

频率下该小气泡幕将不吸收声，但会使声速减小，因此将会使气泡幕周围的声线弯曲。

而且，对于连续流气泡幕反射系数的预言比观测值大 5~15db，这一理论预言的较大反射系数在考虑到此种情况下气泡幕没有明显的边界时可修正到接近观测值。

这些实验没有能够解答的一个重要问题是，远离共振区气泡所引起的吸收问题。这一非共振吸收依赖于  $\delta$  随气泡半径以及声波频率的波动。对气泡脉冲的测量显示非共振气泡的吸收通常小于共振气泡吸收的 5%，但在尾流中出现的非共振气泡的吸收起重要作用也并不是不可能的。

## 第三章 气泡运动规律 及其高速摄影技术研究

海水中有以各种形式存在的空气泡,更一般地说气泡。由于波浪的破碎,在紧贴海面之下会产生大量的气泡,并会被湍流卷入海面以下。气泡也可能存在于某些生物机体之内,例如鱼类的鱼鳔。气泡还发生于船舶的尾流中,而且尾流中的气泡能保留很长时间。因为较大的气泡由于福利的作用而会很快就上升到海面,所以海水中自由的气泡非常小。

### 3.1 海水中气泡的密度

由于海浪的破碎而产生的气泡,这些气泡在海水的浅表,它们在许多海洋学过程中起着作用。如液滴喷射、气体交换、有机粒子的形成、细菌的传播、化学物质的分馏、声波的行进和散射以及激光的行进与散射等。对气泡的数量以及线度分布的研究,文献报导的有三种方法,包括声学技术、气泡陷阱(Bubble Trap, BT)和照相方法。Medvin 利用声学技术发现,在低风速、深度为 14m、水温为 13℃时,单位体积每  $1\mu\text{m}$ (即  $\Delta R=1\mu\text{m}$ ) 半径宽度的气泡数量  $n(R)$  随半径  $R$  的变化近似的满足关系

$$n \sim R^{-4} (R < 80\mu\text{m}) \quad ; \quad n \sim R^{-2} (R > 80\mu\text{m}) \quad (3-01)$$

而气泡数量  $n$  与深度  $z(\text{meter})$  的关系为

$$n \sim R^{-1/2} (R \geq 60\mu\text{m}) \quad ; \quad n \sim e^{-z/17} (R < 60\mu\text{m}) \quad (3-02)$$

Blanchard 和 Woodcock 等利用 BT 技术对深度为 25m、温度为 14℃条件下的气泡进行了研究,并在研究过程中对气泡发生器进行遥控操作,遥控距离达 60~70m.

Medwin 首次利用照相方法测量气泡的数量及其线度分布,后来有人进行了更为系统的研究。结果发现,测量区域的深度随气泡线度的增大而增加;气泡线度为 17~300  $\mu\text{m}$  时,被照相的样品体积为 30~600  $\text{cm}^3$ .

粗略地, Kolovayev 和 Johnson 等的研究结果是,海面附近,气泡量随深

度呈指数规律减少；而在较深处，气泡量随深度按幂函数规律递减；随着风速的增加，气泡量的增加要强于白浪覆盖面的增加。关系如下

$$\begin{aligned} N/N_0 &= e^{-z} & z < 3m \\ N/N_0 &= 0.9z^{-2.6} & z > 3m \end{aligned} \quad (3-03)$$

$$N \sim U^{4.5}$$

式中  $N$ 、 $N_0$ 、 $z$ (meter)、 $U$  分别表示深度为  $z$  时的气泡密度、表面的气泡密度、以米为单位的深度、风速。他们还指出，气泡的溶解、膨胀、结合等效应也起着重要作用，这些效应大都是较小的气泡减少数量。小气泡的溶解直接使得其数量减少，同时，膨胀效应间接地减少其数量而使得大气泡的数量相对地增加。

利用激光全息技术，研究表明半径在  $10 \sim 15 \mu\text{m}$  区间，每  $1 \mu\text{m}$  半径宽度对应的气泡数密度可达  $10^6/\text{m}^3$ 。

关于气泡密度的知识对许多学者来说都非常重要，包括水下声学家、流体力学家、海洋生物学家、化学海洋学家和气象学家。之所以能引起如此大的兴趣，是因为：气泡是有效的声波的散射体和吸收体；它们也是海水中的主要声源；它们在声换能器和螺旋桨叶片上充当空化核；对于海洋岩片、有机物、细菌和微量金属它们起着清道夫的作用；它们参与海洋表面的气体交换；它们还产生使气体沉积和云雾形成的雾气。对其光学研究的主要方法有照相技术、激光散射技术和激光全息术，不论是粒子还是气泡沫，光学散射截面(散射光强度与入射光强度之比)都近视等于其几何截面，所以散射技术很难辨别气泡与粒子。相比较，共振时气泡的声学散射截面是其几何截面的 500 倍，粒子的散射截面是其几何截面的  $10^{10}$  倍。

## 3.2 气泡的动力和运动学

### 3.2.1 气泡的一般运动规律

物体在流体中运动，受到流体的两种作用力，一种是摩擦力，另一种是压力。物体运动所受的阻力也可以归结为由摩擦引起的阻力和由压力差产生的阻力。比较小的物体在粘性较大的流体中缓慢地运动，换句话说在雷诺数比较小的情况下，作用于物体表面的摩擦阻力，是产生组阻力的主要因素，这部分阻力叫做粘滞阻力。对于形状比较简单的物体，可以通过计算把阻力求出来，其中比较著名的是球形物体在流体中所受的粘滞阻力公式，即

$$f = 6\pi\eta v R \quad (3-04)$$

$R$  为球面半径,  $v$  为球体运动速度,  $\eta$  为粘滞系数。这个公式叫做斯托克斯公式, 只有在雷诺数比 1 小很多时才是正确的。

作用于运动物体各部分的压力的合力形成压差阻力, 当物体运动速度加大, 以至物体后面出现漩涡时, 压差阻力便成为主要的阻力。压差阻力来源于流体的粘性, 压差阻力和物体的形状有关, 改变物体的形状可以减少压差阻力。

忽略气泡内部运动, 静水中小气泡 ( $R < 150 \mu\text{m}$ ) 的动力学方程为

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\rho_w - \rho_a}{\rho_a} g - \frac{3\rho_w C_d v^2}{8\rho_a R} \quad (3-05)$$

$v$ 、 $t$ 、 $\rho_w$ 、 $\rho_a$ 、 $g$ 、 $C_d$  分别表示上升气泡的速度、时间、空气和水的密度、重力加速度、阻力系数, 阻力系数由雷诺数 (Reynolds number) 确定

$$C_d = \frac{24(1 + 0.15 \text{Re}^{0.687})}{\text{Re}} \quad (3-06)$$

Re 表示雷诺数, 定义为

$$\text{Re} = \frac{\rho_w v R}{\eta_w} \quad (3-07)$$

$\eta_w$  表示水的粘滞系数。

对于大气泡, 它们的形状通常要发生扭曲畸变而不再是球形。当半径在  $1000 \mu\text{m}$  以上时, 气泡的运动不再稳定而且不再是其半径的函数, 计算这些气泡的速度是很难的。然而, 实验观察到它们上升的速度接近  $30\text{cm/s}$ 。

### 3.2.2 流体力学对气泡上升速度的求解

#### 3.2.2.1 一般小气泡的末速度

后面将要用到的表达式

$$\begin{aligned} \text{Eotvos number } Eo &= \frac{g\Delta\rho R^2}{\sigma} \\ \text{Morton number } M &= \frac{g\eta_w^4 \Delta\rho}{\rho_w^2 \sigma^3} \\ \Delta\rho &= \rho_w - \rho_a \\ \kappa &= \frac{\eta_a}{\eta_w} \end{aligned} \quad (3-08)$$

其中  $\rho_w$ 、 $\rho_a$ 、 $\kappa$ 、 $\eta_w$ 、 $\eta_a$ 、 $\sigma$  水和气泡内气体的密度、气体与水的粘滞系数之比、水和气体的粘滞系数、水的表面张力系数。从流体力学理论来看, 对于水中的气泡,  $\kappa$  非常小, 对气泡的内部环流而言粘滞阻力很小, 所以阻力和末速度与表面活性剂的存在有密切的关系。在纯净水中, 当气泡半径  $R > 1.3\text{mm}$ , 其末速度近视为

$$V_t = \left( \frac{2.14\sigma}{\rho_w d_e} + 0.505gd_e \right)^{1/2} \quad (3-9)$$

其中  $d_e$  表示气泡的等效直径。Aybers 和 Tapucu 测量了水中气泡的积累情况, 发现当表面活性因素在气泡上升过程中持续存在时, 气泡的末速度将超出上式给出的值。

考虑到污染的影响, Grace 等人把几种类型的关系应用于大量实验数据, 得到有关污染系统和纯净系统的结论。对于污染系统, 当

$$M < 10^{-3} \quad , \quad Eo < 40 \quad , \quad Re > 0.1$$

时, 有如下的结果

$$\begin{aligned} J &= 0.94H^{0.757} & (2 < H \leq 59.3) \\ J &= 3.42H^{0.441} & (H > 59.3) \end{aligned} \quad (3-10)$$

其中

$$\begin{aligned} H &= 4EoM^{-0.149} \left( \frac{\eta_a}{\eta_w} \right)^{-0.14/3} \\ J &= ReM^{0.149} + 0.857 \end{aligned} \quad (3-11)$$

在 Braida 的实验中, 水的粘滞系数取  $0.0009\text{kg/ms}$ 。由上面的结果, 可将末速度写成无量纲量  $J$  的显函数

$$V_t = \frac{\eta_a M^{-0.149} (J - 0.857)}{\rho_a R} \quad (3-12)$$

由此式预言的末速度与测量值之间的均方根偏差为  $15\%$  ( $H \leq 59.3$ )、 $11\%$  ( $H > 59.3$ )

