



Resonant attenuation and reflection with bubble pulse screen

图 2-5 气泡声学特性的观测结果

预言的声波散射能量一致。图 2-4 给出了透射和反射的情况，图中曲线给出了

透射和反射随时间变化的函数关系，实验时以产生气泡脉冲为计时起点，气泡脉冲持续时间为 1 秒，气泡发生器位于声测仪器下方 6ft 处，曲线同时给出了各时刻到达的气泡的半径，这些半径值是直接用可见的方法测量的。图 2-4 中的上图给出三次测量的透射声，声波频率为 20kc，可见

三次测量值彼此重叠。该图中出现的共振峰与方程 (2-18) 得到的理论值 0.017 符合得相当好。而下图给出了 20kc 时一次测量的反射声，反射系数是通过测量气泡幕处入射声波与反射水听器测量的声波的区别而得到的，反射水听器距离气泡幕中心 2.5ft。

对气泡脉冲的声学测量显示出与理论预言相当一致。图 2-5 给出共振气泡典型的观察结果，上图是在传感器深度上每立方厘米内的气泡总数，因每一时刻气泡半径分布与单个气泡的共振峰宽度相比而言较小，所以任一时刻所有的气泡可以认为具有相同的大小。中图连续的曲线是由 (2-53) 式预言的通过气泡幕的衰减，其中各量如下确定：气泡密度取自于上图，气泡幕的厚度由实验测定， $\sigma_s$  是在方程 (2-43) 中让  $f$  等于  $f_r$  得到的， $\delta_r$  取自于图 2-2。每一个频率下观察的平均传播损失由圈点表示，其竖直线表示观测数据的分布范围。这些实验数据点基本是通过气泡幕的声波的最衰减。如在图 2-5 的中图里，20kc 下观察到的共振传播损失约为 14db。

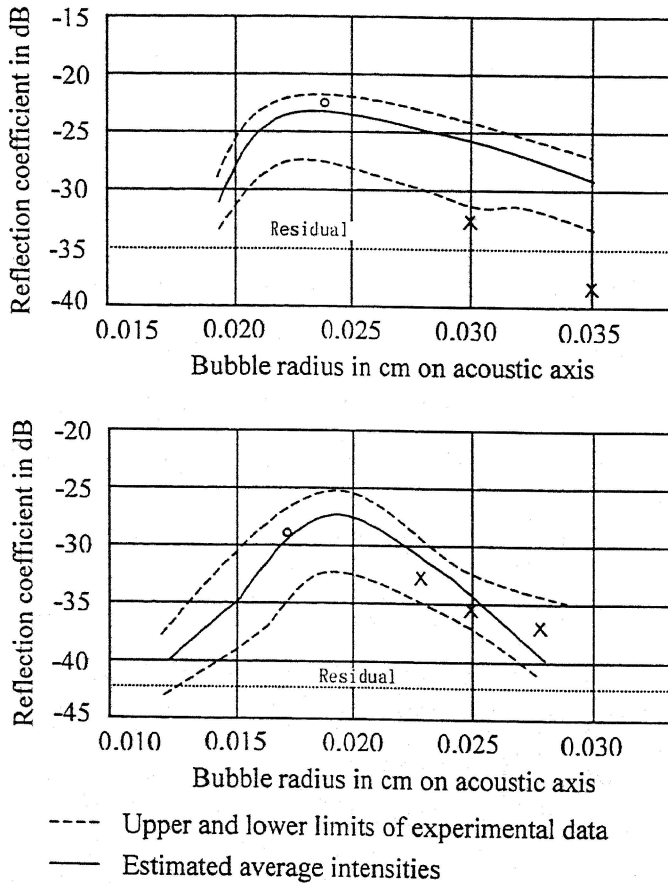
图 2-5 中下图是共振气泡的反射或散射声强度。为了计算共振气泡的反射，首先从公式 (2-86) 得出镜面反射，其中  $b$  是在所有气泡为共振尺寸下估算的结果，同理利用 (2-76) 式计算了散射声。共振时  $\eta_r$  的值取自于方程 (2-23)，而  $\delta_r$  取自于图 2-2，在计算散射声时必须考虑气泡幕的尺度及其到气泡发生器以及水听器的距离。图 2-5 中的实线表示理论计算结果，在 10kc 下，反射是最重要的因素，而在 30 kc 下散射占主导地位。

对于非共振气泡也可做类似的对比，因在计算  $\delta_r$  的值时已经用到了共振曲线的宽度，此时传播损失的测量结果已不重要，当气泡尺度远离共振区时，其传播损失较小，可利用 (2-75) 式来计算其散射声，但需做相应的几何位置修正，用到的  $\sigma_s$  值可从 (2-34) 式得到。从非共振气泡的镜面反射可以忽略。观察到的数据曲线如图 2-6 所示，其中“×”号表示对于非共振气泡的计算值。观察结果的分布在图中用虚线画出，而实线表示估计的平均强度。“○”表示对

共振气泡的散射和反射的预见，这在上面已经讨论过。点线给出的是在无气泡时反射水听器测量的声强。

显然，图 2-5、6 中理论和观测结果的一致性并不坏。值得注意的是对非共振气泡散射发语言非常可靠，因为理论值与衰减系数无关，因此可得出这样的结论：观测结果与理论在实验误差范围内是一致的，本节得出的方程可做实际用途。

对连续流气泡幕的测量也有报道，体现出理论与实验的一致性较差。观测到



Scattering and reflection bubble pulse screen.

图 2-6 气泡幕对声波的散射和反射

的传播损失很少超过 25db，但理论预言的传播损失在 50~200db 之间。因为折射效应在气泡幕周围起着重要作用，所以要观察到如此大的传播损失值得怀疑，而且，在连续流的气泡幕中较小气泡要比较大气泡散步区域大，在较低的超声