对于纯净系统

$$(V_t)_{pure} = \left( 1 + \frac{\Gamma}{1 + \kappa} \right) V_t \quad (3-13)$$

式中常数  $\Gamma$  需要通过实验来确定。

### 3.2.2.2 中等大小气泡的附加运动

除了上升之外,水中中等大小的气泡还参与了两种形式的附加运动:

- ① “刚体”型的滚动,或者沿之字形、螺旋形轨迹的运动;
- ② 形状的变化和膨胀,即气泡的振荡。

这些形式的运动常常是同时存在的,中等大小气泡的运动情况非常复杂。对于形变的气泡,报道的理论和数值计算非常少。但是有一种简化模型,假定气泡是完美的椭球状,再考虑到其附加运动,所预言的结果相当地符合实验结果。在假定介面无污染的条件下,阻力系数为

$$C_d = \frac{48f_1(e)}{Re} \cdot \left( 1 + \frac{f_1(e)}{Re^{1/2}} \right) \quad (3-14)$$

式中第一项来源于无旋流通过扁平椭球面时的粘滞能量损耗,第二项来源于边界层和尾流的消耗。其中  $f_1(e)$  是偏心率  $e$  的一次函数,由偏心率唯一地决定。

### 3.2.2.3 大气泡的理论

大气泡的形状不能够精确地预言,其末速度可通过观察到的形状计算得到。对于大气泡,忽略其表面张力,只考虑其顶点附近的水流,则表面压强分布可由白努力(Bernoulli)理论求得。对球冠而言,压强满足关系

$$p_s - p_0 = \pm ga\rho_w(1 - \cos\theta) - \frac{9}{8}\rho_w V_i^2 \sin^2\theta \quad (3-15)$$

其中  $p_0$  是顶点 ( $\theta=0$ ) 处的压强,  $p_s$  为表面上任一点的压强,  $\theta$  为该点半径方向与竖直轴的夹角,正负号分别用于向上或向下运动的球冠,  $a$  是球冠的半径。当雷诺数足够大 ( $>100$ ) 时,由于缓慢运动的内部边界层的作用,球冠的表面压强分布可表示为

$$p_s - p_0 = \pm ga\rho_w(1 - \cos\theta) \quad (3-16)$$

让上两式相等即得末速度

$$V_i^2 = \frac{8ga\Delta\rho(1 - \cos\theta)}{9\rho_w \sin^2\theta} \quad (3-17)$$

上式不能应用于整个球冠，但是当  $\theta \rightarrow 0$  时，末速度可以简化为

$$V_i = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{ga\Delta\rho}{\rho_w}} \quad (3-18)$$

这是著名的 Davis-Taylor 方程。

对椭球冠形的气泡，可类似地得到

$$V_i = f(e) \sqrt{\frac{gb\Delta\rho}{\rho_w}} \quad (3-19)$$

$b$ 、 $e$  分别是竖直半轴和偏心率，而  $f(e)$  由下式确定

$$\begin{aligned} f(e) &= \frac{\sin^{-1} e - e\sqrt{1-e^2}}{e^3} && \text{扁球面} \\ f(e) &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{e^3} \cdot [e - (1-e^2)\tanh^{-1} e] && \text{长球面} \end{aligned} \quad (3-20)$$

另外，Collins 利用微扰分析方法得到了大气泡末速度的一种二阶近视表达式

$$V_i = 0.625 \sqrt{\frac{\bar{a}ga\Delta\rho}{\rho_w}} \quad (3-21)$$

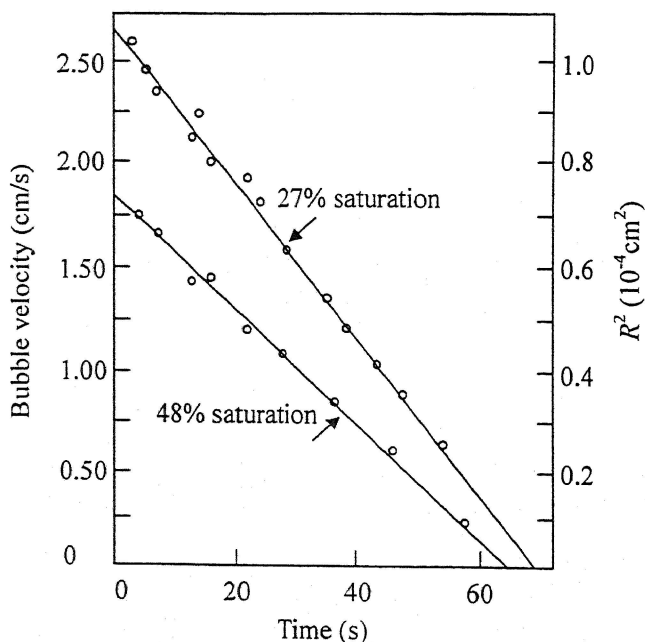
$\bar{a}$  为从  $\theta=0$  到  $\theta=37.5^\circ$  椭球面曲率半径的平均值。

Leonard Liebermann 在对水中的研究中指出，自由上升气泡的速度随时间线性地减小，而其末速度正比于其半径的平方，因而半径的平方也会随时间线性地减小。他的实验观测结果如图 3-1 所示。

为了得到气泡末速度与半径之间的关系，他使用了 Stokes 公式，该公式给出球形气泡在流体中运动的规律，给出的末速度与半径的关系如下：

$$v = \frac{2}{9} \frac{gR^2(\rho - \rho')}{\eta} \quad (3-22)$$

公式中的  $(\rho - \rho')$  表示球体内外的密度差,  $\eta$  为粘滞系数,  $g$  为重力加速度,  $R$  为气泡半径。Stokes 公式适用于刚性或者具有极端粘性的边界情况, 而假定气-水界面的气泡是刚性的并不合理。Ryczynski 对粘滞边界情况下的 Stokes 公式进行修正, 得到了下面的公式



Observation of the velocity of rise (and solubility) of two individual free bubbles. The bubble radius  $R$  given on the right column is derived from the velocity observations by Stokes' equation. The degree of saturation of the water is the ratio of actual air concentration to saturation concentration

图 3-1 L. Liebermann 观测得到的气泡上升速度与时间的关系

$$v = \frac{2gR^2(\rho - \rho')(3\eta' + 3\eta)}{9\eta(3\eta' + 2\eta)} \quad (3-23)$$

公式中  $\eta'$ 、 $\eta$  分别是空气和水的粘滞系数。因为比值  $\eta'/\eta$  的数量级为  $10^{-2}$ , 修正式中多出部分的值近似为 1.5, 也就是说, 流动性可能会是使 Stokes 速度增加 1.5 倍。

Boussinesq 对上述公式提出了异议, 他认为正确的末速度应是在上述两个

表达式之间, 即比 Stokes 速度大 1~1.5 倍。

在溶解有饱和气体的水的表层, 球形气泡直径的减小速度有如下规律: 减小速度随深度的增加而增大, 从深度为 5m 时的  $8 \times 10^{-5} \text{cm/s}$  增加到深度为 100~200m 时的  $18 \times 10^{-5} \text{cm/s}$ , 超过这个深度区减小速度没有更明显的增加。实验表明, 半径为 0.1cm(3kc 声波的共振尺寸)的气泡, 大约在 20 分钟内会完全溶解。如果尾流中起始气泡的线度(半径)  $\geq 10^{-2} \text{cm}$ , 则随着较小气泡的收缩, 较大气泡的线度也在减小, 那些最小线度的气泡在尾流形成 20 分钟以后仍然存在。粗略地估计, 用超声频率观察时, 尾流的声学效应能够维持 15~45 分钟, 其光学效应(主要是散射效应)将维持更长时间。

### 3.3 气泡输运方程

#### 3.3.1 气泡输运方程的提出

在可能存在气泡源和气泡衰减源的流动液体中, 气泡分布是位置矢量  $\mathbf{r}$ 、速度  $\mathbf{v}$ 、尺度  $R$  和时间  $t$  的函数。对于球形气泡,  $R$  表示气泡半径; 对于非球形气泡,  $R$  表示等效半径, 这种情况下还可以用几个参量来表示气泡尺度。

假设位置、速度、气泡的半径仅依赖于流体特性和气泡本身的特点, 而与其它气泡的状态无关, 我们可定义一个气泡分布函数  $\psi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, R, t) d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{v} dR$ , 它表示  $t$  时刻  $\mathbf{r}$  附近  $d^3\mathbf{r}$  范围、 $\mathbf{v}$  附近  $d^3\mathbf{v}$  范围、 $R$  附近  $dR$  范围的气泡数量。 $\psi$  满足波尔兹曼输运方程<sup>[2]</sup>, 求解该方程的出发点是单个气泡的行为, 其解描述了气泡整体的平均行为。

这一点来看, 采用拉格朗日观点并定义一个 7 维空间元  $d^7\tau \equiv d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{v} dR$  对于解决问题是很方便的。在时间间隔  $dt$  内,  $(\mathbf{r}, \mathbf{v}, R)$  附近体元  $d^7\tau$  内的气泡移动到  $(\mathbf{r}', \mathbf{v}', R')$  附近新的体积元  $d^7\tau'$  内, 其中带撇号的量对应于时刻  $t+dt$ ,

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r}' &= \mathbf{r} + \mathbf{v}dt + O(dt^2) \\ \mathbf{v}' &= \mathbf{v} + \mathbf{a}dt + O(dt^2) \\ R' &= R + vdt + O(dt^2) \end{aligned} \right\} \quad (3-24)$$

不带撇号的量对应于时刻  $t$ 。伴随着输运, 位移、速度以及半径亦发生变化:

$\mathbf{a}$  为加速度,  $v = dR/dt$  为半径变化率。此即关于时间  $t$  的泰勒方程组。气泡加速度的产生是由于许多因素如重力、浮力、流体对气泡的连带力, 而气泡半径的

变化是由于流体动力压缩、表面张力、气体的扩散。

根据守恒定律:

$$\psi'(\mathbf{r}', \mathbf{v}', R', t+dt)d^7\tau' - \psi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, R, t)d^7\tau = S(\mathbf{r}, \mathbf{v}, R, t)d^7\tau dt + O(dt^2) \quad (3-25)$$

其中气泡增量  $S(\mathbf{r}, \mathbf{v}, R, t)d^7\tau$  是在  $(\mathbf{r}, \mathbf{v}, R)$  附近体元  $d^7\tau$  内气泡的增长速度。当  $dt \rightarrow 0$  时,  $O(dt^2)$  可忽略不计, 将  $\psi'$  按 Taylor 级数展开, 保留到  $dt$  项

$$\psi' = \psi + \frac{\partial \psi}{\partial t} dt + (\mathbf{v} \cdot \nabla_r \psi) dt + (\mathbf{a} \cdot \nabla_v \psi) dt + v \frac{\partial \psi}{\partial R} dt + O(dt^2) \quad (3-26)$$

其中  $\nabla_r \equiv \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$ ,  $\nabla_v \equiv \left( \frac{\partial}{\partial v_x}, \frac{\partial}{\partial v_y}, \frac{\partial}{\partial v_z} \right)$  分别是位矢空间和速度空间直

角坐标表示的梯度算符。

进一步, 将  $d^7\tau'$  展开为  $d^7\tau$  的表达式,

$$d^7\tau' = \left[ 1 + (\nabla_v \cdot \mathbf{a}) dt + \frac{\partial v}{\partial R} dt + O(dt^2) \right] d^7\tau \quad (3-27)$$

将(3-26)、(3-27)式代入(3-25)式, 并取极限,

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_r \psi + \mathbf{a} \cdot \nabla_v \psi + v \frac{\partial \psi}{\partial R} = S - \Sigma_i \psi \quad (3-28)$$

其中

$$\Sigma_i = \nabla_v \cdot \mathbf{a} + \frac{\partial v}{\partial R} \quad (3-29)$$

$$-\infty < x, y, z < +\infty, \quad -\infty < v_x, v_y, v_z < +\infty, \quad -\infty < R < +\infty$$

(3-28) 即气泡输运方程。如果用  $\mathbf{v}\psi$ 、 $\mathbf{a}\psi$  和  $v\psi$  表示气泡在速度空间、加速度空间和半径空间的流量, 则

$$\mathfrak{R} \equiv - \left[ \nabla_r \cdot (\mathbf{v}\psi) + \nabla_v \cdot (\mathbf{a}\psi) + \frac{\partial (v\psi)}{\partial R} \right] \quad (3-30)$$

表示流入七维空间体元  $d^7\tau$  的净流量。因为  $d^7\tau$  内  $\psi$  随时间的变化率是由这一气

泡流量以及其它气泡源所决定，所以有  $\frac{\partial \psi}{\partial t} = \mathfrak{R} + S$ 。利用恒等式

$\nabla_{\mathbf{v}} \cdot (\mathbf{a}\psi) = \mathbf{a} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} \psi + \psi \nabla_{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{a}$ ，再考虑到  $\mathbf{r}$ 、 $\mathbf{v}$  是独立变量 ( $\nabla_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{v} = 0$ ) 即可得 (3-28)

式。

在气泡输运方程中， $\Sigma_i$  与  $\mathbf{a}$ 、 $\nu$  相联系，通常是非零项。从数学角度来看， $\Sigma_i \neq 0$  将使体元  $d^7 \tau'$  在时间间隔  $dt$  内有显著的变化。从物理角度来看，(3-28) 式右边的第二项将依赖于  $\mathbf{a}$  和  $\nu$  的函数形式而成为伪气泡源或衰减源。

如假设  $\mathbf{a}$  正比于  $(-\mathbf{v})$ ，此时  $\nabla_{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{a} < 0$ ，气泡的速度将减小到速度区间  $d^3 \mathbf{v}' = (1 + \nabla_{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{a} dt) d^3 \mathbf{v}$ ，这将增加气泡密度，从而  $[-(\nabla_{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{a})\psi]$  一项看像是气泡“源”。类似地，如假定  $\nu$  正比于  $v_z R$ ，这样  $\partial \nu / \partial R$  正比于  $v_z$ ；因  $v_z > 0$ ，气泡半径会增加，使得气泡半径增加到较大的半径区间  $dR' = \left(1 + \frac{\partial \nu}{\partial R}\right) dR$ ，这将减小气泡密度，从而  $\left(-\frac{\partial \nu}{\partial R} \psi\right)$  一项看像是衰减“源”。

(3-28) 式右边第一项  $S$  表示分散的气泡源或衰减源，除了外部的气泡源或衰减源之外，这一项还包括小范围紊流旋涡所散射出的气泡以及气泡与气泡的相互作用等效应。当紊流旋涡与气泡的尺度为同一数量级时，被流体拖带的气泡有可能被散射出来。为了定量解决这一现象，可定义一个紊流散射截面  $\Sigma_s$ ，这样

$$\Sigma_s(\mathbf{r}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}, R_1, R, t) \nu_1 \psi(\mathbf{r}, \mathbf{v}_1, R_1, t) d^3 \mathbf{v}_1 dR_1 d^7 \tau$$

表示时刻  $t$ ，由分布在  $\mathbf{r}$  附近  $d^3 \mathbf{r}$ 、 $\mathbf{v}_1$  附近  $d^3 \mathbf{v}_1$ 、 $R_1$  附近  $dR_1$  区间内的气泡通过紊流旋涡的散射而进入  $\mathbf{v}$  附近  $d^3 \mathbf{v}$ 、 $R$  附近  $dR$  区间内的可能速率，而

$$S(\mathbf{r}, \mathbf{v}, R, t) = \int \Sigma_S(\mathbf{r}, \mathbf{v}_1 \rightarrow \mathbf{v}, R_1 \rightarrow R, t) v_1 \psi(\mathbf{r}, \mathbf{v}_1, R_1, t) d^3 \mathbf{v}_1 dR_1 \\ - v \psi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, R, t) \int \Sigma_S(\mathbf{r}, \mathbf{v} \rightarrow \mathbf{v}_1, R \rightarrow R_1, t) d^3 \mathbf{v}_1 dR_1 \quad (3-31)$$

表示气泡进入体元  $d^3 \tau$  的净速率。 $\Sigma_S$  的具体形式与紊流场以及气泡旋涡相互作用有关。

将 (3-31) 式带入 (3-28) 式, 即得到全微分气泡输运方程, 如果考虑气泡之间的相互作用, 气泡输运方程是非线性的。为了避免复杂的计算分析, 假定气泡的密度足够低, 气泡与气泡的相互作用可忽略不计, 同时假定小规模紊流的能量小到可以忽略, 这样气泡被流体部分拖带而不出现速度与半径的突变。

### 3.3.2 气泡输运方程的特征解

一阶偏微分方程 (3-28) 式与下列带初始条件的一阶常微分方程是等价的:

$$d\mathbf{r}/dt = \mathbf{v}, \quad -\infty < x, y, z < +\infty \quad \mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0); \quad 3-32a$$

$$d\mathbf{v}/dt = \mathbf{a}, \quad -\infty < v_x, v_y, v_z < +\infty \quad \mathbf{v}(t_0) = \mathbf{v}_0 = (v_{x0}, v_{y0}, v_{z0}); \quad 3-32b$$

$$dR/dt = v, \quad 0 \leq R < +\infty \quad R(t_0) = R_0; \quad 3-32c$$

$$d\psi/dt = S - \sum \psi, \quad 0 \leq \psi < +\infty \quad \psi(t_0) = \psi_0. \quad 3-33$$

Garabedian P R 利用几何方法明确地陈述了这些特征方程和气泡输运方程的一致性。通过对方程 (3-32)、(3-33) 进行积分, 可得九维空间,

$$\text{SPA}(t) \equiv [t, x(t), y(t), z(t), v_x(t), v_y(t), v_z(t), R(t), \psi(t)], \quad -\infty < t < +\infty$$

在该空间里用参量表述的曲线可称为“特征曲线”, 初始点  $\text{SPA}(t_0)$  的元素称为“特征值”。

特征曲线要受到初始条件  $(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0, R_0)$  的参量化, 因为  $t_0$  和初始分布函数  $\psi_0(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0, R_0)$  对于给定的问题通常是确定的。 $\mathbf{a}$ 、 $v$ 、 $S$  通常是  $\mathbf{r}$ 、 $\mathbf{v}$ 、 $R$ 、 $t$  的函数, 因此方程 (3-32、33) 不仅是时间  $t$  的函数, 而且都依赖于这些初始条件。

如果气泡源  $S(\mathbf{r}, \mathbf{v}, R, t)$  具有 (3-31) 式表示的形式, 那么 (3-28) 式类似于波尔兹曼关于中性或带电粒子在分布有气泡源的纯吸收介质中的输运

方程。例如，中子在被吸收或逸出介质前，其特征曲线在  $(x, y, z)$  空间呈一直线。与此类似，(3-28) 式所描述的气泡在消失 ( $R \rightarrow 0$ ) 或逸出介质前在  $(\mathbf{r}, \mathbf{v}, R)$  空间其特征曲线也呈一直线。然而由 (3-32) 式所定义的特征曲线在  $(\mathbf{r}, \mathbf{v}, R)$  空间或其子空间 (如  $x, y, z$  空间) 通常并不是直线。

假设气泡源  $S$  独立于  $\psi$ ，或者至多正比于  $\psi$ ，则有下面的表达式

$$S = S_1 + \Sigma_1 \psi$$

其中  $S_1$  为与  $\psi$  无关， $\Sigma_1$  是由  $\mathbf{r}$ 、 $\mathbf{v}$ 、 $R$ 、 $t$  有关的常数，这一数学简化将产生一个线性的一阶偏微分方程。但这一简化在处理海洋表层的气泡输运问题中通常是可行的，可将所有外在的气泡源如波浪、雨和雪核、有机物的分解、光合作用等都可以考虑进去，而且在气泡散射、吸收等过程的处理模型中也是可行的。

$$\begin{aligned} \psi(t; \mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0, R_0, t_0) &= \psi(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0, R_0, t_0) \exp[T_1(t, t_0) - T_2(t, t_0)] \\ &+ \int_0^t S[\mathbf{r}(t'), \mathbf{v}(t'), R(t'), t'] \exp[T_1(t, t') - T_2(t, t')] dt' \end{aligned} \quad (3-34)$$

根据上式给出的  $S$  的表达式，对 (3-33) 式积分，可得通解：

其中，

$$\begin{aligned} T_1(t, t_0) &= \int_0^t \Sigma_1[\mathbf{r}(t'), \mathbf{v}(t'), R(t'), t'] dt' \\ T_2(t, t_0) &= \int_0^t \Sigma_2[\mathbf{r}(t'), \mathbf{v}(t'), R(t'), t'] dt' \end{aligned}$$

利用方程式 (3-27) 可将上式改写为

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, R, t) d^7 \tau &= \exp[T_1(t, t_0)] \psi(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0, R_0, t_0) d^7 \tau_0 \\ &+ \int_0^t \exp[T_1(t, t_0)] S(\mathbf{r}', \mathbf{v}', R', t') d^7 \tau' dt' \end{aligned} \quad (3-35)$$

在利用 (3-35) 式计算之前，首先应掌握单个气泡的动力学，以便对 (3-32) 式积分得到其特征曲线。关于气泡的运动和动力学问题，加里特松给出了一种基于牛顿运动定律的较为直观的理论，这一理论考虑了水中气泡的受力情况、气泡表面活性物质及水流的影响，得到了气泡加速度的表达式<sup>[4]</sup>。

### 3.3.3 单个气泡的运动学

关于气泡的运动和动力学问题, Garrettson 给出了一种基于牛顿运动定律的较为直观的理论, 这一理论考虑了水中气泡的受力情况、气泡表面活性物质及水流的影响, 得到了气泡加速度的表达式。

### 3.3.3.1、气泡的加速度

对于单个气泡而言, 它在水中的运动情况受很多因素的影响, 这些因素包括水的流速、水的粘滞特性、气泡的尾流特性、气泡的惯性等。如果分别用  $\mathbf{v}$ 、 $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$  来表示气泡速度和水的流速 (其中  $\mathbf{r}$  表示位置矢量,  $t$  表示时间), 气泡体积  $C$ 、气体密度  $\rho$ 、水的密度  $\rho_0$ , 如果气泡完全受水支配, 即  $\mathbf{v} = \mathbf{V}$ , 气泡将受到一个力  $\rho_0 C \frac{d\mathbf{V}}{dt}$ 。对于更为一般的情况, 气泡内气体的密度与其所在流体的密度可能相等或者不等, 如果  $\rho \neq \rho_0$  即气泡不为流体所完全支配, 此时气泡相对于流体的速度为  $\mathbf{u} = \mathbf{v} - \mathbf{V}$ , 气泡将受到一个拉力  $\mathbf{F}_D$ , 这一力下面进一步讨论。

在气泡运动过程中, 它将要带着一部分水 (用  $\beta$  表示所带水量与气泡的体积比) 共同运动, 根据牛顿第三定律, 这一附加质量将引起一个附加项  $(-\beta C \rho_0 d\mathbf{u}/dt)$ , 这一项使得气泡的有效惯性质量增加。此外, 气泡受到一浮力  $Cg(\rho - \rho_0)\hat{\mathbf{k}}$ , 在此  $\hat{\mathbf{k}}$  表示竖直向上方向的单位矢量。考虑到所有这些因素, 根据牛顿第二定律, 气泡的加速度可表示为:

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}_D}{C\rho_0(\beta + \rho/\rho_0)} + \frac{(1 + \beta)d\mathbf{V}/dt}{\beta + \rho/\rho_0} + \frac{(1 - \rho/\rho_0)g\hat{\mathbf{k}}}{\beta + \rho/\rho_0} \quad (3-36)$$

其中

$$d\mathbf{V}/dt = \partial\mathbf{V}/\partial t + (\mathbf{v} \cdot \nabla_r)\mathbf{V} \quad (3-37)$$

### 3.3.3.2、气泡在水中所受的阻力

正因为理论和时间两方面的重要性, 气泡在水中的运动得以被研究。气泡可以根据雷诺数 (Reynolds number) 进行划分。观察和实验表明, 小气泡 ( $Re < 1$ ) 和中等尺寸的气泡 ( $1 < Re < 700$ ) 保持为球形, 而大气泡 ( $Re > 700$ ) 要发生形变而变为椭球形, 特大气泡 ( $Re > 4500$ ) 则不稳定且易破裂。

对于水中的小气泡 (气泡线度  $R \leq 100 \mu\text{m}$ ), 所受力为粘滞阻力, 可表示为

$$\mathbf{F}_V = -\kappa\eta R\mathbf{u} \quad (3-38)$$

其中  $\kappa$  为比例系数, 对于表面为理想球面、干净、具有流动双流界面的气泡,  $\kappa = 4\pi$ 。然而, 在大多数情况下, 其表面包含有表面活性物质, 这会破坏其界面的流动性, 在这种情况下, 气泡表面的水的相对速度趋近于零, 气泡的行为像刚性球一样, 这时  $\kappa = 6\pi$ 。

而对于中等尺寸 ( $100\mu\text{m} \leq R \leq 2000\mu\text{m}$ ) 的气泡, 通过它的水流会被分开, 在气泡表面的下游这一分开区域的面积我们用  $s_1$  表示。在分开点以上, 气泡所受的阻力为粘滞力, 作为合力的一部分由 (38) 式给出, 其中取  $\kappa = 12\pi$ ; 而在分开点以下直至气泡的尾流区, 水流为紊流或湍流, 这一部分的阻力可由下式给出:

$$F_T = -0.5D_c\rho_0s_1uu \quad (3-39)$$

式中  $D_c$  是阻力系数, 对于  $200 < \text{Re} < 1000$  的气泡,  $0.55 \leq D_c \leq 0.65$ 。

在没有表面活性物质的情况下,  $s_1$  非常小 (对于  $\text{Re} \gg 1$  的情况,  $s_1 \sim R^2/\text{Re}$ ) 流过气泡的水流基本不被分开, 此时阻力可由 (3-38) 式给出, 其中取  $\kappa = 12\pi$ 。另一方面, 当气泡的一部分表面积  $s_0$  覆盖有单层的表面活性物质时, 这一部分的相对流速等于零, 该情况下让 (3-39) 式中  $s_1 = s_0$ , 与 (38) 式一起给出气泡的阻力。

以下对影响气泡运动规律及分布规律的两个因素—气泡半径的变化以及气体扩散进行分析。

### 3.3.3.3 半径变化率

气泡在流体如水中运动时, 其半径的变化是由于压强的变化、深度或表面张力的变化、气泡表面气体的扩散引起的。包含  $n$  摩尔温度为  $T$ 、压强为  $P$  的理想气体的球形气泡 ( $\text{Re} \leq 700$ ) 满足理想气体状态方程

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = niT/P \quad (3-40)$$

其中  $i$  是普适气体常数。对于等温过程, 对上式微分可得

$$v = \frac{dR}{dt} = \frac{R}{3} \left( \frac{dn}{ndt} - \frac{dP}{Pdt} \right) \quad (3-41)$$

$dn/dt$  反映了气体的扩散,  $dP/dt$  反映了压力和表面张力的变化。在准静态过程,

$$P = P_0 - \rho_0gz + 2\sigma/R \quad (3-42)$$

气体压强是大气压  $P_0$ 、表面张力的增压  $2\sigma/R$  和流体内部压力  $(-\rho_0gz)$  之和 (其中  $z \leq 0$  是气泡所在深度,  $\sigma$  是表面张力系数,  $\rho_0$  为水的密度):

由此可得

$$\frac{dP}{dt} = -\rho_0 g v_z - \frac{2\sigma dR}{R^2 dt} \quad (3-43)$$

### 3.3.3.4 气体扩散

气体扩散在气泡的分布规律中是一个很重要的因素, 由于气泡中气体的种类、流体中气体的扩散率  $D$ 、与气泡表面接触的流体中气体的密度  $\rho$ 、远离气泡的流体中气体的密度  $\rho_\infty$ 、流体中和气泡表面表面活性物质的存在、气泡周围的流场和气泡半径等的影响, 使其成为一种复杂现象。为了简化问题, 假设气泡中气体是一种气体, 具有平均的分子量和单一的扩散系数。

如果 Péclet 数  $Pe$  大 ( $Pe \equiv uR/D \gg 1$ ), 气体密度梯度局限在气泡表面附近的薄层内, 扩散系数  $\rho$  和  $\rho_\infty$  之间的关联响应地出现在一个小距离  $d \sim R/Pe^{1/2}$  内, 因此

$$\frac{dn}{dt} = -GR^2(\rho - \rho_\infty) \quad (3-44)$$

其中系数  $G$  通常是  $R$ 、 $u$ 、和  $D$  的函数,  $\mathbf{u} = \mathbf{v} - \mathbf{V}$  是相对速度,  $\mathbf{V}$  是流体速度。

$$G = 8 \left( \frac{\pi D u}{6R} \right)^{1/2} \quad (3-45)$$

典型地,  $\frac{\eta}{\rho} D \sim 10^3$  ( $\rho$  气泡内气体密度), 所以在很宽的气泡半径区域内,  $Pe \gg 1$ , 但雷诺数  $Re$  小 ( $Re < 1$ )。对于这种情况 (小气泡), 若没有表面活性物质, 在有表面活性物质的情况下, 气泡表面附近的流场类似于固体球的情况, 这时

当雷诺数为中等大小 (中等大小气泡) 时, 流场要被分开, 但是分开的区

$$G = 8 \left( \frac{D^2 u}{R^2} \right)^{1/2} \quad (3-46)$$

域  $s_1$  通常较小, 如果通过  $s_1$  气体的扩散可以忽略, (3-44) 式表示当  $G$  等于 (3-45) 式乘以  $\sqrt{3}$  时的气体扩散。

如果在压强  $P$  (以大气压为单位, 主要指气泡内的压强) 下, 与气泡表面接触的流体中的气体是饱和的, 则  $\rho = KP$ , 这里  $K$  ( $\text{kgm}^{-3}\text{atm}^{-1}$ ) 是液-气系统的吸收系数。在流体中定义一个气体的分压强  $f = \rho_{\infty}/K$  (以大气压为单位), (3-44)

$$\frac{dn}{dt} = -GKR^2(P - f) \quad (3-47)$$

式可写为

在实验室条件下, Wyman 等测量了被搅拌的海水中的气泡内气体的溶解速度以及气体成分的变化与深度的关系, 这些实验结果与下式表示的规律非常接近

$$\frac{dn}{dt} = -4\pi\delta R^2(P - f) \quad (3-48)$$

其中  $\delta \cong 4.4 \times 10^{-5} \text{molesm}^{-2}\text{s}^{-1}\text{atm}^{-1}$ 。

### 3.3.4 气泡输运方程的应用

考虑一维稳定态海洋, 其中所有速度都沿竖直方向, 所有函数仅仅与深度

$$v \frac{\partial \phi}{\partial z} + a \frac{\partial \phi}{\partial v} + v \frac{\partial \phi}{\partial R} = -\Sigma_i \phi + S \quad (3-49)$$

有关。在这种情况下气泡输运方程简化为:

其中  $\phi(z, v, R)$  是分布函数,  $v = v_z$  是竖直速度,  $a = a_z(z, v, R)$  是竖直加速度,

$$\Sigma_i = \frac{\partial a}{\partial v} + \frac{\partial v}{\partial R}.$$

(3-49) 式的特征方程可以以  $z$  为独立变量并使  $z \leq 0$  给出, 由 (3-32)、

(3-33) 两式可得:

$$\frac{dv}{dz} = \frac{a(z, v, R)}{v}, \quad -\infty < v < \infty; \quad v(z_0) = v_0; \quad (3-50)$$

$$\frac{dR}{dz} = \frac{v(z, v, R)}{v}, \quad 0 \leq R < \infty; \quad R(z_0) = R_0; \quad (3-51)$$

$$\frac{d\phi}{dz} + \frac{\Sigma_i \phi}{v} = \frac{S(z, v, R)}{v}, \quad 0 \leq \phi < \infty; \quad \phi(z_0) = \phi_0(v_0, R_0) \quad (3-52)$$

对 (3-50、51) 两式积分, 即可得特征曲线

$$\{z, v(z; z_0, v_0, R_0), R(z; z_0, v_0, R_0); z \leq 0\} \quad (3-53)$$

气泡轨迹在  $(x, y, z)$  空间为竖直方向的直线。

对 (3-52) 式沿特征曲线积分即可得通解, 其形式类似于 (3-35) 式, 可以利用雅可彼 (Jacobian) 表达式

$$\frac{\partial(v, R)}{\partial(v', R')} = \frac{v'}{v} \exp \left[ \int_{z'}^z \frac{\sum_i (z'', v'', R'')}{v''} dz'' \right] \quad (3-54)$$

$$v\phi(z, v, R)dv dR = v_0\phi(z_0, v_0, R_0)dv_0 dR_0 + \int S(z', v', R') dz' dv' dR' \quad (3-55)$$

导出, 即

如果流体速度为零, 气泡在浮力作用下以某一末速度上升, 也有可能是在收缩的过程中减速, 或者是扩张的过程中加速。那些归属于拉格郎日群 (Lagrangian group)  $(z_0, v_0, R_0)$  的气泡, 其速度随着  $z$  的增加而增大, 因而其空间密度随  $z$  的增加而减小; 另一方面, 那些速度随着  $z$  减小的气泡, 其空间密度随  $z$  的增加而增大。

### 3.3.4.1 特征曲线

要利用 (3-54) 式来计算气泡的分布, 首先要明确  $a$  和  $v$  的形式, 而且对特征曲线 (3-53) 作出求解。利用表达式 (3-40、42、43、47) 可解出半径的变化率  $dR/dt$ , 进一步 (3-51) 式变为

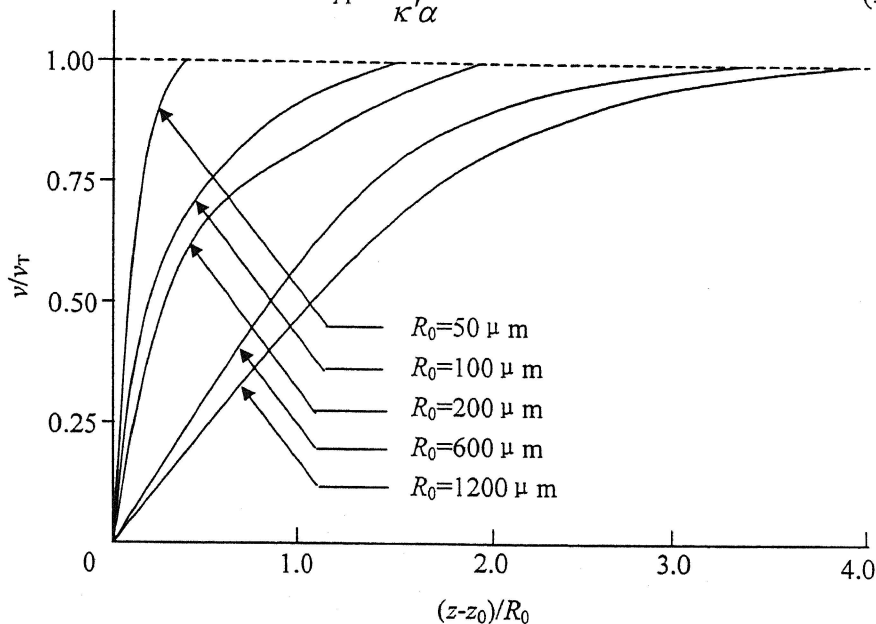
$$\frac{dR}{dz} = \frac{v}{v} = \frac{\frac{1}{3}R - \frac{GK}{4\pi} \left[ D(1-f) - z + \frac{\Gamma}{R} \cdot \frac{1}{v} \right] iT}{D - z + \frac{2\Gamma}{3R}} \quad (3-56)$$

其中  $-z$ 、 $f(z)$ 、 $D \equiv \frac{P_0}{\rho_0 g} \cong 10m$ 、 $\Gamma \equiv \frac{2\sigma}{\rho_0 g} \cong 1.47 \times 10^{-5} m^2$  分别为深度、气-水系统的分压力 (以大气压为单位)、相当于一个大气压的海水深度、水中的表面张力系数。这里应注意的是,  $\Gamma/R$  一项可以忽略不计, 除非气泡非常小 ( $R \leq 30$

$\mu\text{m}$ )。

加速度以及阻力在前面的表达式已明确给出，如果流体速度可忽略不计，即  $V \cong 0$ ，气泡的上升速度非常接近于其末速度  $v_T$ ，这可从图 3-2 看出。图 3-2 是同时对 (3-50、56) 式积分得到的，积分是对于不同的气泡初始半径  $R_0$  进行的，初始深度  $z_0 = -20\text{m}$ 。小气泡 ( $R < 100\mu\text{m}$ )、中等大小气泡 ( $100\mu\text{m} < R < 2000\mu\text{m}$ )，所受力主要是粘滞阻力，其上升末速度  $v_{T1}$  可由下式近似给出：

$$v_{T1} = \frac{g}{\kappa'\alpha} R^2 \quad (3-57)$$



The velocity  $v$  of bubbles starting at rest and rising from an initial depth  $z_0 = -20\text{m}$ . The initial radius is  $R_0$  (in microns), the terminal velocity is  $v_T$ , and  $z - z_0$  is above the release point.

图 3-2 气泡上升速度与气泡半径的关系

其中  $\kappa' = 1$  或  $2$ ，而水中  $\alpha \cong \frac{9\eta}{2\rho_0} \cong 4.37 \times 10^{-6} \text{m}^2/\text{s}$ ，其中  $\eta$  为水的粘滞系数。当

中等大小气泡表面被表面活性物质覆盖的比例—覆盖率  $\varepsilon \cong \frac{s_0}{4\pi R^2}$  足够大时，因为在边界  $s_0$  部分出现分流使紊流阻力比粘滞阻力起更主要作用，可近似得到上升末速度  $v_{T2}$ ：

$$v_{T2} = \sqrt{\frac{g}{\xi}} R \quad (3-58)$$

其中  $\xi \equiv \frac{3}{2} K_f \varepsilon \approx 0.9 \varepsilon$ 。

通常上升气泡的末速度在其整个生存期间简单地由 (3-57) 或 (3-58) 式给出。很多气泡在上升过程中会收缩或者扩张, 所以受力情况会发生变化, 由湍流阻力占主导作用转变为粘滞阻力为主, 或者是相反的转变。Levich 在解决分流问题时提出, 对于解决中等大小气泡的受力问题中, 结合 (3-38) 和 (3-39) 是一个有用的模型。在该模型中利用 (3-36) 式, 方程 (3-50) 式可写成如下形式

$$\frac{dv}{dz} = -\frac{\xi(v-v_-)(v+v_+)}{\beta R v} \quad (3-59)$$

其中

$$v_{\pm} \equiv \frac{\pm 1 + (1 + 4Q^2)^{1/2}}{2Q} v_{T2} \quad (3-60)$$

在该表达式中,  $Q \equiv \frac{v_{T1}}{v_{T2}} = \left(\frac{R}{\tilde{R}}\right)^{3/2}$ ,  $\tilde{R} \equiv \left[\frac{(\kappa'\alpha)^2}{g\xi}\right]^{1/3}$ 。这样的趋近有其合理性,

因 (3-59) 中与  $v$  对应的值同 Datta 等的实验曲线接近, Datta 等人对许多观测结果进行平均得到该实验曲线; 而且, 该模型给出了湍流阻力占主导作用 ( $R > \tilde{R}$ ) 和粘滞阻力为主 ( $R < \tilde{R}$ ) 两种受力情况下的正确结果。

静流体中 ( $\mathbf{V}=0$ ) 特征曲线 (3-53) 的计算较为简单, 因为气泡的速度常常近似地等于其末速度, 即  $v \approx v_T(z, z_0, R_0)$ , 基本不依赖于  $v_0$ ; 无论是 (3-57、58、60) 还是经验公式给出的  $v_T$  值, 都可以应用在 (3-56) 式中得到  $R(z, z_0, R_0)$ ; 如果应用 (3-57) 和 (3-58) 式进行计算, 而且忽略表面张力, 则可以得到近似

的理论表示式；如果进一步忽略气体扩散是影响，则可得到极为简单的近似结果

$$R = R_G(z, z_0, R_0) = \left( \frac{D - z_0}{D - z} \right)^{1/3} R_0 \quad (3-61)$$

### 3.3.4.2 气泡分布

在静流体中上升的气泡而言，下式是一个很好的近似：

$$\phi(z, v, R) = \delta(v - v_T) \Phi(z, R) \quad (3-62)$$

其中  $v_T$  值可以由 (3-57、58、60) 式给出，也可以由经值给出，而

$$\Phi(z, v, R) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \phi(z, v, R) dv \quad (3-63)$$

可称为“半径密度”，表示单位体积内单位半径间隔内的气泡数。将 (3-62) 式代入 (3-55) 式，并对  $v$  积分，可得

$$\Phi(z, R) = \frac{v_{T0}}{v_T} \Phi(z_0, R_0) \frac{\partial R_0}{\partial R} + \frac{1}{v_T} \int_{z_0}^z s(z', R') \frac{\partial R'}{\partial R} dz' \quad (3-64)$$

在表达式中

$$s(z', R') \equiv \int_{-\infty}^{\infty} S(z', v', R') dv'$$

而且在积分过程中还使用了表达式  $dR_0 = \frac{\partial R_0}{\partial R} dR$ ， $dR' = \frac{\partial R'}{\partial R} dR$ 。

对于大多数情况，半径密度可以提供足够多的信息。为了对给定的  $z$  和  $R$  下计算这一函数值，需要对通过点  $(z, R)$  的特征曲线上各点的  $\partial R' / \partial R$ ， $R'$ ， $s(z', R')$  值，以便对 (3-64) 式的积分作出估计。将 (3-56) 式对  $R'$  求偏导数，并且让  $v = v_T$ ，可得到关于  $\partial R / \partial R'$  的微分方程，积分得

$$\frac{\partial R}{\partial R'} = \exp \left[ \int_{z'}^z F(z'', z_0, R_0) dz'' \right] \quad (3-65)$$

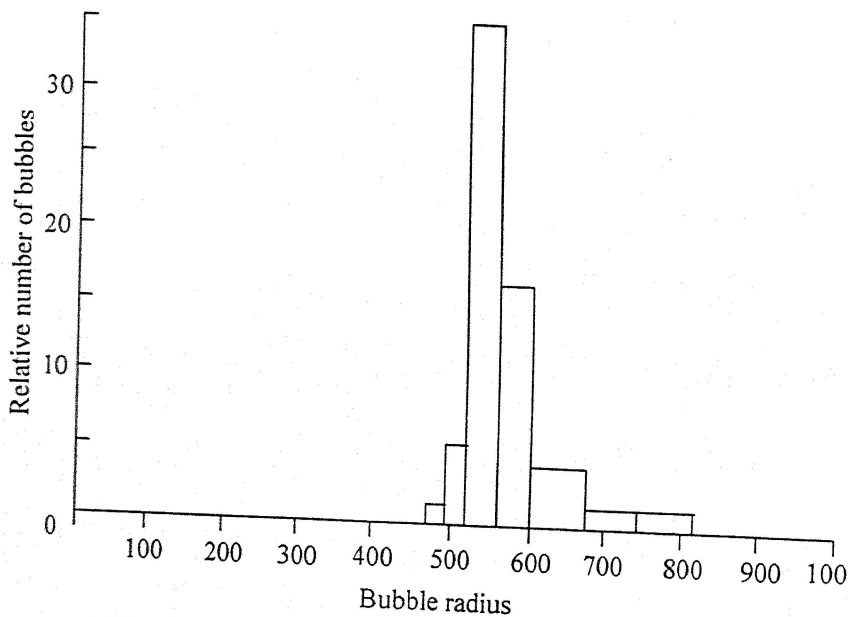
其中

$$F(z, z_0, R_0) = \frac{2\Gamma \left\{ R - \frac{3\delta i T}{v_T} \left[ D(1-f) - z + \frac{\Gamma}{R} \right] \right\}}{R^2 \left[ 3(D-z) + \frac{2\Gamma}{R} \right]^2} + \frac{1 + \frac{3\delta i T}{v_T} \left\{ \frac{\Gamma}{R^2} + \left[ D(1-f) - z + \frac{\Gamma}{R} \right] \frac{\partial v_T}{v_T \partial R} \right\}}{3(D-z) + \frac{2\Gamma}{R}} \quad (3-66)$$

在这里使用了关系式  $\frac{GK}{4\pi} = \text{constant} \equiv \delta$ , 应用近似式 (3-41), 有

$$\frac{\partial v_T}{\partial R} = \frac{3v_{T1}}{R(1+4Q^2)^{1/2}} - \frac{v_-}{R} \quad (3-67)$$

### 3.3.4.3 计算实例



The distribution  $\Phi(z_0, R_0)$  in relative units, of bubbles rising off the bottom of Saanich Inlet, B.C., where  $z_0 = -197\text{m}$  and the bubble radius  $R_0$  is in microns.

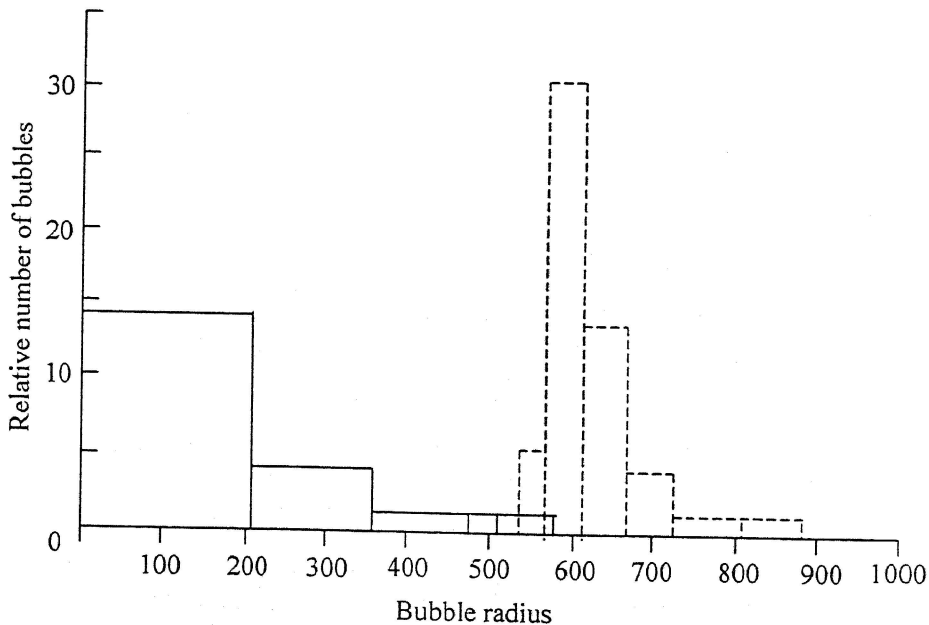
图 3-3 McCartney 和 Bary 推导出的气泡随半径的分布

第一个计算实例: 考虑 McCartney 和 Bary 研究过的情况, 他们用声学的方

法测量了从 Saanich Inlet, B. C. 底部上升的相当大的气泡, 并从上升速度推导出位于底部的气泡源如图 3-3 所示。如果将海洋模型建立为一维的、静态的, 则可利用 (3-64) 式来推出半径密度。体气泡源主要产生小的气泡, 在 McCartney 和 Bary 的测量中没有考虑该气泡源, 所以在计算实例中仅考虑  $z_0 = -197\text{m}$  处的平面气泡源  $\Phi(z_0, R_0)$ , 这样方程 (3-64) 简化为

$$\Phi(z, R) = \frac{v_{T0} \Phi(z_0, R_0)}{v_T} \cdot \frac{\partial R_0}{\partial R} \quad (3-68)$$

利用条件  $f=1$ , 在不同深度 ( $z = -197\text{m}$  到  $z=0$  之间) 半径密度  $\Phi$  及其近似  $\Phi_G$  (忽略气体扩散效应的半径密度) 进行了计算, 计算结果如图 3-4、图 3-5 所示。在  $z \neq z_0$  情况下, 虽然实际计算不能够得到精确的矩形分布, 但若忽略引入误差,



The distribution  $\Phi(z, R)$  (solid line) and  $\Phi_G(z, R)$  (dashed line) in relative units at a depth  $z = -147\text{m}$ , where the bubble radius  $R$  is in microns.  $\Phi_G$  neglects gas diffusion while  $\Phi$  assumes a uniform partial pressure of one atmosphere,  $f=1$ , and  $RTGK/(4\pi) = 10^{-6}\text{m/s}$ .

图 3-4  $z = -147\text{m}$  处气泡密度及其近似分布的计算结果

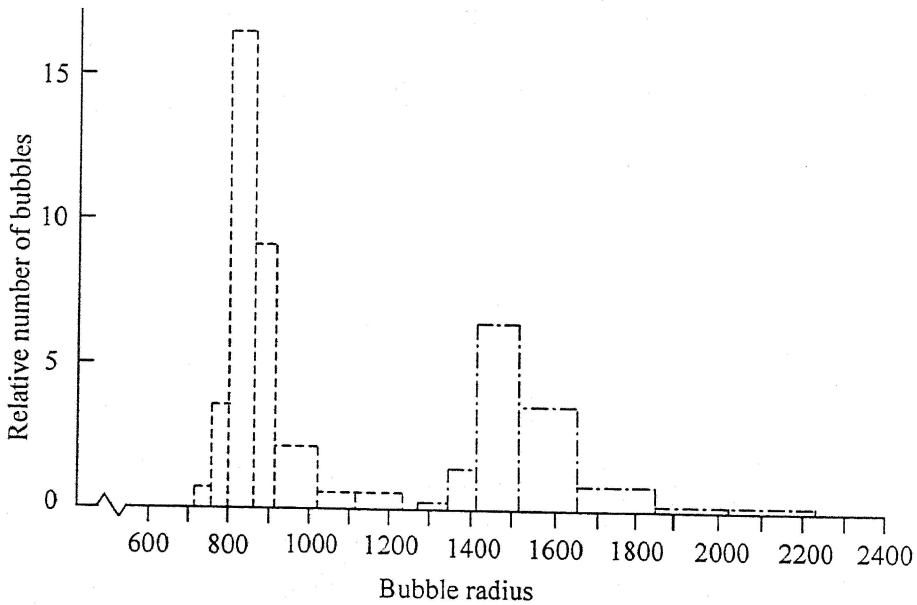
仍可绘出  $\Phi$ 、 $\Phi_G$  的完美直方图。

$\Phi_c$  忽略了气体扩散和表面张力的影响，而  $\Phi$  却包含着这些因素。对于所使用的气体扩散模型，那些使  $\Phi(z_0, R_0)$  不为零的气泡半径非常小，以致于这些气泡在上升过程中将会单调地收缩，并在到达水面以前熄灭，因此随着深度的减小，分布函数  $\Phi$  将会向小半径方向移动，直到约  $z \sim 90\text{m}$  时大气泡消灭，所以在图 3-5 中仅绘出  $\Phi_c$ ；在计算  $\Phi_c$  所使用的模型中，气泡在上升过程中必然要扩张，分布函数将会单调地向大半径方向移动。

第二个计算实例：观测的气泡分布结果指出，气泡分布函数依赖于体积源。为了验证这一思想，考虑 Shulkin 和 Medwin 在测量中所提出的假想体积源：

$$s(z, R) = e^{z/h} L(R) \quad (3-69)$$

其中



The distribution  $\Phi_c(z, R)$ , in relative units, vs. radius  $R$ , in microns, for  $z = -47\text{m}$  (dashed line) and  $z = 0$  (broken line).

图 3-5  $z = -47\text{m}$  和  $z = 0$  气泡的近似分布

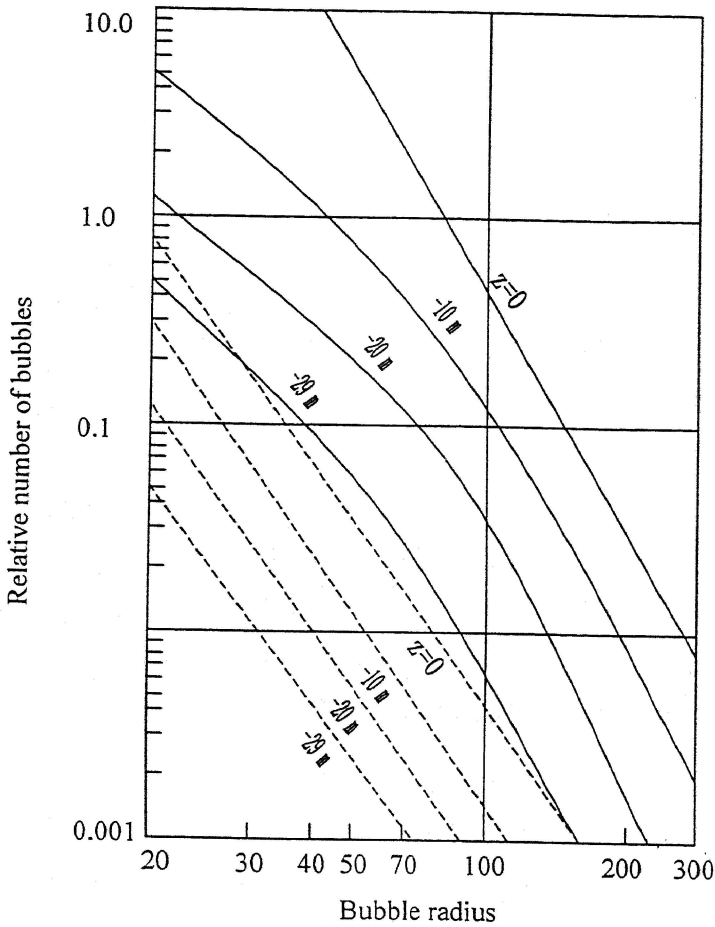
$$L(R) = \begin{cases} \left(\frac{R}{R'}\right)^{-3.5} & \text{for } R \geq R' \\ 0 & \text{for } 0 \leq R < R' \end{cases} \quad (3-70)$$

在表达式中， $h = 10\text{m}$ ， $R' = 20 \mu\text{m}$ ，从物理角度来看，体积源随深度呈指数规律减小，可能是由于光合作用、光敏细菌、波浪等作用引起的。Medwin 观测过小气泡 ( $R \leq 60 \mu\text{m}$ ) 的指数特性，Medwin 和 Shulkin 还分别观测到近表面气泡密度

随气泡半径呈幂函数减小。

假设在  $z=30\text{m}$  以下体积源为零，而且  $f=1$ ，在四个深度  $z=-29\text{m}$ 、 $-20\text{m}$ 、 $-10\text{m}$  和  $0$  时，对应的  $\Phi(z, R)$  和  $s(z, R)$  与半径的关系在图 3-6 中给出。对比  $\Phi$  和  $s$  可知，对于  $R \geq 60 \mu\text{m}$  的气泡体积源，分布函数近似地有如下函数关系：

$$\Phi(z, R) \sim e^{z/h'} R^{-3.5} \quad (3-71)$$



The distribution  $\Phi(z, R)$  (solid line), in relative units, vs. radius  $R$ , in microns, for various depth, in microns, from a distributed source  $s(z, R)$  [---equations (3-69) and (3-70)]. The same gas diffusion model as was used to calculate  $\Phi$  in figure 3-4 is used in this example.

图 3-6 气泡在不同深度下的分布规律

该式中的  $h' \cong 6.5\text{m}$ 。  $z=-29\text{m}$  处的分布与该表达式不符合，因为该区域太接近假设的无气泡区。

对于  $R \geq 100 \mu\text{m}$  的气泡, 分布函数  $\Phi$  的形式更为复杂, 不遵守 (3-71) 式的形式。除了表面, 曲线整个向下弯曲, 表明其中缺少小气泡。由于气体扩散和表面张力的原因, 小气泡比大气泡消灭的更快, 而在给定深度观测到的小气泡由所在处的体积源产生, 很多大气泡是从更深一些的体积源处产生。然而, 对于所使用的计算模型而言, 随着深度的增加气体扩散迅速减小, 因此在近表面处与小气泡并无大的差别。从图 3-5 可得,

$$\Phi(0, R) \sim R^{-3.75} \quad (3-72)$$

这些结果指出, 如果气体扩散很明显, 小气泡源将会比观测到的分布以  $R$  的更高次方减小, 但大气泡源与观测结果比较对  $R$  的依赖情况基本相同。而且, 气泡源对深度的依赖关系同气泡量具有相似的形式。

### 3.4 高速摄影技术对于气泡的研究

在很多实验和工程问题中, 水中的气泡起着重要作用, 对于这些问题的求解必然依赖于对水中气泡的分布、气泡的特性的掌握。比如, 海洋表面附近的气泡在许多不同过程中起着重要作用, 这些过程包括水下声波的传播、气象学、海洋表面化学、空化、大气-海洋气体交换、液滴喷射、有机粒子的形成、细菌传播、化学物质分馏、激光在水下的传输等。气泡广泛存在于海水、河水、湖水等各种条件的水中, 气泡的生成可能有多种原因, 如波浪的破碎产生的气泡、浮游生物产生的气泡、各种尘埃产生的气泡、各种微扰 (包括大气流动、各种振动、声波、湍流等) 产生的气泡、存在于舰船尾流中的气泡。舰船尾流中的气泡提供了这样一个线索, 即基于对气泡的特性研究, 并以此对舰船进行追踪是一种独特的方法。

由于存在附加压强、浮力、介质的粘滞阻力以及压差阻力, 还有不同温度、风力和光照下介质表面蒸发速率的影响, 加之在运动过程中气泡的形变、分裂、结合、熄灭以及位移, 每个气泡的运动规律和衰减情况大不相同。对于气泡的研究基本有两类方法, 即声学 and 光学技术, 其中光学技术主要有照相技术、激光散射技术和激光全息技术。用高速摄影技术来研究气泡, 具有直观、低费用的优点, 配合以半自动胶片判读仪, 可获得较为详细的关于气泡的参数。

#### 3.4.1 实验装置及实验条件

使用棱镜补偿式高速摄影机 ( $f: 300\text{mm}$ , LBS-500), 借助于气泡模拟器, 在

实验室环境下我们对清洁淡水中气泡模拟器所产生的气泡进行了拍摄，利用中科院西安光机所设计制造的半自动通用胶片判读仪（型号：HJ991）对所拍摄的胶片进行了判读。

气幕模拟装置主要由水槽、微孔陶瓷管、气体钢瓶组成，其核心是微孔陶瓷管。尾流中的气泡大小、密度具有一定的统计分布规律，对于这些规律的研究，很多人作了大量的工作。以尾流中气泡的分布规律为基础，定做了该微孔陶瓷管。微孔陶瓷管的孔径平均

约为  $2\ \mu\text{m}$ ，所产生的气泡直径约在  $300\sim 1000\ \mu\text{m}$  之间。微孔陶瓷管为圆形，外径为  $42.50\text{cm}$ ，长度为  $30.00\text{cm}$ 。为了得到较为均匀的气幕，采用了双陶瓷管，双陶瓷管平行排列，放置在水槽底部沿长度方向。

水槽的外形尺度在制作方面以鱼雷的外径为依据，其长度为  $50\text{cm}$ 。气体钢瓶的  $\text{N}_2$  通过软管与微孔陶瓷管相连，软管上同时接有压力表，以读取软管中  $\text{N}_2$  压强，一定压强的气体通过微孔陶瓷管产生实验所需的气幕。产生气幕的气体压力可调，气幕中的气体含量、气泡的大小随气体的压力变化而变化。实验用气泡模拟器如图 3-7 所示，其中 CTMH 表示微孔陶瓷管（Ceramic tube with

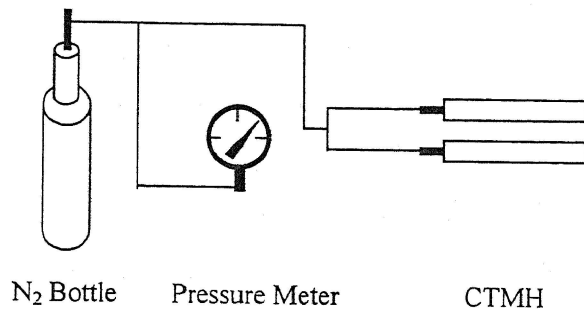


图 3-7 气泡模拟器示意图

Fig.3-7 Bubble simulation worker

micro-hole)。

实验在室内进行，气温  $27^\circ\text{C}$ ，风力  $0\sim 1$  级，人工强光源（新闻灯， $2600\text{W}$ ），气泡模拟器位于水槽底部（水深  $0.6\text{m}$ ），所拍摄气泡位于水面下  $0.3\text{m}$ 。实验系统如图 3-8 所示。

### 3.4.2 实验结果

在实验室，分别对不同气体压强下所产生的气泡幕进行了拍摄。使用的气

体压强为 0.020、0.025、0.030、0.035、0.040MPa，同时用数码相机对相应气体压强下的气泡幕进行了拍摄，以便对气泡以及气泡幕的特征作出更清楚的分析判断。

### 3.4.2.1 同一气体压强下气泡的特征及其运动规律

图 3-9 是在当气体压强为 0.040MPa 下拍摄的气泡幕局部情形，a、b、c 分别是快门速度为 1/1600、1/2500、1/10000s 拍摄到的情况。从图 3-9 可以清楚看出，在该气体压强下，大部分气泡已不在是球形，出现卵形、椭球形、水滴形、球冠形等许多形状。相对而言，较小的气泡呈球形，大一些的气泡呈现出非球形，甚至还出现有不规则的气泡。气泡密度大，无肉眼可见的穿透空隙。

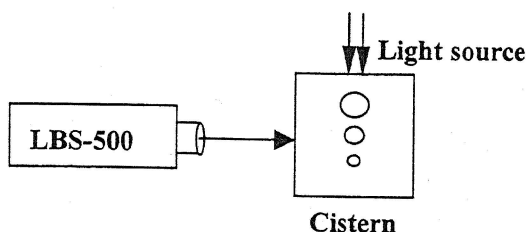


图 3-8 实验系统框图

Fig.3-8 Scheme of experimental apparatus

图 3-10 是高速摄影机拍摄的气泡幕情况，对应的气体压强为 0.025MPa，拍摄速度 200 幅/s，视标 1/200s。之所以利用视标，因为在摄影机在开始工作和工作结束时可能出现电机转速的变化，使得实际的拍摄速度达不到理论值，在胶片上同时记录的视标能够反映实际拍摄速度。从图 3-10，可以看出小气压时的气泡大部分都呈球形，其中只有个别大气泡呈现出椭球形或球冠形。

在图 3-11 中，也可以清楚地看到，小气压（0.020、0.025MPa）时小气泡占主要比例，气泡基本呈现球形，气泡密度也较小，有肉眼可见的空隙。气压较大（0.030、0.035MPa）时，出现非球形气泡，且 0.035MPa 时非球形气泡占大部分，气泡密度也明显增大。

图 3-9、11 中均清楚可见事先放置的标尺，图 3-10 的标尺较暗，但也可清楚看到，标尺为钢片尺，最小刻度为 mm。利用半自动通用胶片判读仪对高速摄影机拍摄的胶片进行分析，在气压为 0.025MPa 下，气泡基本呈球形，半径在 0.143~0.963mm 之间气泡占到 98%，有极个别气泡的半径小于 0.0143mm，或者

大于 0.963mm。通过对气泡相对位置坐标以及表观线度的测量，可得到了气泡的半径、上升速度以及上升过程中的加速度。

在对大量气泡的分析表明，气泡在上升过程中，其加速度、速度随时间的变化具有一定的统计规律。图 3-12 是其中十个气泡在上升过程中的加速度随时间变化的关系，十个气泡的直径分别为 0.963、0.834、0.642、0.503、0.453、0.356、0.296、0.248、0.204、0.143mm，分别对应于图中的 bubble01~bubble10。由于大气泡上升的速度较大，所以在胶片上大气泡在较短的时间内就会跑出摄影机的拍摄视野，因此大气泡的数据相应地少于小气泡的数据量。在图中可以清楚看到，大气泡 (bubble01~bubble4) 的曲线较短，而小气泡 (bubble05~bubble10) 的曲线较长。每个气泡的加速度变化规律从图上直观看来都有区别，但总体上的变化规律却有一定的统计规律性。随着气泡的上升，各个气泡的加速度都在振荡减小，加速度的数值在正、负值之间变化，总体上呈现出阻尼振荡的特性。其中一个气泡 (bubble03) 的加速度与此规律不一致，该气泡的直径为 0.642mm，在线度上看属于较大的气泡，从速度时间曲线 (图 3-14) 的情况中，看不出其具有特殊性。所出现的不一致的可能性有两方面：一是测量时

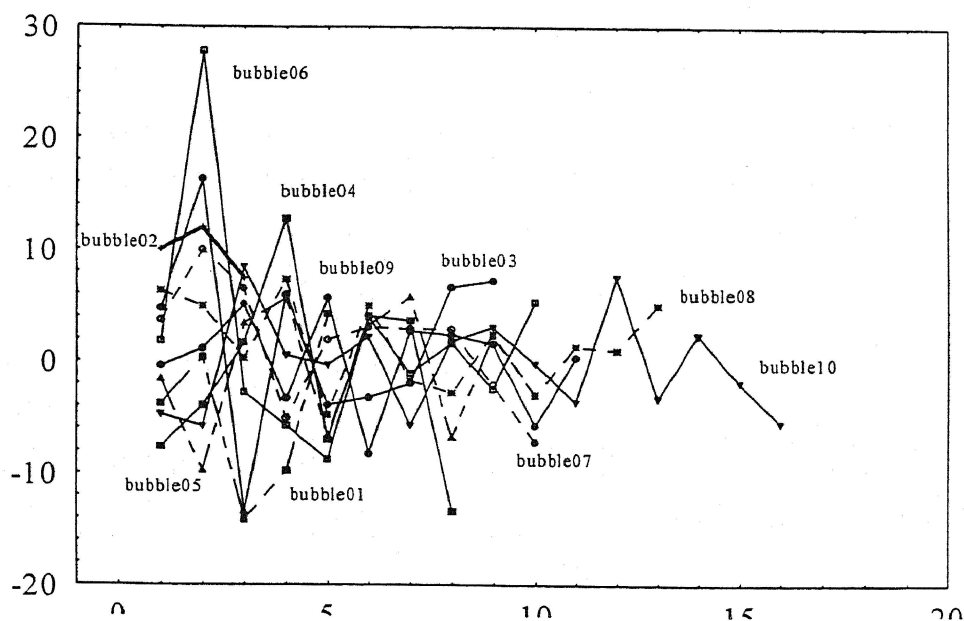


图 3-12 气泡加速度随上升时间的变化关系

的偶然因素的影响，这包括胶片上的该气泡不在像面上，而是虚像，从而造成测量误差；还包括在判读的过程中，手动操作时对气泡边界的判断存在误差，

对气泡的线度以及加速度、速度等物理量的结果造成影响。二是测量数据量不足，不能够说明该气泡的加速度变化规律。三是此大小气泡的加速度本身就是与其它气泡的加速度规律不同。三次测量的结果表明，虽然每次存在一些差异，但总体上没有大的变化。

从动力学的观点出发，气泡加速度的这种振荡衰减是有原因的。从气泡模拟器产生出的气泡具有一定的初速度。物体在流体中运动，受到流体的两种作用力，一种是摩擦力，另一种是压力，物体运动所受的阻力也可以归结为由摩擦引起的阻力和由压力差产生的阻力。比较小的物体在粘性较大的流体中缓慢地运动，换句话说在雷诺数比较小的情况下，作用于物体表面的摩擦阻力，是产生阻力的主要因素，这部分阻力叫做粘滞阻力。对于形状比较简单的物体，可以通过计算把阻力求出来，其中比较著名的是球形物体在流体中所受的粘滞阻力公式，即

$$f = 6\pi\eta_w vR$$

其中  $r$  为球面半径， $v$  为球体运动速度， $\eta_w$  为流体（本文中为水）粘滞系数。这个公式叫做斯托克斯公式，只有在雷诺数远小于时才是正确的。

作用于运动物体各部分的压力的合力形成压差阻力，当物体运动速度加大，以至物体后面出现漩涡时，压差阻力便成为主要的阻力，压差阻力来源于流体的粘性。压差阻力和物体的形状有关，改变物体的形状可以减少压差阻力。

忽略气泡内部运动，静水中小气泡 ( $R < 150 \mu\text{m}$ ) 的动力学方程为

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\rho_w - \rho_a}{\rho_a} g - \frac{3\rho_w C_d v^2}{8\rho_a R}$$

表达式中  $v$ 、 $t$ 、 $\rho_w$ 、 $\rho_a$ 、 $g$ 、 $C_d$  分别表示上升气泡的速度、时间、空气和水的密度、重力加速度、阻力系数，阻力系数由雷诺数 (Reynolds number) 确定

$$C_d = \frac{24(1 + 0.15R_e^{0.687})}{R_e}$$

$R_e$  表示雷诺数，定义为

$$R_e = \frac{\rho_w v R}{\eta_w}$$